УДК 517.18
DOI: 10.20535/1810-0546.2016.4.70997

В.В. Павленков
Національний технічний університет України “КПІ”, Київ, Україна

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ УНІТАРНИХ МАТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Background. The limit behavior at infinity of unitary matrix functions of real argument and arbitrary finite dimension is considered. The question of regular variation in Karamata sense of these functions is studied.
Objective. The main aim of this work is to find the conditions under which not regularly varying unitary matrix function of real argument can be regularized by variable substitution.
Methods. It is shown in the paper that substitution $t \to \log t$ converts two-dimensional unitary matrix function into a power function with known matrix degree. This property is the base of all main result’s proofs.
Results. The conditions under which the unitary matrix function of arbitrary finite dimension can be regularized are obtained.
Conclusions. A significant difference between the matrix functions of dimension lower than 4 and the matrix functions of higher dimension is established. The constructed example of unitary matrix function of 4-dimension that can’t be regularized by substitution $t \to \log t$ shows this difference.

Keywords: regularly varying function; matrix function; linear operator.

Вступ

Термін *правильно змінна* (RV) функція був запропонований Й. Караматою у 1930 р. [1]. Починаючи з того часу теорія правильно змінних функцій отримала цілу низки застосувань, серед яких одними з головних є застосування в теорії ймовірностей. На сьогодні відомо багато узагальнень класу правильно змінних функцій [2, 3].

У монографії [4] розглядається клас псевдорегулярних функцій та за допомогою властивостей таких функцій досліджуються узагальнені процеси відновлення. Зауважимо, що клас псевдорегулярних функцій тісно пов’язаний із класом правильно змінних функцій.

У статтях [5, 6] узагальнюється теорема Карамати про асимптотичну поведінку інтегралів від регулярно log-періодичних функцій. Такі функції є прикладами функцій з невиродженими групами регулярних точок. У роботі [7] встановлені властивості комплекснозначних функцій з невиродженими групами регулярних точок.

У монографії [8] розглядається поняття матричної правильно змінної функції та встановлюються властивості таких функцій. На основі отриманих результатів досліджуються граничні властивості сум незалежних випадкових векторів.

Постановка задачі

Основною метою роботи є встановлення умов, за яких унітарну матричну функцію можна зробити правильно змінною, тобто регуляризувати, за допомогою заміни її аргументу. Зауважимо, що у [8] містяться приклади розв’язання такої задачі в двовимірному випадку. В цій роботі будуть розглядатися унітарні матричні функції довільної скінченної розмірності.

Основні означення

Нехай $\mathbb{R}_+$ — множина додатних дійсних чисел, $GL(\mathbb{R}^d)$ — простір невироджених квадратних матриць розміру $d \times d$.

Означення **1.** Під λ^Q ми надалі розумітимемо вираз $e^{(\log \lambda)Q}$, де

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!},$$

та X — квадратна матриця розміру $d \times d$.

Означення **2.** Під границею матриці ми розуміємо матрицю з границь її елементів.

Означення **3.** Нехай функція $f: \mathbb{R}_+ \to GL(\mathbb{R}^d)$ є вимірною, Q — квадратна матриця розміру $d \times d$. Функцію f називають *правильно змінною на нескінченності функцією* з показником Q, якщо

$$\lim_{t\to\infty} f(\lambda t) f(t)^{-1} = \lambda^Q$$

для всіх $\lambda > 0$.

Приклад **1.** Нехай A — квадратна матриця розміру $d \times d$. Тоді функція $f(t) = t^A$, $t > 0$, є правильно змінною на нескінченності функцією з показником A.

Покажемо це. Дійсно,

$$\lim_{t\to\infty} f(\lambda t) f(t)^{-1} = \lim_{t\to\infty} (\lambda t)^A t^{-A} = \lim_{t\to\infty} \lambda^A = \lambda^A.$$

Наступний приклад розглядався в [8].

