УДК 517. 518

Н.О. Вірченко, М.О. Четвертак

ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ З *r*-ГІПЕРГЕОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ

In the paper the *r*-hypergeometric function is considered in the form ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)=\frac{1}{B(a,c-a)}\times\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}e^{xt}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt$, where ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)=\frac{1}{B(a,c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,{}_1\psi_1\left[\begin{matrix}(a,\tau);\\(c,\beta);\end{matrix}\ \left|xt^{\tau}\right.\right]dt$, ${}_1\psi_1[\ldots]$ is the generalized Fox-Wright function. Its basic properties are investigated. The formulas of differentiation are valid: $\frac{d}{dx}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)=\frac{a}{c}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a+1;c+1;x)$, $\frac{d^n}{dx^n}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)}\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a+n;c+n;x)$. The generalized integral Laplace transforms $\tilde{L}\{f(x);y\}=\int_0^\infty e^{-xy}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r(xy)^{\omega})f(x)dx$, $\tilde{L}_m\{f(x);y\}=\int_0^\infty x^{m-1}e^{-x^m y^m}\times$ $\times\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r(x^m y^m)^{\omega})f(x)dx$ with function ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)$ in the kernel are received. The main properties of these integral transforms are studied. The Parseval equality for the new generalized integral transforms are proved. The inverse formulas for these new integral transforms are received.

Keywords: *r*-hypergeometric function, Laplace integral transforms, Parseval relation.

Вступ

Останніми роками різні типи спеціальних функцій стали ефективним знаряддям при розв'язанні задач прикладного математичного аналізу, у теорії диференціальних та інтегральних рівнянь тощо. Спеціальні функції є ядрами і багатьох інтегральних перетворень — ефективного аналітичного методу розв'язання доволі широкого класу різноманітних прикладних задач [1, 2].

Цікаві типи інтегральних перетворень подано в [3]. У ядрах цих перетворень міститься *H*-функція, визначена за допомогою інтеграла типу Мелліна—Бернса, підінтегральний вираз якого має у собі добуток гамма-функцій. Інтегральні перетворення з гіпергеометричними функціями є яскравим представником *H*-перетворень [3].

Розвиток математичної фізики, механіки суцільного середовища, квантової механіки, теорії ймовірностей, аеродинаміки, біомедицини, астрофізики, теорії теплопровідності тощо спонукає до запровадження нових типів інтегральних перетворень. Особливо цінними для практики виявилися узагальнені конфлюентні гіпергеометричні функції, інтегральні перетворення з ними. Вони вже знаходять застосування у математичній фізиці, атомній фізиці, теорії кодування тощо.

Постановка задачі

Мета статті — розглянути *r*-конфлюентну гіпергеометричну функцію, дослідити її основні властивості, запровадити узагальнені інтегральні перетворення Лапласа $\tilde{L}\{f(x);y\}$, $\tilde{L}_m\{f(x);y\}$ з цією функцією в ядрі, вивчити основні властивості цих інтегральних перетворень.

r-конфлюентна гіпергеометрична функція та її основні властивості

Розглянемо *r*-узагальнену конфлюентну гіпергеометричну функцію у такому вигляді [4]:

$$
{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)=\frac{1}{B(a,c-a)}\times
$$

$$
\times\int_0^1 t^{a-1}(1-\mathrm{t})^{c-a-1}e^{xt}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-\mathrm{t})}\right)dt, \qquad (1)
$$

де $B(a,c-a)$ — класична β-функція [5], $\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}a>0$, $\{\tau,\beta\}\subset R, \tau-\beta<1, r>0$, $\operatorname{Re}\gamma>\operatorname{Re}\alpha>0$, $\alpha\in R,\alpha>0,\gamma\in R,\gamma>0$, ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(\ldots)-(\tau,\beta)$ — узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція [6]:

$$
{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)=\frac{1}{B(a,c-a)}\times
$$

$$\times \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\,{}_1\psi_1\left[\begin{matrix}(a,\tau);\\(c,\beta);\end{matrix}\ \middle|\, xt^{\tau}\right]dt, \qquad (2)$$

де ${}_1\psi_1[...]$ – узагальнена Fox-Wright функція [3].

