УДК 517.98

Я.В. Горбатенко

ДОСТАТНІ УМОВИ ЕРГОДИЧНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ АБСТРАКТНИХ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

This paper is devoted to second order abstract linear differential equations in a Banach space. For such equations the Cauchy problem is stated, and the behavior of its solutions as $t \to +\infty$ is examined. The aim of the paper is to study ergodicity and asymptotic behavior of the solutions of the strongly correct Cauchy problem. For this purpose the theory of complete second order linear differential equations in Banach spaces, developed by Fattorini, is used. As shown in the paper, for a wide class of equations the solutions are either ergodic or unbounded, depending on the initial values. For the solutions to be ergodic, conditions on the linear operators-coefficients of the differential equation and the initial values of the Cauchy problem are obtained. In case of ergodic solutions, exact values of ergodic limits are given. In case of unbounded solutions, asymptotic behavior of solutions is described. Results obtained in this paper are a generalization of the previously known results concerning ergodic properties of the solutions for the Cauchy problem for the incomplete second order equations.

Keywords: ergodicity, asymptotic behavior, Banach space, linear differential equations, abstract Cauchy problem.

Вступ

При дослідженні задачі Коші для лінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі важливим питанням є поведінка розв'язків при $t \to +\infty$, зокрема ергодичність розв'язків.

Існує розвинена теорія ергодичності розв'язків лінійних диференціальних рівнянь першого порядку [1, 2]. Ергодичність розв'язків неповного рівняння другого порядку досліджується в працях [3–6], де отримані критерії ергодичності розв'язків задачі Коші для деяких класів початкових умов. Випадок повного рівняння другого порядку в гільбертовому просторі розглядається в [7, 8].

Природним напрямом розвитку теорії ергодичності є дослідження повного рівняння другого порядку в банаховому просторі. Результати цієї статті доповнюють результати, отримані в [9].

Постановка задачі

Метою статті є дослідження ергодичності й асимптотичної поведінки розв'язків задачі Коші для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку в банаховому просторі та отримання достатніх умов ергодичності таких розв'язків.

Означення та попередні відомості

Нехай X – банахів простір, A, B – замкнені, щільно визначені лінійні оператори. Розглянемо абстрактне лінійне диференціальне рівняння другого порядку:

$$u''(t) + Bu'(t) + Au(t) = 0, t \geq 0, \tag{1}$$

де $u : [0; +\infty) \to X$, та поставимо для рівняння (1) задачу Коші:

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0, \\ u'(0) &= u_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Функція $f(\cdot) : R^+ \to X$ (або $R^+ \to L(X)$) називається (сильно) ергодичною, якщо існує сильна границя

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(s) ds.$$

Задача (1)–(2) називається коректною, якщо виконуються такі умови:

- у вихідному просторі X містяться щільні підпростори D_0, D_1 такі, що для кожних початкових умов $u_0 \in D_0, u_1 \in D_1$ задача (1)–(2) має розв'язок;
- існує додатна неспадна функція $N(t)$, визначена на R^+, така, що для кожного розв'язку $u(t)$ виконується нерівність

$$\| u(t) \| \leq N(t)(\| u(0) \| + \| u'(0) \|), t \geq 0.$$

Відповідно до [10], якщо задача (1)–(2) коректна, то існують однопараметричні сім'ї $C(t)$ і $S(t)$ обмежених лінійних операторів у X, що називаються операторами-розв'язками та визначені таким чином:

- $u(t) = C(t)u_0$ є розв'язком задачі (1)–(2) при $u(0) = u_0 \in D_0, u'(0) = 0$;

- $v(t) = S(t)u_1$ є розв'язком задачі (1)–(2) при $u(0) = 0, u'(0) = u_1 \in D_1$.

Оператори $C(t)$ і $S(t)$ можна продовжити на весь простір X завдяки обмеженості.

Згідно з [10], розв'язок задачі (1)–(2) з довільними початковими умовами $u_0 \in D_0, u_1 \in D_1$ визначається формулою

$$u(t) = C(t)u_0 + S(t)u_1.$$

Таким чином, дослідження ергодичності розв'язків задачі (1)–(2) зводиться до дослідження ергодичності функцій $C(t)x$ і $S(t)x$, $x \in X$.