***Приклад* 2.** Нехай для $t > 0$

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Покажемо, що функція $U(t)$ не є правильно змінною функцією на нескінченності. Для цього запишемо вираз

$$U(\lambda t)U(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\lambda t & -\sin\lambda t \\ \sin\lambda t & \cos\lambda t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\lambda-1)t & -\sin(\lambda-1)t \\ \sin(\lambda-1)t & \cos(\lambda-1)t \end{pmatrix}.$$

Отримана матрична функція не має границі при $t \to \infty$, отже, функція $U(t)$ не є правильно змінною функцією на нескінченності.

Проте функція $U(\log t)$ є правильно змінною функцією на нескінченності з показником

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

більше того, $U(\log t) = t^Q$. Покажемо це. Дійсно,

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$Q^3 = Q^2 \cdot Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q^4 = Q^3 \cdot Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q^5 = Q^4 \cdot Q = Q, \ldots$$

Покладемо $x = \log t$. Тоді

$$t^Q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\log t)^n}{n!} Q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} Q^n =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{x}{1!}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{x^2}{2!}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{x^3}{3!}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{x^4}{4!}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \ldots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots & -\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) \\ \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\log t) & -\sin(\log t) \\ \sin(\log t) & \cos(\log t) \end{pmatrix} = U(\log t).$$

Використаємо результат прикладу 1. Отримаємо, що функція $U(\log t) = t^Q$ є правильно змінною на нескінченності функцією з показником Q.

Регуляризація двовимірних унітарних матричних функцій

Позначимо $U(\mathbb{R}^d)$ — простір унітарних матриць розміру $d \times d$.

Відомо, що якщо $A \in U(\mathbb{R}^2)$, то

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$\alpha \geq 0$ — фіксоване число.

Нехай задана функція $f : \mathbb{R}_+ \to U(\mathbb{R}^2)$. Будемо називати таку функцію двовимірною унітарною матричною функцією. Двовимірна унітарна матрична функція f завжди має вигляд

$$f(t) = U(\varphi(t)),$$

де

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},\ \varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+.$$

Приклад 2 показує, що якщо $\varphi(t) = \log t$, то функція f є правильно змінною на нескінченності функцією. Також, якщо $\varphi(t) = t$, то функція f не є правильно змінною на нескінченності функцією. Проте підстановкою $t = \log s$ її можна регуляризувати, і отримана функція $U(\log s)$ буде правильно змінною на нескінченності. Наведена далі теорема встановлює умови, за яких двовимірну унітарну матричну функцію можна регуляризувати.

Теорема 1. Нехай $f : \mathbb{R}_+ \to U(\mathbb{R}^2)$ — унітарна двовимірна матрична функція та справедливе представлення

$$f(t) = U(\varphi(t)),\ t > 0.$$

Якщо функція φ диференційована на $\mathbb{R}_+$, $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$ та $\exists t_0 > 0 : \varphi'(t) > 0, t \geq t_0$, то $\exists \psi(t) :$ $: \lim_{t\to\infty} \psi(t) = \infty$ і $f(\psi(t))$ є правильно змінною на нескінченності функцією.

Доведення теореми 1. Оскільки $\exists t_0 > 0 : \varphi'(t) > 0, t \geq t_0$, то для $t \geq t_0$ у функції φ існує обернена функція φ^{-1}. Покладемо

$$\psi(t) = \begin{cases} t_0, \ t \in (0, \exp\{\varphi(t_0)\}), \\ \varphi^{-1}(\log t), \ t \in [\exp\{\varphi(t_0)\}, \infty). \end{cases}$$

Зауважимо, що за умовами теореми $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$, тому $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = \infty$. Обчислимо

$$f(\psi(t)) = U(\varphi(\varphi^{-1}(\log t)) = U(\log t) = t^Q,$$
$$t \in [\exp\{\varphi(t_0)\}, \infty),$$

де матриця Q визначена в прикладі 2. Тут ми скористалися результатом прикладу 2. Тому функція $f(\psi(t))$ є правильно змінною на нескінченності функцією. Теорему доведено.

