УДК 517.9

М.Є. Дудкін, В.І. Козак
Національний технічний університет України “КПІ”, Київ, Україна

ПОЛІНОМИ ДРУГОГО РОДУ У ДВОВИМІРНІЙ ПРОБЛЕМІ МОМЕНТІВ

Background. The properties of block Jacobi matrices corresponding two-dimensional moment problem are studied here. We introduce polynomials of the second kind similar to the corresponding polynomials of the second kind corresponding classical Hamburger moment problem. In a previous publication we orthogonalize two-index family polynomial $x^n, y^m, n, m \in \mathrm{N}_0$ with respect to the measure on the real plane. The resulting polynomials $P_{n,\alpha}(x, y), \alpha = 0, 1, \ldots, n$ are the analogues polynomials of the first kind. The same polynomials are solutions of the system of difference equations $J_A P(x, y) = xP(x, y), J_B P(x, y) = yP(x, y)$ generated by symmetric block Jacobi matrices J_A and J_B, corresponding operators are commute in the strong resolvent sense. Solutions exist for a given initial condition, i.e., first polynomial is supposed constant for certainty equal unit $P_{0;0}(x, y) = 1$. Our investigations consist of the fact to confirm or refute the hypothesis that the second kind polynomial Q is also satisfy the same system but with another initial condition – first polynomial is constant equal zero $Q_{0;0}(x, y) = 0$. Polynomials of the second kind in the classical case are defined by a certain functional.

Objective. The purpose of the study is to find functional that would define polynomials of the second kind, using given by polynomials of the first kind. Thus obtained polynomials of the second kind must also satisfy the system of difference equations.

Methods. Getting results are contributed to numerous examples of consideration, partial eases. Next verified.

Results. The result of research is suggested in this functional analogue of the two-dimensional case:

$$Q_n(z_1, z_2) = \iint\limits_{R^2} \frac{P_n(\lambda, \mu) - P_n(\lambda, z_2) - P_n(z_1, \mu) + P_n(z_1, z_2)}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} d\rho(\lambda, \mu),$$

where $Q_n(z_1, z_2) = (Q_{n;0}(z_1, z_2), Q_{n;1}(z_1, z_2), \ldots, Q_{n;n}(z_1, z_2)), z_1, z_2 \in C \setminus R, n \in N_0$.

Conclusions. This paper introduced polynomials of the second kind related to real two-dimensional moment problem. It is shown that these polynomials satisfy a system of difference equations generated by block Jacobi matrices type. For polynomials of the first kind the convergence of the series is studied based on the certainty or uncertainty investigated problem points.

Keywords: two-dimensional moment problem; block Jacobi type matrix; two-dimensional polynomials of the first and second kind.

Вступ

Починаючи з XIX ст. предметом вивчення стала проблема моментів, зокрема Гамбургера, а згодом і Стілтьєса. Необхідність розв’язання цієї задачі була зумовлена складними технічними потребами, але при цьому виникло широке коло математичних проблем. Зручним інструментом при дослідженні проблеми є матриці Якобі та породжені відповідними операторами поліноми першого та другого роду.

Найбільш помітні і вагомі результати з цього кола питань належать М.Г. Крейну, Н.І. Ахієзеру, Ю.М. Березанському [1–3]. Зокрема, істотним внеском стала теорія Ю.М. Березанського про розклад за узагальненими власними векторами [4–6].

На сьогодні відомі численні узагальнення названих об’єктів, пов’язаних із одновимірною дійсною проблемою моментів на випадок тригонометричної, комплексної, багатовимірної та нескінченновимірної проблем моментів. Проте для комплексної та багатовимірної проблем записані тільки відповідні блочні матриці Якобі і поліноми першого роду, а поліноми другого роду не розглядались.

