УДК 512.56+512.64

Дяченко С. М.

НАПІВГРУПИ РІССА НАД ЦИКЛІЧНОЮ ГРУПОЮ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ РУЧНОГО НЕСКІНЧЕННОГО ЗОБРАЖУВАЛЬНОГО ТИПУ

Розглянуто напівгрупи Рісса над циклічною групою третього порядку. Доведено, що у модулярному випадку немає напівгруп ручного нескінченного типу.

Ключові слова: напівгрупа Рісса, зображення, матрична, ручна алгебра, дика алгебра.

Вступ

У статті [1] ми розглядали напівгрупи Рісса над групою C_3 і вивчили випадок скінченного зображувального типу у модулярному випадку, тобто над полем характеристики три. У цій статті продовжимо вивчення зображень напівгруп Рісса над групою C_3 і дослідимо, у яких випадках зображувальний тип буде ручний нескінченний. Зокрема, не повторюватимемо усі допоміжні твердження, доведені у статті [1]. Так само, як у попередній статті, дамо відповідь у термінах «спрощення матриці».

Зробимо невеличке нагадування.

Нехай $C_3 = \{e, a, a^2 \,|\, a^3 = e\}$ — циклічна група третього порядку і B — не нульова $n \times m$ матриця над $C_3 \cup \{0\}$. Для кожного $g \in C_3$ та пари індексів (i, j), $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ розглянемо $m \times n$ матрицю $(g)_{ij}$. У цієї матриці на місці (i, j) стоїть елемент g, а решта рівні нулю. Позначимо $\mathcal{R}(C_3, B)$ множину усіх таких матриць разом із нульовою матрицею. Визначимо множення «$*$» наступним чином

$$(g)_{ij} * (g')_{i'j'} = (g)_{ij} \cdot B \cdot (g')_{i'j'}$$

де «$\cdot$» — звичайне множення матриць. Тоді множина $\mathcal{R}(C_3, B)$ разом з операцією «$*$» називається напівгрупою Рісса над групою C_3 із сендвіч-матрицею B.

Понізовський [3] описав всі напівгрупи Рісса (над довільною скінченною групою) скінченного зображувального типу у випадку, коли характеристика поля взаємно проста із порядком групи. У цій статті розглянемо випадок, коли характеристика базового поля F рівна три, тобто рівна порядку групи.

Позначимо $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(C_3, B)$. Задача про опис зображень напівгрупи S еквівалентна задачі про опис зображень її напівгрупової алгебри $F[S]$. Позначимо $\mathcal{M}(B) = F[\mathcal{R}(B)]$. Тоді $\mathcal{M}(B)$ — це алгебра всіх $m \times n$ матриць над груповою алгеброю $F[C_3]$ з множенням $M_1 * M_2 = M_1 B M_2$.

Раніше [1, Твердження 2] доведено, що маючи довільну сендвіч-матрицю B, можна побудувати сендвіч-матрицю $D = D(B)$ вигляду

$$D = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де матриці $A_1 = diag(a - e, ..., a - e)$, $A_2 = diag((a - e)^2, ..., (a - e)^2)$ такі, що алгебра $\mathcal{M}(B)$ має такий самий зображувальний тип, що й $\mathcal{M}(D)$. Таку матрицю $D = D(B)$ називатимемо спрощенням матриці B.

Основний результат і його доведення

У цьому розділі ми доведемо теорему, що описує всі напівгрупи Рісса ручного нескінченного типу. Це основна теорема статті.

Теорема 1. *Немає жодної алгебри $\mathcal{M}(B)$, яка б мала ручний нескінченний зображувальний тип.*

Тобто над циклічною групою третього порядку всі алгебри або мають скінченний тип, або дикі.

Доведення теореми проведемо в кілька кроків: розглянемо випадки різних матриць A_1 і A_2.

Для подальшого розгляду буде корисним наступне твердження [1, Твердження 3].

Твердження 1. *Якщо матриця D містить нульовий рядок (стовпчик) і $\tilde{D}$ — матриця, отримана за допомогою викреслення цього рядка (стовпчика), то алгебра $\mathcal{M}(\tilde{D})$ є фактералгеброю алгебри $\mathcal{M}(D)$ за деяким ідеалом.*

Як наслідок, з цього твердження отримуємо, що з дикості алгебри $\mathcal{M}(\tilde{D})$ випливає дикість алгебри $\mathcal{M}(D)$.

