УДК 517.98

Кашпіровський О. І., Андросенко М. П

ПРО НАБЛИЖЕННЯ СПЛАЙНАМИ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НА ДІЙСНІЙ ВІСІ

Для обмежених на дійсній вісі роз'вязків системи лінійних диференціальних рівнянь, спектр матриці якої відкремлений від уявної вісі, встановлено можливість наближення кубічними сплайнами на основі методу сплайн-коллокації та отриманні оцінки точності такого наближення. Для випадку системи з малим параметром при похідній виведено локальні асимптотичні формули для параметрів сплайна.

Ключові слова: апроксимація, кубічний сплайн, сплайн-колокація, обмежений роз'вязок, малий параметер, асимптотичні розвинення, комфорне відображення, клас єдності ров'язку.

На дійсній вісі $R^1 = (-\infty, +\infty)$ розглянуто лінійну систему диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

$$\Lambda y = y' - Ay = f(t), \tag{1}$$

де A — квадратна матриця порядку m, $y(t)$ — невідома вектор-функція із значеннями в $\mathbb{C}^m$, $f(t)$ — задана k разів неперевно-диференційовна вектор-функція, тобто $f \in C^k(R^1, \mathbb{C}^m)$,

$$\|f\|_{C^k(R^1,\mathbb{C}^m)} = \sup_{t\in R^1}\left(\|f(t)\|_{\mathbb{C}^m} + \left\|f^{(k)}(t)\right\|_{\mathbb{C}^m}\right).$$

Норму вектора $x \in \mathbb{C}^m$ визначимо формулою

$$\|x\|_{\mathbb{C}^m} = \left(\sum_{k=1}^{m}|x_k|^2\right)^{1/2}.$$

Щодо матриці A припустимо: її власні числа λ_k не лежать на уявній вісі. Тобто

$$Re\lambda_k \neq 0, k = \overline{1,m}.$$

У такому разі

$$d = \inf_{\substack{\lambda\in\sigma(A),\\ t\in R^1}} |\lambda - it| > 0. \tag{2}$$

Залежно від знака дійсних частин власних чисел λ_k матриці A розіб'ємо її спектр $\sigma(A)$ на дві складові $\sigma_-(A)$ та $\sigma_+(A)$. Відповідно до такого поділу $\sigma(A)$ простір $\mathbb{C}^m$ ділиться на два інваріантні відносно оператора A підпростори V_+ і V_-. Позначимо через P_+ та P_- проектори на підпростори V_+ та V_-, відповідно.

За теоремою М. Г. Крейна [1, с. 119] рівняння (1) має єдиний обмежнний роз'язок, що допускає інтегральне зображення

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-s)\, f(s)\, ds, \tag{3}$$

де $G(t) = \begin{cases} -e^{At}P_-, & t \geq 0, \\ e^{At}P_+, & t < 0 \end{cases}$ — головна функція Гріна рівняння (1). Зображення (3) запишемо як суму двох невласних інтегралів [1]

$$y(t) = y_-(t) + y_+(t), \tag{4}$$

де $y_+(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-A(t-s)}P_+ f(s)\, ds$,
$y_-(t) = \int_{t}^{+\infty} e^{-A(t-s)}P_- f(s)\, ds$.

Враховуючи умову (2), напівгрупи операторів $e^{-At}P_+$ й $e^{At}P_-$ $(t \geq 0)$ є стискаючими з показником d, а невласні інтеграли в (4) є абсолютно збіжними. Безпосередньою перевіркою можна показати, що при $f \in C^k\left(R^1, \mathbb{C}^m\right)$ розв'язок $y(t) = \left(\Lambda^{-1}f\right)(t)$ належить простору $C^{k+1}\left(R^1, \mathbb{C}^m\right)$.

Зауважимо, якщо зняти умову обмеженості розв'язків рівняння (1) на дійсній вісі, то втрачається єдиність розв'язку завдяки експоненціально зростаючим розв'язкам однорідного рівняння

$$y' - Ay = 0.$$

Загальний розв'язок рівнняня (1) допускає зображення
$y(t) = y_+(t) + y_-(t) + e^{At}g$,
де $g \in \mathbb{C}^m$ — довільний вектор.

Зауважимо, що в [2] зображення обмеженого розв'язку були узагальнені на випадок бананового простору з секторіальним оператором A. У випадку додатного оператора в Гільбертовому просторі зображення загального розв'язку рівняння (1) досліджувалися у [3].