Постановка задачі

Дослідження проблеми моментів Гамбургера або міри на дійсній вісі (у якої існують всі моменти) логічно приводять до матриць Якобі. У попередніх дослідженнях [7, 8] подано розв’язок прямої та оберненої спектральних задач для блочних матриць типу Якобі, відповідних дійсній двовимірній проблемі моментів. При розгляді прямої задачі розв’язується система різницевих рівнянь, породжених блочними матрицями типу Якобі. Розв’язками її є поліноми першого роду. Завданням цієї роботи є побудова поліномів другого роду, які є аналогами до поліномів другого роду у випадку класичної проблеми моментів Гамбургера.

Попередні відомості

Розглянемо простір

$$\begin{gathered} l_2 = H_0 \oplus H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots,\ H_n = C^{n+1},\ n \in N_0, \\ l_2 \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty},\ \sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \|_{H_n}^2 < \infty. \end{gathered} \qquad (1)$$

Кожний вектор x_n простору $H_n = C^{n+1}$ має вигляд $x_n = (x_{n;0}, \ldots, x_{n;n})$. Для кожного $\alpha \in \{0, \ldots, n\}$ числа $x_{n;\alpha}$ є координатами при базисних векторах $\delta_{n;\alpha} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in H_n \in l_2$ (тут одиниця розміщена на α-му місці), $\delta_0 = (1)$. Матриці Якобі, відповідні двовимірній дійсній проблемі моментів, мають такий вигляд [8]:

$$J_A = \begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_0 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_1 & b_2 & c_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad (2)$$

$$\begin{aligned} & a_n : H_n \to H_{n+1}, \\ & b_n : H_n \to H_n, \\ & c_n : H_{n+1} \to H_n, n \in N_0; \end{aligned}$$

$$J_B = \begin{bmatrix} w_0 & v_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ u_0 & w_1 & v_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_1 & w_2 & v_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

$$\begin{aligned} & u_n : H_n \to H_{n+1}, \\ & w_n : H_n \to H_n, \\ & v_n : H_{n+1} \to H_n, n \in N_0. \end{aligned}$$

Матриці (2) і (3) породжують на фінітних векторах $l_{\text{fin}} \subset l_2$ оператори:

$$\begin{aligned} & l_2 \supset l_{\text{fin}} \ni f \to J_A f = ((J_A f)_n)_{n=0}^{\infty} \subset l_2, \\ & (J_A f)_n = a_{n-1} f_{n-1} + b_n f_n + c_n f_{n+1}; \\ & l_2 \supset l_{\text{fin}} \ni f \to J_B f = ((J_B f)_n)_{n=0}^{\infty} \subset l_2, \\ & (J_B f)_n = u_{n-1} f_{n-1} + w_n f_n + v_n f_{n+1}, \end{aligned} \qquad (4)$$

де для зручності вважається $f_{-1} := 0$. Без втрати загальності матриці J_A, J_B і породжені ними оператори позначимо також J_A і J_B.

Як відомо з [8], матриці (2) і (3) мають внутрішню структуру. Так, a_n і c_n мають такий вигляд із умовами на коефіцієнти:

$$a_n = \left[\underbrace{\begin{matrix} a_{n;0,0} & * & * & \cdots & * \\ a_{n;1,0} & * & * & \cdots & * \\ 0 & a_{n;2,1} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n;n+1,n} \end{matrix}}_{n+1} \right] \Bigg\} n+2, \qquad (5)$$

$$c_n = \left[\underbrace{\begin{matrix} c_{n;0,0} & c_{n;0,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & c_{n;1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & c_{n;n-1,n} & 0 \\ * & * & * & \cdots & * & c_{n;n,n+1} \end{matrix}}_{n+2} \right] \Bigg\} n+1,$$

$$a_{n;0,0}, a_{n;1,1}, \ldots, a_{n;n,n} > 0,\ c_{n;0,0}, c_{n;1,1}, \ldots, c_{n;n,n} > 0,$$
$$n \in N_0;$$

$$u_n = \left[\underbrace{\begin{matrix} u_{n;0,0} & * & * & \cdots & * \\ 0 & u_{n;1,1} & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n;n,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{matrix}}_{n+1} \right] \Bigg\} n+2, \qquad (6)$$