Відповідно до [11] (див. також [12]), задача Коші (1)–(2) називається сильно коректною, якщо вона коректна і для всіх $u \in X$ виконуються такі умови:

$$S(\cdot)u \in C^1(R^+, X);$$

$$\forall t > 0 : S(t)X \subset D(B);$$

$$BS(\cdot)u \in C(R^+, X).$$

У цій статті будемо розглядати сильно коректні задачі Коші, для яких виконується наступна умова: існує таке $M > 0$, що при усіх $t \ge 0$:

$$\begin{cases} \| C(t)\| \le M, \\ \forall x \in \operatorname{Im} A : \| S(t)x\| \le M \| x \|. \end{cases} \tag{3}$$

Відзначимо властивості операторів $C(t)$ та $S(t)$, $t \ge 0$ (див. [10]):

$$\forall x \in D(A) : C'(t)x = -S(t)Ax, \tag{4}$$

$$\forall x \in D(B) : S'(t)x = C(t)x - S(t)Bx. \tag{5}$$

Введемо такі оператори:

$$Px = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t C(s)xds,$$

$$P_S x = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t S(s)xds,$$

(оператори P та P_S визначені тільки на тих $x \in X$, для яких відповідні границі існують).

Оператор P обмежений, і при цьому $\| P\| \le M$. Функція $C(t)$ (відповідно, $S(t)$) ергодична, якщо оператор P (відповідно, P_S) визначений на всьому просторі.

Основні результати

Теорема 1. Нехай виконується умова (3), має місце розклад $X = \operatorname{Ker} A \oplus \overline{\operatorname{Im} A}$ і також $\operatorname{Ker} A \subset D(B)$, $B(\operatorname{Ker} A) \subset \overline{\operatorname{Im} A}$, тоді

1) функція $C(t)$ ергодична (тобто $C(t)x$ ергодична при усіх $x \in X$);

2) при $x \in \overline{\operatorname{Im} A}$ функція $S(t)x$ ергодична і відповідна границя є нульовою: $P_S x = 0$;

3) при $x \in \operatorname{Ker} A$, $x \ne 0$, функція $S(t)x$ не ергодична, та

$$\frac{1}{t}\int_0^t S(s)xds = O(t),\ t \to +\infty.$$

Для доведення теореми будуть потрібні три леми про ергодичність функцій $C(t)x$ та $S(t)x$ при різних умовах на елемент $x \in X$.

Лема 1. Нехай виконується умова (3). Тоді для будь-якого $x \in \overline{\operatorname{Im} A}$ ергодична границя функції $S(t)x$ існує і дорівнює $P_S x = 0$.

Д о в е д е н н я. Спочатку доведемо твердження леми для $x \in \operatorname{Im} A$. Нехай $x = Ay$. Тоді маємо

$$P_S x = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t S(s)xds = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t S(s)Ayds =$$

$$= -\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t C'(s)yds = -\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}(C(t) - I)y = 0.$$

Твердження леми доведено для $x \in \operatorname{Im} A$. Оскільки $S(t)$ рівномірно обмежена на $\operatorname{Im} A$ (умова (3)), то $P_S x = 0$ і для будь-якого $x \in \overline{\operatorname{Im} A}$. Лему доведено.

Лема 2. Нехай виконується умова (3). Тоді

1) якщо $x \in \operatorname{Ker} A$, то $Px = x$;

2) якщо $x \in \overline{\operatorname{Im} A} \cap D(B)$ такий, що $Bx \subset \overline{\operatorname{Im} A}$, то $Px = 0$.

Д о в е д е н н я. Якщо $x \in \operatorname{Ker} A$, то із властивості (4) випливає таке: при всіх $t \in [0;+\infty)$ виконується рівність $C'(t)x = -S(t)Ax = 0$, тому $C(t)x = x$.

Використовуючи (5), для вказаного $x \in \overline{\operatorname{Im} A} \cap D(B)$ маємо

$$\frac{1}{t}\int_0^t C(\tau)xd\tau = \frac{1}{t}S(t)x + \frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)Bxd\tau. \tag{6}$$

Далі, за умовою (3), маємо збіжність:

$$\left\|\frac{1}{t}S(t)x\right\| \le \frac{M}{t}\,\|x\| \to 0,\; t \to +\infty.$$

Отже, спрямовуючи $t \to +\infty$ в (6), маємо $Px = P_S Bx$. Оскільки $Bx \in \overline{\operatorname{Im} A}$, то за лемою 1: $P_S Bx = 0$, тому $Px = 0$. Лему доведено.