Зауважимо, що при $\tau=\beta=1, r=0$, (1) дає класичну конфлюентну гіпергеометричну функцію ${}_1\Phi_1(a;c;x)$ [5].

Для функції ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)$ при умовах існування цієї функції справедливі такі формули диференціювання:

$$\frac{d}{dx}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)=\frac{a}{c}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a+1;c+1;x), \qquad (3)$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)=$$

$$=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)}\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a+n;c+n;x), \qquad (4)$$

$$\frac{d^n}{dx^n}[e^{-x}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)]=$$

$$=(-1)^n\frac{\Gamma(c)\Gamma(c+n-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c+n)}e^{-x}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c+n;x). \qquad (5)$$

Про зображення функції ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)$ рядом справедлива така теорема.

Якщо виконуються такі умови: $\mathrm{Re}\,c>\mathrm{Re}\,a>0$, $\{\tau,\beta\}\subset R, \tau>0, \tau-\beta<1, r>0, \mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\alpha>0$, $\{\alpha,\gamma\}\subset R, \gamma>0$, $\mathrm{Re}(c-a-n)>0, \mathrm{Re}(a-n)>0$, то справедлива формула

$${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)B(a,c-a)}\times$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n\tau)}{\Gamma(\gamma+n\beta)}\frac{(-r)^n}{n!}\times$$

$$\times B(c-a-n,a-n)\,{}_1\Phi_1(a-n;c-2n;x), \qquad (6)$$

де ${}_1\Phi_1(...)$ – класична вироджена гіпергеометрична функція [5].

При умовах існування функції ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)$ справедливі такі інтегральні співвідношення:

$$\int_0^{\infty} x^n\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-x)\,dx=$$

$$=\mathrm{Mn}!\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a-n-1;c-n-1;-x), \qquad (7)$$

$$M=\frac{\Gamma(a-n-1)\Gamma(c)}{\Gamma(c-n-1)\Gamma(a)};$$

$$\int_0^{\infty}\exp(-e^x)\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{B(a,c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}\times$$

$$\times\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right)\Gamma(t)\,dt. \qquad (8)$$

Узагальнені інтегральні перетворення Лапласа

Запровадимо узагальнення інтегральних перетворень Лапласа у такій формі:

$$\tilde{L}\{f(x);y\}=\int_0^{\infty}e^{-xy}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r(xy)^{\omega})f(x)dx, \qquad (9)$$

$$\tilde{L}_m\{f(x);y\}=\int_0^{\infty}x^{m-1}e^{-x^m y^m}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}\times$$

$$\times(a;c;-r(x^m y^m)^{\omega})f(x)dx, \qquad (10)$$

$$\tilde{L}_{m_1,m_2,\omega}\{f(x);y\}=$$

$$=\int_0^{\infty}x^{m_2}e^{-(xy)^{m_1}}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r(xy)^{\omega m_1})f(x)dx, \qquad (11)$$

де $x>0, \omega\in C, r\geq 0$; $f(x)\equiv 0$ при $x<0$; $\mathrm{Re}\,c>$ $>\mathrm{Re}\,a>0; \{\tau,\beta\}\subset R, \tau>0, \tau-\beta<1$, $x^{m-1}f(x)<$ $<Ke^{s_0 x^{\omega}}; K; s_0$ – сталі; ${}_1^r\Phi_1(a;c;z)$ – r-узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція вигляду (1).

Якщо в (10) покласти $m=1, r=0$, то одержимо класичне інтегральне перетворення Лапласа [7].

Подамо деякі властивості узагальнених інтегральних перетворень Лапласа (9)–(11).