$$v_n = \left.\left[\underbrace{\begin{matrix} v_{n;0,0} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ * & v_{n;1,1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & \cdots & v_{n;n-1,n-1} & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & * & v_{n;n,n} & 0 \end{matrix}}_{n+2}\right]\right\}n+1,$$

$$u_{n;0,0}, u_{n;1,1}, \dots, u_{n;n,n} > 0, \; v_{n;0,0}, v_{n;1,1}, \dots, v_{n;n,n} > 0,$$

$$n \in N_0.$$

У (2) і (3) b_n і w_n – симетричні $(n+1)\times(n+1)$-матриці, $n \in N_0$. Оскільки мова йде про симетрію, то $a_{n;\alpha,\beta} = c_{n;\beta,\alpha}$, $\alpha = 1,2,\dots,n$, $\beta = 1,2,\dots,n$, $n \in N$ і $u_{n;\alpha,\beta} = v_{n;\beta,\alpha}$, $\beta = 0,1,2,\dots,n$, $\alpha = 0,1,\dots,\beta,\beta+1$, $n \in N$.

За додаткових умов на a_n, b_n, c_n і u_n, w_n, v_n, $n \in N_0$ (див. розділ 6 [8]) матриці J_A і J_B комутують: $J_A J_B = J_B J_A$ на фінітних векторах $l_{\text{fin}} \subset l_2$. Для подальших досліджень припускається, що оператори J_A і J_B самоспряжені після замикання і комутують у строгому резольвентному сенсі.

У нашому двовимірному випадку узагальнені власні вектори $P(x,y) = P_n(x,y)_{n=0}^{\infty}$, де $\forall (x,y) \in R^2$, $P_n(x,y) \in H_n$ – векторнозначний поліном змінних *x* і *y* порядку *n*. Тобто

$$P_n(x,y) = (\overline{P_{n;0}(x,y)}, \overline{P_{n;1}(x,y)}, \dots, \overline{P_{n;n}(x,y)}), \quad (7)$$

де $P_{n,\alpha}$ – лінійна комбінація елементів

$$x^0y^0;\; x^1y^0, x^0y^1;\; x^2y^0, x^1y^1, x^0y^2;\; \dots;$$

$$x^ny^0, x^{n-1}y^1, \dots, x^{n-\alpha}y^{\alpha}, \dots,$$

з $\alpha = 0,\dots,n$.

Поліноми (7) є розв'язками системи двох різницевих рівнянь:

$$J_A P(x,y) = xP(x,y), \; J_B P(x,y) = yP(x,y). \quad (8)$$

Тут ми маємо два рівняння, на відміну від одного у випадку класичної проблеми моментів Гамбургера. Так, умови (5) і (6) забезпечують розв'язність системи (8).

Як у класичному випадку, для побудови $P_n(x,y)$ потрібно провести процедуру ортогоналізації за Шмідтом x^ny^m, $m,n \in N_0$, у просторі $L_2 = L_2(R^2, d\rho(x,y)) := L_2$ комплекснозначних функцій, інтегрованих із квадратом, визначених на R^2 відносно міри Бореля $d\rho(x,y)$.

Припускається, що функції

$$R^2 \ni (x,y) \mapsto x^my^n, \; m,n \in N_0, \quad (9)$$

є лінійно незалежними і утворюють щільну множину в L_2. Якщо використаємо порядок [9]

$$x^0y^0;\; x^1y^0, x^0y^1;\; x^2y^0, x^1y^1, x^0y^2;\; \dots;$$

$$x^ny^0, x^{n-1}y^1, \dots, x^0y^n;\; \dots, \quad (10)$$

то в результаті отримаємо систему поліномів

$$\begin{array}{llll} P_{0,0}(x,y); & P_{1,0}(x,y), & P_{2,0}(x,y), \cdots; & P_{n,0}(x,y),\dots \\ & P_{1,1}(x,y); & P_{2,1}(x,y), & P_{n,1}(x,y), \\ & & P_{2,2}(x,y); & P_{n,1}(x,y), \quad (11) \\ & & & \dots \\ & & & P_{n,n}(x,y), \end{array}$$