Лема 3. Якщо виконується умова (3), $\operatorname{Ker} A \subset D(B)$, $B(\operatorname{Ker} A) \subset \overline{\operatorname{Im} A}$, то для будь-якого $x \in \operatorname{Ker} A$, $x \ne 0$, має місце

$$\frac{1}{t}\int_0^t S(s)x\,ds = O(t),\; t \to +\infty,$$

і тому ергодичної границі функції $S(t)x$ не існує.

Доведення. Візьмемо довільний $x \in \operatorname{Ker} A$. Для нього із (5) маємо

$$S'(t)x = C(t)x - S(t)Bx.$$

Проінтегрувавши останню тотожність від 0 до t, отримуємо

$$S(t)x = \int_0^t C(\tau)x\,d\tau - \int_0^t S(\tau)Bx\,d\tau.$$

Далі, оскільки $x \in \operatorname{Ker} A$, то при будь-якому $t > 0$: $C(t)x = x$ (див. доведення леми 2), отже, маємо

$$S(t)x = tx - \int_0^t S(\tau)Bx\,d\tau.$$

Знову проінтегруємо останню тотожність від 0 до t, потім розділимо на t:

$$\frac{1}{t}\int_0^t S(s)x\,ds = \frac{t}{2}x + \frac{1}{t}\int_0^t\int_0^\tau S(s)Bx\,ds\,d\tau. \tag{7}$$

Покажемо, що

$$\frac{1}{t}\int_0^t\int_0^\tau S(s)Bx\,ds\,d\tau = o(t),\; t \to +\infty. \tag{8}$$

За умовою теореми $Bx \in \overline{\operatorname{Im} A}$, отже, за лемою 1: $\lim\limits_{\tau\to+\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau S(s)Bx\,ds = 0$. Тому

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\left\|\frac{1}{t}\int_0^t\int_0^\tau S(s)Bx\,ds\,d\tau\right\| \le$$

$$\le \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\frac{1}{t}\left\|\int_0^\tau S(s)Bx\,ds\right\|d\tau \le$$

$$\le \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\left\|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau S(s)Bx\,ds\right\|d\tau = 0.$$

Отже, доведено (8). Тому із (7) випливає, що при $x \in \operatorname{Ker} A$:

$$\frac{1}{t}\int_0^t S(s)x\,ds = O(t).$$

Лему доведено.

Доведення теореми 1. Доведення складається з трьох частин. Спочатку покажемо, що $X = \overline{\operatorname{Ker} A + (\overline{\operatorname{Im} A} \cap D(B))}$. Потім доведемо вкладення $B(\overline{\operatorname{Im} A} \cap D(B)) \subset \overline{\operatorname{Im} A}$. В останній частині доведемо власне твердження теореми.

Візьмемо довільний $x \in D(B)$. За умовою леми його можна розкласти в суму $x = x_{\operatorname{Ker} A} + x_{\overline{\operatorname{Im} A}}$, де $x_{\operatorname{Ker} A} \in \operatorname{Ker} A$, $x_{\overline{\operatorname{Im} A}} \in \overline{\operatorname{Im} A}$. Також за умовою леми $x_{\operatorname{Ker} A} \in D(B)$, тому $x_{\overline{\operatorname{Im} A}} \in \overline{\operatorname{Im} A} \cap D(B)$. Отже, маємо

$$D(B) \subset \operatorname{Ker} A + (\overline{\operatorname{Im} A} \cap D(B)).$$

Оператор B щільно визначений, тому

$$X = \overline{\operatorname{Ker} A + (\overline{\operatorname{Im} A} \cap D(B))}.$$

Тепер перейдемо до доведення вкладення $B(\overline{\operatorname{Im} A} \cap D(B)) \subset \overline{\operatorname{Im} A}$. Нехай $x \in \overline{\operatorname{Im} A} \cap D(B)$. За умовою теореми елемент Bx можна розкласти як $Bx = z_{\operatorname{Ker} A} + z_{\overline{\operatorname{Im} A}}$, де $z_{\operatorname{Ker} A} \in \operatorname{Ker} A$, $z_{\overline{\operatorname{Im} A}} \in \overline{\operatorname{Im} A}$. Доведемо, що в цьому розкладі $z_{\operatorname{Ker} A} = 0$ (тобто $Bx \in \overline{\operatorname{Im} A}$). Як і в лемі 3, маємо тотожність

$$S(t)x = \int_0^t C(\tau)x\,d\tau - \int_0^t S(\tau)Bx\,d\tau,$$

тому

$$\frac{1}{t}\int_0^t C(\tau)x\,d\tau = \frac{1}{t}S(t)x + \frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)Bx\,d\tau,$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t C(\tau)x\,d\tau - \frac{1}{t}S(t)x - \frac{1}{t}\int_0^t S(s)z_{\overline{\operatorname{Im} A}}\,ds =$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t S(s)z_{\operatorname{Ker} A}\,ds.$$