Властивість лінійності для інтегрального перетворення (10) має вигляд

$$\tilde{L}_m\left\{\sum_{i=1}^n C_i f_i(x);y\right\}=\sum_{i=1}^n C_i\tilde{L}_m\{f(x);y\}, \qquad (12)$$

$(C_i=\mathrm{const}, \mathrm{i}=\overline{1,n})$.

Властивість подібності матиме таку форму:

$$\tilde{L}_m\{f(\delta x);y\}=\frac{1}{\delta^{\omega+1}}\tilde{L}_m\left\{f(x);\frac{y}{\delta}\right\}. \qquad (13)$$

При умовах існування та абсолютній збіжності відповідних інтегралів справедлива рівність

$$L_m\{u^{\upsilon-1}\tilde{L}_m(x);y\} = \frac{\Gamma(\upsilon)}{m}\tilde{P}^{\upsilon}_{m,1}\{g(x);y\}, \qquad (14)$$

де $\operatorname{Re}\upsilon > 0$,

$$L_m\{f(x);y\} = \int_0^\infty x^{m-1}e^{-x^m y^m} f(x)\,dx, \qquad (15)$$

$\tilde{L}_m$ визначається формулою (10),

$$\tilde{P}^{\upsilon}_{m,1}\{f(x);y\} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(\upsilon)}\times$$

$$\times\int_0^\infty \frac{x^{m-1}f(x)}{(x^m+y^m)^{\upsilon}}\,{}_2\Psi_1\times$$

$$\times\left[\begin{matrix}(a,\tau);(\upsilon,\omega);\\ (c,\beta);\end{matrix}\;\middle|\; -r\left(\frac{x^m}{x^m+y^m}\right)^{\omega}\right]dx. \qquad (16)$$

Доведення. Використаємо формулу [8]:

$$\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\frac{1}{(y+z)^p}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a,\tau);\;\;(P,\omega);\\ (c,\beta);\end{matrix}\;\middle|\; -r\left(\frac{y}{y+z}\right)^{\omega}\right] =$$

$$= \int_0^\infty x^{p-1}e^{-(y+z)x}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r(xy)^{\omega})\,dx.$$

Матимемо

$$L_m\{u^{\upsilon-1}\tilde{L}_m\{g(x);u\};y\} = \int_0^\infty u^{\upsilon-1}u^{m-1}e^{-y^m u^m}\times$$

$$\times\left[\int_0^\infty x^{m-1}e^{-x^m u^m}\,{}^r_1\Phi_1^{\tau,\beta}\,(a;c;-r(x^m u^m)^{\omega})g(x)dx\right]du =$$

$$= \int_0^\infty x^{m-1}g(x)[u^{\upsilon+m-2}e^{-(x^m+y^m)u^m}\,{}^r_1\Phi_1^{\tau,\beta}\times$$

$$\times(a;c;-r(x^m u^m)^{\omega})du]\,dx =$$

$$= \frac{1}{m}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\int_0^\infty \frac{x^{m-1}g(x)}{(x^m+y^m)^{\upsilon}}\times$$

$$\times\,{}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a,\tau);\;\;(\upsilon,\omega);\\ (c,\beta);\end{matrix}\;\middle|\; -r\left(\frac{x^m}{x^m+y^m}\right)^{\omega}\right]dx =$$

$$= \frac{\Gamma(\upsilon)}{m}\tilde{P}^{\upsilon}_{m,1}\{g(x);y\}.$$

Зауважимо, що при $\upsilon = 1$ в (14) має місце така рівність:

$$L_m\left\{\tilde{L}_m\{g(x);u\} = \frac{1}{m}\tilde{P}_{m,1}\{g(x);y\}\right\}. \qquad (17)$$