де кожний поліном має вигляд

$$P_{n,\alpha}(x,y) = k_{n,\alpha}x^{n-\alpha}y^{\alpha} + \dots, \; n \in N_0,$$

$$\alpha = 0,1,\dots,n, \; k_{n;\alpha} > 0. \quad (12)$$

Тут $+\dots$ означає наступну частину відповідного полінома; для визначеності покладається $P_{0;0}(x,y) := 1$. Отже, $P_{n;\alpha}(x,y)$ є лінійною комбінацією:

$$\{1; x^1y^0, x^0y^1; \dots; x^ny^0, x^{n-1}y^1, \dots, x^{n-\alpha}y^{\alpha}\}. \quad (13)$$

За визначенням кожен стовпець у (11) є вектором $P_n(x,y)$, який є розв'язком (8).

Основна властивість поліномів першого роду

Отже, ми розглядаємо симетричні матриці J_A, J_B вигляду (2), (3) із умовами (5), (6). Припускається, що матриці J_A і J_B комутують: $J_A J_B f = J_B J_A f$, $f \in l_{\text{fin}}$. Покладемо $J = J_A^2 + J_B^2$. Оператор J і відповідна матриця також ермітові. Для цього оператора сформулюємо такий простий результат.

Твердження 1. Індекси дефекту оператора J є або $(0,0)$, або $(1,1)$. Нехай $x, y \in R$ і $P(x,y) = (P_n(x,y))_{n=0}^{\infty}$, $P_0(x,y) = 1$, $P_n(x,y) \in R^2$, $n \in N$, є розв'язками системи різницевих рівнянь $J_A P(x,y) = xP(x,y)$, $J_B P(x,y) = yP(x,y)$, $n \in N_0$, тобто

$$\begin{aligned} &a_{n-1}P_{n-1}(x,y) + b_n P_n(x,y) + c_n P_{n+1}(x,y) = \\ &\qquad = xP_n(x,y), \\ &u_{n-1}P_{n-1}(x,y) + w_n P_n(x,y) + v_n P_{n+1}(x,y) = \\ &\qquad = yP_n(x,y), \end{aligned} \tag{14}$$

де для зручності вважається $P_{-1}(x,y) = 0$. Позначимо $z = x^2 + y^2$. Тоді $\tilde{P}(z) = (\tilde{P}_n(z))_{n=0}^{\infty}$, $\tilde{P}_0(z) = 1$, $\tilde{P}_n(z) \in R^2$, $n \in N$, є розв'язком різницевого рівняння $J\tilde{P}(z) = z(P(z))$, $n \in N_0$, тобто

$$p_{n-1}\tilde{P}_{n-1}(z) + q_n \tilde{P}_n(z) + r_n \tilde{P}_{n+1}(z) = z\tilde{P}_n(z), \tag{15}$$

де $\tilde{P}_{-1}(z) = 0$.

Розглянемо ряди

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| P_n(x,y) \|_{H_n}^2 \tag{16}$$

і

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| \tilde{P}_n(z) \|_{H_n}^2 . \tag{17}$$

Якщо ряд (17) розбігається для деякого $z \in C \backslash R$, то він розбігається і для всіх $z \in C \backslash R$; індекси дефекту J – $(0,0)$; розбігається ряд (16); J_A та J_B – самоспряжені після замикання і комутуючі у строгому резольвентному сенсі.

Якщо ряд (16) збігається для деяких x, y (а отже, і для всіх x, y), то ряд (17) також збігається; індекси дефекту J – $(1,1)$; J_A та J_B комутують лише на щільній множині.

Доведення в цілому засноване на тому, що множина (17) є підмножиною (16).