Зауважимо, що в двовимірному випадку за достатньо загальних умов унітарні матричні функції можна регуляризувати заміною їх аргументу.

Регуляризація тривимірних унітарних матричних функцій

У попередньому пункті було показано, що двовимірні унітарні матричні функції можна регуляризувати таким чином, щоб вони стали правильно змінними на нескінченності. Це вдається зробити для достатньо великого класу двовимірних унітарних функцій. У цьому пункті розглядаються умови, за яких можна провести регуляризацію для тривимірних унітарних функцій.

Тут і всюди надалі будемо користуватися добре відомим твердженням з теорії матриць (див., наприклад, [9]).

Лема 1. Нехай $A \in U(\mathbb{R}^d)$. Тоді всі власні числа матриці A за модулем рівні 1, а сама матриця A унітарно подібна матриці

$$D = \operatorname{diag}\{U(\alpha_1), ..., U(\alpha_k), 1, ..., 1, -1, ..., -1\},$$
$$\alpha_1 \geq 0, ..., \alpha_k \geq 0, k \leq \left[\frac{d}{2}\right],$$

тобто

$$A = TDT^{-1}, T \in U(\mathbb{R}^d).$$

D – це блочна діагональна матриця, на головній діагоналі якої стоять елементи, вказані у фігурних дужках. Кожний блок матриці D відповідає власному числу матриці A; блок $U(\alpha_k)$ відповідає парі комплексно спряжених власних чисел $\cos\alpha_k \pm i \sin\alpha_k$.

З леми 1 зрозуміло, що тривимірна унітарна матриця завжди має дійсне власне число за модулем, рівне 1. Якщо два інших її власних числа комплексно спряжені, то в унітарно подібній діагональній матриці міститиметься блок $U(\alpha)$. Також зрозуміло, що тривимірна унітарна матриця не може мати два блоки.

Розглянемо тривимірну унітарну матричну функцію вигляду

$$f(t) = T \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) & 0 \\ \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}, \ t > 0.$$

Має місце теорема.

Теорема 2. Нехай $f : \mathbb{R}^+ \to U(\mathbb{R}^3)$ – унітарна тривимірна матрична функція вигляду

$$f(t) = T \begin{pmatrix} \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) & 0 \\ \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1}, \ t > 0.$$

Якщо функція φ – диференційована на $\mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$ та $\exists t_0 > 0 : \varphi'(t) > 0, t \geq t_0$, то $\exists \psi(t) : \lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = \infty$ і $f(\psi(t))$ є правильно змінною на нескінченності функцією.

Доведення теореми 2. Функція φ має такі самі властивості, як і в теоремі 1. Тому покладемо

$$\psi(t) = \begin{cases} t_0, \ t \in (0, \exp\{\varphi(t_0)\}), \\ \varphi^{-1}(\log t), \ t \in [\exp\{\varphi(t_0)\}, \infty). \end{cases}$$

Тому $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = \infty$. Зауважимо, що

$$f(\psi(t)) =$$

$$= T \begin{pmatrix} \cos\varphi(\varphi^{-1}(\log t)) & -\sin\varphi(\varphi^{-1}(\log t)) & 0 \\ \sin\varphi(\varphi^{-1}(\log t)) & \cos\varphi(\varphi^{-1}(\log t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1} =$$

$$= T \begin{pmatrix} U(\log t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1} = T \begin{pmatrix} t^{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} T^{-1} =$$

$$= Tt^{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} T^{-1} = t^{T\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1}}, \ t \in [\exp\{\varphi(t_0)\}, \infty).$$

Тут ми скористалися результатом прикладу 2 та властивостями матричних степеневих виразів. Тому функція $f(\psi(t))$ є правильно змінною на нескінченності функцією з показником

$$T\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}T^{-1}.$$

Теорему 2 доведено.