Якщо відповідні інтеграли існують і збігаються абсолютно, то виконується співвідношення типу Парсеваля (стосовно $\tilde{L}_m\{f(x);y\}$):

$$\int_0^\infty u^{m+\upsilon-2}f(u)\tilde{L}_m\{\{f(u);u\};y\}\,du =$$

$$= \int_0^\infty u^{\upsilon-1}y^{m-1}g(u)\tilde{L}_m\{f(u);y\}\,dy. \qquad (18)$$

Із (18) при $m=1, r=0$, $F(u)=u^{\upsilon-1}y^m\tilde{L}_m\{g(x);u\}$, $R(y)=u^{\upsilon-1}y^m\tilde{L}_m\{f(u);y\}$ отримаємо для практичних цілей важливу рівність:

$$\int_0^\infty \frac{f(u)F(u)du}{u} = \int_0^\infty \frac{g(u)R(y)dy}{y}. \qquad (19)$$

При існуванні відповідних інтегралів та їх абсолютній збіжності справедлива рівність типу Парсеваля (щодо $\tilde{L}_m$ і $\tilde{F}_{s,m}$):

$$\int_0^\infty x^{m-1}\tilde{L}_m\{f(t);x\}\tilde{F}_{s,m}\{g(u);x\}dx =$$

$$= \int_0^\infty t^{m-1}f(t)\tilde{L}_m\{\tilde{F}_{s,m}\{g(u);x\};t\}dt, \qquad (20)$$

де

$$\tilde{F}_{s,m}\{g(u);x\} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\int_0^\infty u^{m-1}\sin(u^m x^m)\times$$

$$\times\,{}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a,\tau);\;\;(1,\omega);\\ (c,\beta);\end{matrix}\;\middle|\; -r\left(\frac{x^m}{x^m+y^m}\right)^{\omega}\right]g(u)\,du. \qquad (21)$$

Справді, формулу (20) легко отримати, використавши визначення операторів $\tilde{L}_m$, $\tilde{F}_{s,m}$, міняючи порядок інтегрування:

$$\int_0^\infty x^{m-1}\tilde{L}_m\{f(t);x\}\tilde{F}_{s,m}\{g(u);x\}\,dx =$$

$$= \int_0^\infty x^{m-1}\left[\int_0^\infty t^{m-1}e^{-x^m t^m}f(t)\,{}^r_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r(x^m t^m)^{\omega})\times\right.$$

$$\left.\times\,\tilde{F}_{s,m}\{g(u);x\}\,dx\right]dt =$$

$$= \int_0^\infty t^{m-1}f(t)\tilde{L}_m\{\tilde{F}_{s,m}\{g(u);x\};t\}\,dt.$$

Формула обернення для $\tilde{L}\{f(x);y\}$. Теорема

За умов існування інтегрального перетворення $\tilde{L}_{m_1,m_2,m}(f(x);x)$ справедлива формула

$$f(t)=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)}m_1 t^{-m_2}\int_0^\infty (tx)^{-1}g(x)K(tx)\,dx, \qquad (22)$$

де

$$K(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{x^s}{\xi(s)}ds,$$

$$g(y)=\tilde{L}_{m_1,m_2,m}\{f(x);y\},\xi(s)=$$

$$={}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a,\tau); & \left(\frac{s}{m_1},m\right); \\ (c,\beta); & \end{matrix}\ \Bigg|-r\right],$$

$$\tilde{L}_{m_1,m_2,m}\{f(x);y\}=$$

$$=\int_0^\infty x^{m_2}e^{-(xy)^{m_1}}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r(xy)^{mm_1})f(x)\,dx, \quad (23)$$

де $x>0,\ m\in C,\ m_1>0,\ m_2>0,\ r\ge 0,\ f(x)\equiv 0$ при $x<0;\operatorname{Re}c>\operatorname{Re}a>0;\{\tau,\beta\}\subset R,\tau>0,\tau-\beta<1$, $x^{m_2}f(x)<Me^{s_0x^{m_1}};M,s_0$ – сталі, ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)-$ $-(\tau,\beta)$ – узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція.