Поліноми другого роду

Подані в (14) поліноми першого роду є аналогом класичних поліномів першого роду у звичайній теорії якобієвих матриць. У нашому двовимірному випадку також можливо представити аналог поліномів другого роду. Покладемо

$$\begin{aligned} &Q_n(z_1, z_2) = \\ &= \iint_{R^2} \left(\frac{P_n(\lambda,\mu) - P_n(\lambda, z_2) - P_n(z_1,\mu)}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{P_n(z_1, z_2)}{(\lambda - z_1)(\mu - z_2)} \right) d\rho(\lambda,\mu), \end{aligned} \tag{18}$$

де $z_1, z_2 \in C \backslash R$, $n \in N_0$, і $d\rho(\lambda,\mu)$ – спектральна міра деякого самоспряженого розширення оператора J (якщо він був ермітів) у просторі l_2; тобто спектральна міра деякої фіксованої пари самоспряжених комутуючих у строгому резольвентному сенсі розширень операторів J_A і J_B (якщо вони були ермітовими); або оператора J, якщо він істотно самоспряжений, тобто оператори J_A і J_B є істотно самоспряженими і комутуючими у строгому резольвентному сенсі.

Теорема 1. Послідовність $Q(z) = (Q_n(z_1, z_2))_{n=0}^{\infty}$, $z_1, z_2 \in C \backslash R$, де $Q_n(z_1, z_2)$ задані формулою (18), є розв'язком системи різницевих рівнянь $n \in N$, $z_1, z_2 \in C$,

$$\begin{aligned} &a_{n-1}Q_{n-1}(z_1,z_2) + b_n Q_n(z_1,z_2) + c_n Q_{n+1}(z_1,z_2) = \\ &\qquad = z_1 Q_n(z_1,z_2), \\ &u_{n-1}Q_{n-1}(z_1,z_2) + w_n Q_n(z_1,z_2) + v_n Q_{n+1}(z_1,z_2) = \\ &\qquad = z_2 Q_n(z_1,z_2) \end{aligned} \tag{19}$$

із початковою умовою

$$Q_{0;0}(z_1, z_2) = 0, \tag{20}$$

і, отже, $Q_{n;0}(z_1,z_2) = Q_{n;0}(z_1,z_2) = 0$, $n \in N$.

Доведення спирається на безпосередню підстановку (18) у (19).

Висновки

У роботі введені поліноми другого роду, що стосуються двовимірної дійсної проблеми моментів. Показано, що введені поліноми задовольняють систему різницевих рівнянь, породжену блочними матрицями типу Якобі, відповідними тій самій двовимірній проблемі моментів.

Для поліномів першого роду досліджено збіжність їх рядів залежно від визначеності або невизначеності досліджуваної проблеми моментів.

У подальшому відкривається можливість дослідження властивостей введених нових об'єктів та порівняння їх з аналогічними одновимірними. Зокрема, отримані результати будуть застосовані для з'ясування питання детермінованості і недетермінованості двовимірної проблеми моментів за коефіцієнтами матриць J_A і J_B , як це відомо у випадку класичної проблеми моментів Гамбургера, для апроксимацій Паде та іншого.

Список літератури

1. *Крейн М.Г.* Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения // ДАН СССР. – 1946. – **53**, № 1. – С. 3–6.
2. *Крейн М.Г.* Про ермітові оператори з напрямними функціоналами // Зб. наук. пр. Ін-ту матем. АН УРСР. – 1948. – № 10. – С. 83–106.
3. *Akhiezer N.I.* The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis. New York: Hafner, 1965 (Russian original, 1961).
4. *Березанский Ю.М.* Разложение по собственным функциям уравнений в частных разностях второго порядка // Тр. Моск. мат. общ-ва. – 1956. – **5**. – С. 203–268.
5. Berezanskii Ju.M., Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators // Translations of Mathematical Monographs Vol. 17. – Providence, R.I.: Am. Math. Soc., 1968. – 809 p.
6. *Berezansky Yu.M., Kondratiev Yu.G.* Spectral Methods in Infnite-Dimensional Analysis. Vols. 1, 2. – Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1995.
7. *Козак В.І.* Обернена спектральна задача для блочних матриць типу Якобі, відповідних дійсній двовимірній проблемі моментів // Наукові вісті НТУУ КПІ. – 2013. – № 4. – С. 10–15.
8. *Dudkin M.E., Kozak V.I.* Direct and inverse spectral problems for block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional real moment problem // Methods Funct. Anal. Topology. – 2014. – **20**, № 3. – P. 219–251.
9. *Суетин П.К.* Ортогональные многочлены по двум переменным. – М.: Наука, 1988. – 384 с.