Зауваження **1.** У теоремі 2 розглядається тривимірна унітарна матрична функція, у якої значення є тривимірними матрицями з власними числами $\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$. Аналогічним чином можна розглядати інші тривимірні унітарні матричні функції.

Регуляризація *d*-вимірних унітарних матричних функцій

У попередніх пунктах встановлені умови, за яких можна регуляризувати унітарні матричні функції розмірностей 2 і 3. У цьому пункті розглядається загальна d-вимірна ситуація.

Будемо розглядати d-вимірні унітарні матричні функції вигляду

$$f(t) = T\cdot \operatorname{diag}\{U(\varphi_1(t)),\dots,U(\varphi_k(t)),1,\dots,1,-1,\dots,-1\}\cdot T^{-1},$$
$$t>0.$$

Має місце теорема.

Теорема 3. Нехай $f:\mathbb{R}^+ \to U(\mathbb{R}^3)$ – унітарна d-вимірна матрична функція вигляду

$$f(t) = T\cdot \operatorname{diag}\{U(\varphi_1(t)),\dots,U(\varphi_k(t)),1,\dots,1,-1,\dots,-1\}\cdot T^{-1},$$
$$t>0.$$

Якщо

(1) функція φ_1 – диференційована на R^+, $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi_1(t)=\infty$ та $\exists t_0>0:\varphi_1'(t)>0, t\ge t_0$;

(2) $\varphi_i(t) = a_i\varphi_1(t)+b_i,\ i=2,3,\dots,k$, де $a_i\ge 0$, $b_i\ge 0$, $i=2,3,\dots,k$ – відомі числа, то $\exists\psi(t)$: $:\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t)=\infty$ і $f(\psi(t))$ є правильно змінною на нескінченності функцією.

Доведення теореми 3. Покладемо

$$\psi(t)=\begin{cases} t_0,\ t\in(0,\exp\{\varphi(t_0)\}),\\ \varphi^{-1}(\log t),\ t\in[\exp\{\varphi(t_0)\},\infty).\end{cases}$$

Покажемо, що $f(\psi(t))$ є правильно змінною на нескінченності функцією. Розглянемо вираз

$$f(\psi(\lambda t))\cdot f(\psi(t))^{-1} =$$
$$= T\cdot\operatorname{diag}\{U(\varphi_1(\varphi_1^{-1}(\log\lambda t))),\dots,$$
$$U(\varphi_k(\varphi_1^{-1}(\log\lambda t))),1,\dots,1,-1,\dots,-1\}\cdot T^{-1}\cdot T\times$$
$$\times\operatorname{diag}\{U(\varphi_1(\varphi_1^{-1}(\log t)))^{-1},\dots,$$
$$U(\varphi_k(\varphi_1^{-1}(\log t)))^{-1},1,\dots,1,-1,\dots,-1\}\cdot T^{-1} =$$
$$= T\cdot\operatorname{diag}\{U(\log\lambda),\dots,$$
$$U(a_k\log\lambda t+b_k-a_k\log t-b_k),1,\dots,1\}\cdot T^{-1} =$$
$$= T\cdot\operatorname{diag}\{U(\log\lambda),\dots,U(\log(\lambda^{a_k})),1,\dots,1\}T^{-1} =$$
$$= \lambda^{TBT^{-1}},\ t\in[\exp\{\varphi_1(t_0)\},\infty),$$

де

$$B=\begin{pmatrix}Q&0&0&0&0&0\\0&\ddots&0&0&0&0\\0&0&a_kQ&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&\ddots&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Тут ми скористалися умовами (2) теореми. Тому функція $f(\psi(t))$ є правильно змінною на нескінченності функцією.

Теорему доведено.

Зауваження **2.** У формулюванні загальної теореми з'являється додаткова умова (2), якої не було для розмірностей 2 та 3. Це пов'язано з наявністю більше одного блоку вигляду U в унітарно подібній діагональній матриці. Наведений нижче приклад показує необхідність умови (2).