Введемо позначення, які використовуватимемо у подальшому розгляді. А саме, нехай ми маємо алгебру $\mathcal{M}(D)$ з матрицею D розміру $n \times m$ з елементами з групової алгебри $F[C_3]$. Тоді базисом цієї алгебри будуть такі елементи:

e_{ij} — матриця, яка на місці (i, j) має елемент e, а на решті місць — нулі;

a_{ij} — матриця, яка на місці (i, j) має елемент a, а на решті місць — нулі;

$\bar{a}_{ij}$ — матриця, яка на місці (i, j) має елемент a^2, а на решті місць — нулі.

Випадок 1. Матриці A_1, A_2 порожні

Нагадаємо, що у попередній статті ми довели [1, Твердження 5], що у випадку, коли матриці A_1 та A_2 — порожні, алгебра $\mathcal{M}(D)$ має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли матриця D є однією з наступних:

$$(e), \quad (e \ \ 0), \quad \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отже, далі ми розглядатимемо матриці більшого розміру. Однак наступне твердження покаже нам, що розмір обмежується числом 2.

Твердження 2. *Алгебра $\mathcal{M}(D)$ задана за допомогою однієї з наступних сендвіч-матриць D*

$$\begin{pmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (e \ 0 \ 0)$$

має дикий зображувальний тип.

Доведення. У випадку

$$D = \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

базис алгебри складається з елементів $\{e_{1i}, a_{1i}, \bar{a}_{1i} \,|\, 1 \leq i \leq 3\}$. Помітимо, що виконуються наступні співвідношення $a_{1i} = a_{11} * e_{1i}$, $\bar{a}_{11} = a_{11} * a_{11}$, $\bar{a}_{1i} = a_{11} * a_{11} * e_{1i}$, $1 < i \leq 3$. Отже, система твірних алгебри складається з елементів $\{e_{11}, e_{12}, e_{13}, a_{11}\}$. Розглянемо зображення $R(X)$ цієї алгебри, при якому твірні елементи переходять відповідно у наступні матриці

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & Y_1 \\ 0 & 0 & 0 & Y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко перевірити, що всі співвідношення в алгебрі виконуються, а тому це справді зображення. Крім того, два такі зображення $R(Y_1, Y_2)$ та $R(Y_1', Y_2')$ є еквівалентними тоді і лише тоді, коли існує невироджена матриця S така, що $Y_1' = S^{-1}Y_1S, Y_2' = S^{-1}Y_2S$. Отже, задача дика.

Таким чином, у випадку порожніх матриць A_1, A_2 задача може бути ручного нескінченного типу лише у випадку сендвіч-матриці

$$D = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Твердження 3. *Алгебра $\mathcal{M}(D)$, де*

$$D = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

є дикого зображувального типу.

Доведення. Розглянемо алгебру $\mathcal{M}(D)$ вона складається з 2×2 матриць та має базис $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \bar{a}_{11}, \bar{a}_{12}, \bar{a}_{21}, \bar{a}_{22}\}$. Оскільки $e_{22} = e_{21} * e_{12}$, $a_{12} = a_{11} * e_{12}$, $a_{21} = e_{21} * a_{11}$, $a_{22} = e_{21} * a_{11} * e_{12}$, $\bar{a}_{11} = a_{11} * a_{11}$, $\bar{a}_{12} = \bar{a}_{11} * e_{12}$, $\bar{a}_{21} = e_{21} * \bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22} = e_{21} * \bar{a}_{11} * e_{12}$, система твірних цієї алгебри складається з елементів $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, a_{11}\}$.

Розглянемо зображення цієї алгебри $E_{11}, E_{12}, E_{21}, A_{11}$. Маємо $E_{11}^2 = E_{11}$, тому E_{11} можемо привести до наступного вигляду

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $e_{11}a_{11} = a_{11}e_{11} = a_{11}$, $e_{11}e_{12} = e_{12}$, $e_{12}e_{11} = 0$, $e_{11}e_{21} = 0$, $e_{21}e_{11} = e_{21}$ матриці A_{11}, E_{12} та E_{21} при цьому набувають, відповідно, такого вигляду

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{pmatrix}.$$

Маємо $A_{11}^3 = E_{11} \Rightarrow U^3 = E$, $e_{12} * e_{21} = 0 \Rightarrow XY = 0$.

Приведемо матриці X та Y до наступного вигляду

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тоді для матриці U отримаємо задачу про класифікацію оператора U такого, що $U^3 = E$ у векторному просторі градуйованому частково-впорядкованою множиною $S = \{1 < 2 < 4, 1 < 3 < 4\}$. Ця задача дика [4, Theorem 3].

Випадок 2. Матриці A_1, A_2 — не порожні

Розглянемо в загальному випадку сендвіч-матрицю D, яка має розмір $n \times m$, матриця A_1 має розмірність r_1, матриця A_2 має розмірність r_2. Позначимо таку матрицю $D(n, m, r_1, r_2)$. Як і в праці [2], побудуємо колчан алгебри й використаємо результати із [5, 6].