References

1. M.G. Krein, "On the general method of decomposition of positive defined kernels on elementary products", *Dokl. Acad. Nauk SSSR*, vol. 53, no. 1, pp. 3–6, 1946 (in Russian).
2. M.G. Krein, "On Hermitian operators with directing functionals", *Zbirnyk Prac' Inst. Mat. AN USSR*, no. 10, pp. 83–106, 1948 (in Ukrainian).
3. N.I. Akhiezer, *The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis.* New York: Hafner, 1965 (Russian original, 1961).
4. Yu.M. Berezansky, "The expansions in eigenfunctions of partial difference equations of order two", *Trudy Moskov. Mat. Obshch.*, vol. 5, pp. 203–268, 1956 (in Russian).
5. Ju.M. Berezanskii, *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators* (Translations of Mathematical Monographs Vol. 17), Providence, R.I.: Am. Math. Soc., 1968, 809 p.
6. Yu.M. Berezansky and Yu.G. Kondratiev, *Spectral Methods in Infnite-Dimensional Analysis*, vols. 1, 2. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1995.
7. V.I. Kozak, "Inverse spectral problem for block Jacobi type matrices corresponding real two dimensional moment problem", *Naukovi Visti NTUU KPI*, no. 4, pp. 10–15, 2013 (in Ukrainian).
8. M.E. Dudkin and V.I. Kozak, "Direct and inverse spectral problems for block Jacobi type bounded symmetric matrices related to the two dimensional real moment problem", *Methods Funct. Anal. Topology*, vol. 20, no. 3, pp. 219–251, 2014.
9. P.K. Suetin, *Orthogonal Polynomials on Two Variables.* Moscow, Russia: Nauka, 1988, 384 p. (in Russian).

М.Є. Дудкін, В.І. Козак

ПОЛІНОМИ ДРУГОГО РОДУ У ДВОВИМІРНІЙ ПРОБЛЕМІ МОМЕНТІВ

Проблематика. Вивчаються властивості блочних матриць Якобі, відповідних двовимірній проблемі моментів. Уведено поліноми другого роду, аналогічні до поліномів другого роду, відповідних класичній проблемі моментів Гамбургера. У попередній публікації ортогоналізується двохіндексна сім'я поліномів $x^n, y^m, n, m \in \mathbb{N}_0$, відносно міри на дійсній площині.

Отримані поліноми $P_{n,\alpha}(x,y)$, $\alpha=0,1,\ldots,n$, є аналогами поліномів першого роду. Ці ж самі поліноми є розв'язками системи різницевих рівнянь $J_A P(x,y)=xP(x,y), J_B P(x,y)=yP(x,y)$, породжених симетричними блочними матрицями Якобі J_A і J_B, відповідні оператори яких комутують у строгому резольвентному сенсі. Розв'язки існують за заданих початкових умов, тобто перший поліном є константою для визначеності, що покладена за одиницю: $P_{0;0}(x,y)=1$. Дослідження полягають у підтвердженні чи спростуванні гіпотези про те, що поліноми другого роду $Q_{n;\alpha}(x,y)$ також задовольняють цю саму систему, але з іншою початковою умовою – перший поліном є константою, рівною нулю: $Q_{0;0}(x,y)=0$. Поліноми другого роду в класичному випадку визначаються за допомогою певного функціонала.

Мета дослідження. Метою роботи є знаходження функціонала, який би визначав поліноми другого роду за заданими поліномами першого роду. При цьому отримувані поліноми другого роду також повинні задовольняти систему різницевих рівнянь.

Методика реалізації. Отриманню результату сприяв розгляд численної кількості прикладів, частинних випадків. Далі виконано перевірку.