Приклад **3.** Розглянемо чотиривимірну унітарну матричну функцію вигляду

$$f(t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t & 0 & 0\\ \sin t & \cos t & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos(t^2) & -\sin(t^2)\\ 0 & 0 & \sin(t^2) & \cos(t^2)\end{pmatrix},\ t>0.$$

Покажемо, що $f(\log t)$ не є правильно змінною на нескінченності функцією. Розглянемо вираз

$$f(\log\lambda t)f(\log t)^{-1} = \begin{pmatrix}\cos\log\lambda & -\sin\log\lambda & 0 & 0\\ \sin\log\lambda & \cos\log\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos(\log\lambda\cdot\log\lambda t^2) & -\sin(\log\lambda\cdot\log\lambda t^2)\\ 0 & 0 & \sin(\log\lambda\cdot\log\lambda t^2) & \cos(\log\lambda\cdot\log\lambda t^2)\end{pmatrix}.$$

Отримана матрична функція не має границі при $t \to \infty$. Тому функція $f(\log t)$ не є правильно змінною функцією.

Приклад 3 показує, що умова (2) теореми 3 є суттєвою. Між функціями $\varphi_1(t) = t$ та $\varphi_2(t) = t^2$ немає лінійної залежності.

Висновки

У роботі встановлені умови, за яких унітарну матричну функцію дійсного аргументу, яка не є правильно змінною на нескінченності у сенсі Карамати, можна регуляризувати заміною її аргументу. Часткові випадки розв'язання такої задачі були відомі для двовимірного випадку. В статті розглядаються матричні функції довільної скінченної розмірності d.

Встановлено, що у випадку $d \geq 4$, на відміну від ситуацій $d = 2$ та $d = 3$, існують такі матричні функції, які не вдається регуляризувати підстановкою $t \to \log t$. Це пов'язано з тим, що унітарна матрична функція розмірності $d \geq 4$ може мати принаймні два блоки вигляду

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

в унітарно подібній їй блочно-діагональній матриці. Якщо між аргументами цих блоків немає лінійної залежності, то таку унітарну функцію не вдається регуляризувати. Побудовано приклад такої матричної функції.

У подальших дослідженнях планується встановлення нових тверджень, які описують властивості матричних правильно змінних функцій.

Список літератури

1. *Karamata J.* Sur un mode de croissance reguliere // Mathematica (Cluj). – 1930. – **4**. – P. 38–53.
2. *Bingham N.M., Goldie C.M., Teugels J.L.* Regular Variation. – Cambridge: Cambridge University Press, 1987. – 494 p.
3. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции / Пер. с англ. – М.: Наука, 1985. – 144 с.
4. *Псевдорегулярні* функції та узагальнені процеси відновлення / В.В. Булдигін, К.-Х. Індлекофер, О.І. Клесов, Й.Г. Штайнебах. – К.: ТВіМС, 2012. – 441 с.
5. *Булдигін В.В., Павленков В.В.* Узагальнення теореми Карамати про асимптотичну поведінку інтегралів // Теорія ймовірностей та мат. статистика. – 2009. – № 81. – С. 13–24.
6. *Булдигин В.В., Павленков В.В.* Теорема Караматы для регулярно LOG-периодических функций // Укр. мат. журнал. – 2012. – **64**. – С. 1443–1463.
7. *Павленков В.В.* Комплекснозначні функції з невиродженими групами регулярних точок // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2014. – № 4. – С. 88–92.
8. *Meerschaert M.M., Scheffler H.-P.* Limit distributions for Sums of Independent Random Vectors: Heavy Tails in Theory and Practice. – John Wiley & Sons, 2001. – 512 p. – (Willey Series in Probability and Statistics).
9. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