Нагадаємо, що вже доведено [1, Твердження 6]: у випадку, коли матриці A_1, A_2 не порожні, алгебра має скінченний тип тільки тоді, коли

$$D = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & a - e \end{pmatrix}.$$

Таким чином, алгебра $\mathcal{M}(D(2, 2, 1, 0))$ має скінченний зображувальний тип.

Спочатку зауважимо, що у випадку, коли матриця має більше трьох рядків, або стовпців, її колчан матиме дві вершини і три стрілки, що ідуть від однієї вершини до іншої, тому така алгебра матиме фактор алгебру (W1) [5], а отже, буде дикою.

Далі розглядатимемо сендвіч матриці, що мають не більше трьох рядків і стовпців.

Твердження 4. *Алгебра $\mathcal{M}(D(n, m, 1, 0))$ є дикою, якщо $\max\{n, m\} > 2$.*

Доведення. Якщо $\max\{n, m\} > 2$, то наша алгебра має фактор алгебру $\mathcal{M}(D(2, 3, 1, 0))$ або $\mathcal{M}(D(3, 2, 1, 0))$ (за твердженням 1), тому достатньо довести дикість для цих двох алгебр.

Розглянемо алгебру $\mathcal{M}(D(2, 3, 1, 0))$ (для алгебри $\mathcal{M}(D(3, 2, 1, 0))$ доведення аналогічне).

$\mathcal{M}(D(2, 3, 1, 0))$ має систему твірних $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{31}\}$. Побудуємо колчан цієї алгебри:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=30, "a_2"] \arrow[r, "a_1"] & \bullet \arrow[l, bend left=30, "b_1"] \end{tikzcd},$$

де $a_1 = e_{21}$, $a_2 = e_{31}$, $b_1 = e_{12}$ зі співвідношеннями $(b_1 a_1)^3 = 0$, $b_1 a_2 = 0$. Порівняємо цю алгебру з алгеброю W_2 з теореми [6, Theorem 2]. Остання алгебра задається тим самим колчаном, але має співвідношення $b_1 a_1 = 0$, $b_1 a_2 = 0$. Оскільки співвідношення алгебри $\mathcal{M}(D(2, 3, 1, 0))$ виконуються в алгебрі W_1, то W_1 є фактор-алгеброю алгебри $\mathcal{M}(D(2, 3, 1, 0))$, а отже, остання алгебра має дикий зображувальний тип.

Твердження 5. *Алгебра $\mathcal{M}(D(3, 3, 2, 0))$ є дикою.*

Доведення. Розглянемо алгебру $\mathcal{M}(D(3, 3, 2, 0))$, її колчан має наступний вигляд

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend right=15, "a_1"'] \arrow[r, bend right=40, "a_2"'] & \bullet \arrow[l, bend right=40, "b_2"'] \arrow[l, bend right=15, "b_1"'] \end{tikzcd},$$

де $a_1 = e_{12}$, $a_2 = e_{13}$, $b_1 = e_{31}$, $b_2 = e_{21}$, при цьому виконуються наступні співвідношення

$$\begin{array}{ll} (a_1 b_2)^3 = 0; & a_2 b_1 = a_1 b_2; \\ a_1 b_1 = 0; & a_2 b_2 = 0. \end{array} \tag{1}$$

Розглянемо алгебру (W3) зі списку алгебр (W) праці [5]. Вона задається таким самим колчаном, а співвідношення мають наступний вигляд: $b_1 a_1 = b_1 a_2 = b_2 a_1 = b_2 a_2 = a_1 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$. Остання алгебра є фактор–алгеброю алгебри $\mathcal{M}(D(3, 3, 2))$, оскільки усі співвідношення (1) будуть виконуватись за умови виконання співвідношень алгебри (W3).

Твердження 6. *Алгебра $\mathcal{M}(D(n, m, r_1, r_2))$, $r_2 > 0, 2 \leq n, m \leq 3$ є дикого зображувального типу.*

Доведення. Розглянемо спочатку випадок матриці 2×2. Тоді алгебра має систему твірних $e_{11}, e_{12}, e_{21}, a_{11} - e_{11}$. Її колчан матиме наступний вигляд

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, bend right=20, "\mu"'] & \bullet \arrow[l, bend right=20, "\nu"'] \end{tikzcd},$$

де $\alpha = a_{11} - e_{11}$, $\nu = e_{12}$, $\mu = e_{21}$ з наступними співвідношеннями $\alpha^3 = \alpha^2 - \nu\mu = 0$. Ця алгебра — дика, оскільки має фактор-алгебру (W23) [5].