Результат досліджень. У роботі запропоновано аналог такого функціонала у двовимірному випадку:

$$Q_n(z_1,z_2)=\iint\limits_{R^2}\frac{P_n(\lambda,\mu)-P_n(\lambda,z_2)-P_n(z_1,\mu)+P_n(z_1,z_2)}{(\lambda-z_1)(\mu-z_2)}d\rho(\lambda,\mu),$$

де $Q_n(z_1,z_2)=(Q_{n;0}(z_1,z_2),Q_{n;1}(z_1,z_2),\ldots,Q_{n;n}(z_1,z_2)),\ z_1,z_2\in C\setminus R,\ n\in N_0$.

Висновки. В роботі введено поліноми другого роду, що стосуються двовимірної дійсної проблеми моментів. Показано, що ці поліноми задовольняють систему різницевих рівнянь, породжену блочними матрицями типу Якобі. Для поліномів першого роду досліджено збіжність їх рядів залежно від визначеності або невизначеності досліджуваної проблеми моментів.

Ключові слова: двовимірна проблема моментів; блочні матриці типу Якобі; двовимірні поліноми першого та другого роду.

Н.Е. Дудкин, В.И. Козак

ПОЛИНОМЫ ВТОРОГО РОДА В ДВУМЕРНОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ

Проблематика. Изучаются свойства блочных матриц Якоби, соответствующих двумерной проблеме моментов. Введены полиномы второго рода, аналогичные полиномам второго рода, соответствующим классической проблеме моментов Гамбургера. В предыдущей публикации ортогонализируется двухиндексная семья полиномов $x^n, y^m, n,m\in \mathrm{N}_0$, относительно меры на действительной плоскости. Полученные полиномы $P_{n,\alpha}(x,y)$, $\alpha=0,1,\ldots,n$, являются аналогами полиномов первого рода. Эти же самые полиномы являются решением системы разностных уравнений $J_A P(x,y)=xP(x,y), J_B P(x,y)=yP(x,y)$, порожденных симметричными блочными матрицами Якоби J_A и J_B, соответствующие операторы которых коммутируют в строгом резольвентном смысле. Решения существуют при заданных начальных условиях, то есть первый полином является константой для определенности, взятой за единицу: $P_{0;0}(x,y)=1$. Исследования заключаются в подтверждении или опровержении гипотезы о том, что полиномы второго рода $Q_{n;\alpha}(x,y)$ также удовлетворяют ту же самую систему, но с другим начальным условием – первый полином является константой и равен нулю: $Q_{0;0}(x,y)=0$. Полиномы второго рода в классическом случае определяются при помощи некоторого функционала.

Цель исследования. Цель работы заключаются в нахождении функционала, который определял бы полиномы второго рода по заданным полиномам первого рода. При этом получаемые полиномы второго рода также должны удовлетворять системе разностных уравнений.

Методика реализации. Получению результата способствовало рассмотрение большого числа примеров и частных случаев. Далее проведена проверка.

Результаты исследования. В работе предложен аналог такого функционала в двумерном случае:

$$Q_n(z_1,z_2)=\iint\limits_{R^2}\frac{P_n(\lambda,\mu)-P_n(\lambda,z_2)-P_n(z_1,\mu)+P_n(z_1,z_2)}{(\lambda-z_1)(\mu-z_2)}d\rho(\lambda,\mu),$$

где $Q_n(z_1,z_2)=(Q_{n;0}(z_1,z_2),Q_{n;1}(z_1,z_2),\ldots,Q_{n;n}(z_1,z_2)),\ z_1,z_2\in C\setminus R,\ n\in N_0$.

Выводы. В работе введены полиномы второго рода, относящиеся к двумерной действительной проблеме моментов. Показано, что эти полиномы удовлетворяют системе разностных уравнений, порожденной блочными матрицами типа Якоби. Для полиномов первого рода исследована сходимость их рядов в зависимости от определенности или неопределенности исследуемой проблемы моментов.

Ключевые слова: двумерная проблема моментов; блочные матрицы типа Якоби; двумерные полиномы первого и второго рода.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
27 січня 2015 року