References

1. J. Karamata, "On a method of regularly growth", *Mathematica (Cluj)*, no. 4, pp. 38–53, 1930.
2. N.M. Bingham *et al.*, *Regular Variation*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1987.
3. E. Seneta, *Regularly Varying Functions*. Moscow, USSR, Nauka, 1985 (in Russian).
4. V.V. Buldygin *et al.*, *Pseudo Regular Function and Generalized Renewal Processes*. Kyiv, Ukraine: TViMS, 2012 (in Ukrainian).
5. V.V. Buldygin and V.V. Pavlenkov, "On a generalization of Karamata's theorem on the asymptotic behavior of integrals", *Teoriya Imovirnostej i Matematychna Statystyka*, no. 81, pp. 13–24, 2009 (in Ukrainian).
6. V.V. Buldygin and V.V. Pavlenkov, "Karamata's theorem for regularly LOG-periodic functions", *Ukr. Matematychnyj Zhurnal,* no. 64, pp. 1443–1463, 2012 (in Russian).
7. V.V. Pavlenkov, "Complex-valued functions with nondegenerate group of regular points", *Naukovi Visti NTUU KPI,* no. 4, pp. 88–92, 2014 (in Ukrainian).
8. M.M. Meerschaert and H.-P. Scheffler, *Limit Distributions for Sums of Independent Random Vectors: Heavy Tails in Theory and Practice* (Willey Series in Probability and Statistics). John Wiley & Sons, 2001.
9. F.R. Gantmaher, *Matrixes Theory*. Moscow, USSR: Nauka, 1967 (in Russian).

В.В. Павленков

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ УНІТАРНИХ МАТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Проблематика. В статті розглядається граничне поводження на нескінченності унітарних матричних функцій дійсного аргументу та довільної скінченної розмірності. Досліджуються питання правильної зміни, у сенсі Карамати, таких функцій.

Мета дослідження. Мета роботи полягає у встановлені умов, за яких унітарну матричну функцію дійсного аргументу, яка не є правильно змінною на нескінченності, можна регуляризувати заміною її аргументу.

Методика реалізації. Показано, що заміна аргументу $t \to \log t$ робить із двовимірної унітарної матричної функції степеневу з відомим матричним степенем. Ця властивість покладена в основу доведення всіх основних тверджень.

Результати дослідження. Отримано умови, за яких можна регуляризувати унітарні матричні функції довільної скінченної розмірності.

Висновки. Встановлено суттєву відмінність між матричними функціями розмірності, нижчої за 4, та функціями більш високої розмірності. Побудовано приклад унітарної матричної функції розмірності 4, яку не можна регуляризувати заміною $t \to \log t$.

Ключові слова: правильно змінна функція; матрична функція; лінійний оператор.

В.В. Павленков

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ УНИТАРНЫХ МАТРИЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Проблематика. В статье рассматривается предельное поведение на бесконечности унитарных матричных функций действительного аргумента и произвольной конечной размерности. Исследуется вопрос правильного изменения, в смысле Караматы, таких функций.

Цель исследования. Целью работы являются условия, при которых унитарную матричную функцию действительного аргумента, которая не является правильно меняющейся на бесконечности, можно регуляризировать заменой ее аргумента.

Методика реализации. Показано, что замена $t \to \log t$ преобразует двумерную унитарную матричную функцию в степенную с известной матричной степенью. Это свойство является основой доказательства всех основных утверждений.

Результаты исследования. Получены условия, при которых удается регуляризировать унитарные матричные функции произвольной конечной размерности.

Выводы. Установлена существенная разница между матричными функциями размерности, меньшей 4, и функциями более высокой размерности. Построен пример унитарной матричной функции размерности 4, которую нельзя регуляризировать заменой $t \to \log t$.

Ключевые слова: правильно меняющаяся функция; матричная функция; линейный оператор.

Рекомендована Радою
фізико-математичного факультету
НТУУ "КПІ"

Надійшла до редакції
19 квітня 2016 року