Якщо до такої матриці додати нульовий рядок або нульовий стовпчик так, щоб отримати матриці розміру 3×2 або 2×3, відповідно, то алгебра матиме дикий зображувальний тип згідно з твердженням 1.

Розглянемо випадок матриці 3×3. Можливі два випадки: 1) $D = diag(e, a - e, (a - e)^2)$; 2) $D = diag(e, (a - e)^2, (a - e)^2)$.

У першому випадку колчан алгебри має вигляд

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend right=15, "a_1"'] \arrow[r, bend right=40, "a_2"'] & \bullet \arrow[l, bend right=40, "b_2"'] \arrow[l, bend right=15, "b_1"'] \end{tikzcd},$$

де $a_1 = e_{12}$, $a_2 = e_{13}$, $b_1 = e_{31}$, $b_2 = e_{21}$, при цьому виконуються наступні співвідношення

$$\begin{aligned} &(a_1b_2)^3 = 0; \quad a_2b_1 = (a_1b_2)^2; \\ &a_1b_1 = 0; \qquad a_2b_2 = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Розглянемо алгебру (W3) зі списку алгебр (W) праці [5]. Вона задана таким самим колчаном, а співвідношення мають наступний вигляд: $b_1a_1 = b_1a_2 = b_2a_1 = b_2a_2 = a_1b_1 = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Остання алгебра є фактор–алгеброю нашої алгебри, оскільки усі співвідношення (2) будуть виконуватись за умови виконання співвідношень алгебри (W3).

У другому випадку колчан алгебри матиме вигляд

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, bend right=15, "a_1"'] \arrow[r, bend right=40, "a_2"'] & \bullet \arrow[l, bend right=40, "b_2"'] \arrow[l, bend right=15, "b_1"'] \end{tikzcd},$$

де $a_1 = e_{12}$, $a_2 = e_{13}$, $b_1 = e_{31}$, $b_2 = e_{21}$, $\alpha = a_{11} - e_{11}$, при цьому виконуються наступні співвідношення

$$\begin{aligned} &\alpha^3 = 0; \quad\ a_1b_2 = a_2b_1 = \alpha^2; \\ &a_1b_1 = 0; \quad a_2b_2 = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Розглянемо фактор-алгебру по ідеалу, породженому α, тоді колчан алгебри матиме вигляд, як у випадку 1), співвідношення набудуть вигляду $a_1b_2 = a_2b_1 = a_1b_1 = a_2b_2 = 0$. Остання алгебра має фактор–алгебру (W3), а отже, дика.

У випадку, коли матриця матиме більше трьох рядків, або стовпців, її колчан матиме три стрілки, що ідуть від однієї вершини до іншої, тому така алгебра матиме фактором алгебру (W1) [5], а отже, буде дикою.

Висновки

Отже, ми довели, що у модулярному випадку не існує напівгруп Рісса над циклічною групою третього порядку ручного нескінченного типу.

Список літератури

1. Дяченко С. М. Напівгрупи Рісса над циклічною групою третього порядку скінченного зображувального типу / С. М. Дяченко // Наукові записки НаУКМА, серія «Фізико-математичні науки». — 2010. — Т. 100. — С. 7–10.

2. Dyachenko S. M. On modular representations of some semigroups and representations of quivers with relations / S. M. Dyachenko // Bulletin of University of Kyiv, series Physics and Mathematics. — 2010. — V. 3. — P. 11–15.

3. Понизовский И. С. О конечности типа полугрупповой алгебры конечной вполне простой полугруппы / И. С. Понизовский // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1972. — Т. 28. — С. 154—163.

4. Bondarenko V. M. Linear operators on S-graded vector spaces / V. M. Bondarenko // Linear algebra and its applications. — 2003. — Vol. 365. — P. 45–90.

5. Yang Han Wild Two-Point Algebras / Yang Han // Journal of Algebra. — 2002. — V. 247 — P. 57–77.

6. Brustle Th. Tame two-point algebras without loops / Thomas Brustle, Yang Han // Preprint 00 — 040 SFB 343, Universitat Bielefeld. — 2000. — Режим доступу: http://www.mathematik.uni-bielefeld.de /~bruestle/Publications/2ptnoloop.html. — Назва з екрана.

7. Brenner S. Modular representations of p-groups. / S. Brenner // J. Algebra. — 1970. — No. 1. — P. 69–102.

S. Dyachenko

ON TAME REPRESENTATION TYPE REES SEMIGROUP OVER THE CYCLIC GROUP OF ORDER THREE

Rees semigroup over C_3 is considered. Proved thet there is no semigroups of tame infinite representation type in modular case.

Keywords: Rees semigroup, representation, matrix problem, tame algebra, wild algebra.

Матеріал надійшов 26.03.2012