Д о в е д е н н я. Застосуємо інтегральне перетворення Мелліна до обох частин (23). Врахувавши, що ряд для ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$ абсолютно збігається для всіх $z\in C$, виконаємо перетворення

$$M\{g(x);s\}=\frac{1}{m_1}M\left\{e^{-\upsilon}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r\upsilon^m);\frac{s}{m_1}\right\}\times$$

$$\times M\{f(u);m_2-s+1\};$$

$$M\left\{e^{-\upsilon}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r\upsilon^m);\frac{s}{m_1}\right\}=$$

$$=\int_0^\infty \upsilon^{\frac{s}{m_1}-1}e^{-\upsilon}\,{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r\upsilon^m)d\upsilon=$$

$$=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\,{}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a,\tau); & \left(\frac{s}{m_1},m\right); \\ (c,\beta); & \end{matrix}\ \Bigg|-r\right];$$

$$M\{f(u);m_2+1-s\}=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)}\times$$

$$\times m_1\left[\begin{matrix}(a,\tau); & \left(\frac{s}{m_1},m\right); \\ (c,\beta); & \end{matrix}\ \Bigg|-r\right]^{-1}M\{g(x);s\}.$$

Застосувавши до останнього формулу обернення інтегрального перетворення Мелліна, одержимо (22).

Висновки

У статті показано, як за допомогою узагальнення конфлюентної гіпергеометричної функції можна побудувати нове узагальнення інтегрального перетворення Лапласа.

Отримано нове узагальнення інтегральних перетворень Лапласа $\tilde{L}\{f(x);y\},\tilde{L}_m\{f(x);y\}$:

$$\tilde{L}(f(x);y)=\int_0^\infty e^{-xy}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r(xy)^{\omega})f(x)\,dx,$$

$$\tilde{L}_m\{f(x);y\}=$$

$$=\int_0^\infty x^{m-1}e^{-x^my^m}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-r(x^my^m)^{\omega})f(x)\,dx.$$

Розглянуто нову гіпергеометричну функцію ${}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)$. Для неї отримано формули диференціювання

$$\frac{d}{dx}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)=\frac{a}{c}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a+1;c+1;x),$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;x)=$$

$$=\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)}\frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(c+n)}\,{}_1^r\Phi_1^{\tau,\beta}(a+n;c+n;x).$$

Справджується рівність Парсеваля для нових узагальнених інтегральних перетворень Лапласа, що має важливе значення для практичних задач. Запроваджено формулу обернення для $\tilde{L}\{f(x);y\}$.

У подальшому планується запровадження нових узагальнень інтегральних перетворень Стільтьєса, Ганкеля, дослідження їх властивостей, застосувань тощо.

Список літератури

1. *Yu.A. Brychkov and A. Prudnikov,* Integral Transforms of Generalized Functions. New York: Gordon and Breach, 1989, 344 p.
2. *L. Debnath,* Integral Transforms and Their Applications. Boca Raton: CRC Press, 1995, 456 p.
3. *A.A. Kilbas and M. Saigo,* H-Transforms: Theory and Applications. Boca Raton, FL: Charman and Hall/CRC, 2004, 390 p.
4. *Вірченко Н.О.* Узагальнення конфлюентних гіпергеометричних функцій // Доп. НАН України. – 2012. – № 5. – С. 7–11.
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – М.: Наука. – **1**. – 1973. – 296 с.
6. *N. Virchenko*, "On the generalized confluent hypergeometric function and its application", J. Fract. Calculus and Appl. Anal., vol. 9, no. 2, 2006, pp. 101–108.
7. *Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. – М.: Наука, 1974. – 544 с.
8. *Вірченко Н.О.* Узагальнені інтегральні перетворення. – К.: Задруга, 2013. – 398 с.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
19 грудня 2013 року