У лівій частині останньої тотожності маємо $\frac{1}{t}\int_0^t S(s)z_{\overline{\operatorname{Im} A}}\,ds \to 0$ (за лемою 1), а інші доданки принаймні обмежені по t. Однак за лемою 3 права частина є $O(t)$ при $z_{\operatorname{Ker} A} \ne 0$. Отримане протиріччя доводить, що $Bx \in \overline{\operatorname{Im} A}$.

Завдяки довільності вибору $x \in \overline{\operatorname{Im} A} \cap D(B)$ маємо $B(\overline{\operatorname{Im} A} \cap D(B)) \subset \overline{\operatorname{Im} A}$.

Тепер розглянемо ергодичність $C(t)x$. За п. 1 леми 2, якщо $x \in \operatorname{Ker} A$, то ергодична границя дорівнює $Px = x$.

Далі, як доведено раніше, якщо $x \in \overline{\operatorname{Im} A} \cap D(B)$, то $Bx \in \overline{\operatorname{Im} A}$. Тому за п. 2 леми 2 маємо $Px = 0$.

Таким чином, ергодична границя функції $C(t)x$ існує для усіх $x \in \operatorname{Ker} A + (\overline{\operatorname{Im} A} \cap D(B))$, а завдяки рівномірній обмеженості $C(t)$ границя існує і для усіх $x \in \overline{\operatorname{Ker} A + (\overline{\operatorname{Im} A} \cap D(B))} = X$.

Щодо функції $S(t)x$, то твердження теореми витікають із леми 1 та леми 3. Теорему доведено.

Висновки

У ході роботи отримано достатні умови ергодичності розв'язків задачі Коші для повного лінійного диференціального рівняння другого порядку в банаховому просторі. Встановлено, що для широкого класу таких рівнянь розв'язки задачі Коші є або ергодичними, або необмеженими залежно від початкових умов. Результати цієї роботи узагальнюють результати, викладені у [3–6], на випадок повних рівнянь другого порядку.

Напрямком подальших досліджень є узагальнення результатів на випадок повних диференціальних рівнянь порядків вище другого.

Список літератури

1. *E. Hille and R.S. Phillips,* Functional Analysis and Semi-Groups. Providence: Amer. Math. Soc., 1957, 808 p.
2. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. – К.: Выща шк., 1989. – 348 с.
3. *J.A. Goldstein et al.,* "Convergence rates of ergodic limits for semigroups and cosine functions," Semigroup Forum, vol. 16, pp. 89–95, 1978.
4. *S.-Y. Shaw,* "Mean and pointwise ergodic theorems for cosine operator functions," Math. J. Okayama Univ., vol. 27, is. 1, pp. 197–203, 1985.
5. *R. Sato and S.-Y. Shaw,* "Strong and uniform mean stability of cosine and sine operator functions," J. Math. Anal. Appl., vol. 330, is. 2, pp. 1293–1306, 2007.
6. *S.-Y. Shaw*, "Growth order and stability of semigroups and cosine operator functions," J. Math. Anal. Appl., vol. 357, is. 2, pp. 340–348, 2009.
7. *Горбачук М.Л., Кочубей А.Н., Шкляр А.Я.* О стабилизации решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Докл. акад. наук. – 1995. – **341**, № 6. – С. 734–736.
8. *Горбачук М.Л., Шкляр А.Я.* О поведении на бесконечности решений дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. – 1996. – Вып. 19. – С. 174–201.
9. *Горбатенко Я.В.* Ергодичність розв'язків абстрактних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку в банаховому просторі // Доп. НАН України – 2010. – № 9. – С. 10–19.
10. *H.O. Fattorini,* Second Order Linear Differential Equations in Banach Spaces. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1985, 314 p.
11. *T.J. Xiao and J. Liang,* "On complete second order linear differential equations in Banach spaces," Pacific J. Math., vol. 142, is. 1, pp. 175–195, 1990.
12. *Горбатенко Я.В.* Розв'язність і сильна коректність задачі Коші для абстрактних лінійних диференціальних рівнянь у банахових просторах // Наук. вісті НТУУ "КПІ". – 2010. – № 4. – С. 40–43.

Рекомендована Радою
Інституту прикладного системного
аналізу НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
21 травня 2014 року