Мета цієї статті — дослідження можливості наближення обмежених розв'язків рівняння (1) за допомогою кубічних сплайнів мінімального дефекту [4]. Для побудови таких наближень використовуємо метод сплайн-коллокації. Раніше цей метод застосовували в [4] для апроксимації розв'язків крайових задач на скінченному інтервалі для рівнянь 2-го порядку.

Тут задача визначення параметрів сплайна зводиться до розв'язання нескінченної тридіагональної системи різницевих рівнянь, що є різницевим аналогом рівняння (1). Для обмежених рішень цієї системи рівнянь отримано явне представлення, що є дискретним аналогом (3). Отримано оцінки наближення обмежених розв'язків рівняння (1) кубічними сплайнами і дано порівняння з оцінками наближень цих розв'язків, отриманих у [2, 5–6], в яких задача наближення обмежених розв'язків рівняння (1) також зведена до пошуку обмежених розв'язків тридіагональної системи різницевих рівнянь.

Для модифікації рівняння (1) з малим параметром при похідній одержані локальні асимптотичні формули для визначення параметрів апроксимуючого сплайна.

Метод сплайн-коллокації

На прямій R^1 задамо рівномірну сітку вузлів $\Delta(h) = \{t_n : t_n = nh,\ n \in Z\},\ h > 0$. Шукаємо сплайн-наближення обмеженого розв'зку $y(t)$ рівняння (1) у вигляді розвинення

$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n B_n(t) \tag{5}$$

за базисними B-сплайнами $B_n(t)$, які за допомогою операцій стиску та зсуву виражаються через стандартний B-сплайн

$$B_n(t) = B\left((t - t_n)\, h^{-1}\right),$$

де $B(x) = \frac{1}{6}(2 - |x|)_+^3 - \frac{2}{3}(1 - |x|)_+^3$,

$$[(\alpha - |x|)_+^3 = \begin{cases} (\alpha - |x|)^3, & |x| < \alpha, \\ 0, & |x| \geqslant \alpha \end{cases}$$

— зрізана степеннева функція.

Враховуючи фінітність сплайна $B_n(t)$ ($\sup p\ B_n(t) = [t_{n-2,} t_{n+2}]$), при кожному $t \in R^1$ ряд (7) містить не більше чотирьох доданків, відмінних від нуля, а в вузлах t_n не нульових доданків три.

Невідомі коефіцієнти a_n у розвинення (5) є векторами з $\mathbb{C}^m$. Відповідно до методу сплайн-коллокації [4] у вузлах сітки $\Delta(h)$ сплайн повинен задовольняти рівняння (1).

$$\Lambda(S(t_n)) = S'(t_n) - AS(t_n) = f(t_n),$$

$$n \in Z. \tag{6}$$

Підставляючи в (6) розвинення (5), враховуючи властивості B-сплайнів, отримаємо систему різницевих рівнянь щодо a_n:

$$\frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{2h} = A\left(\frac{1}{6}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}a_{n-1}\right) + \\ + f(t_n), \quad n \in Z. \tag{7}$$

Помноживши кожне рівняння системи (7) на $-6h$, отримаємо еквівалентну систему різницевих рівнянь

$$(Ah - 3I)\, a_{n+1} + 4Aha_n + (Ah + 3I)\, a_{n-1} = \\ = -6hf(t_n), \quad n \in Z, \tag{8}$$

де I — одиничний оператор в $\mathbb{C}^m$. Системи (7) та (8) є дискретними аналогами(1). При цьому обмеженому розв'язку $y(t)$ рівняння (1) відповідає обмежений розв'язк $\bar{a} = \{a_n : n \in Z, a_n \in \mathbb{C}^m\}$ систем(7) і (8), визначення якого дано в [2].

Простір усіх послідовностей $\bar{a} = \{a_n : n \in Z, a_n \in \mathbb{C}^m\}$ позначимо через $s(Z, \mathbb{C}^m),\ m \in N$.

Простір усіх обмежених послідовностей $\bar{a} = \{a_n : n \in Z, a_n \in \mathbb{C}^m\}$ позначимо через $l_\infty(Z, \mathbb{C}^m)$ і введемо в ньому норму

$$\|\bar{a}\|_{l_\infty(Z,\mathbb{C}^m)} = \sup_{n \in Z} \|a_n\|_{\mathbb{C}^m},\ \ m \in N.$$

Для послідовностей $\bar{a}$ із $s(Z, \mathbb{C}^m), m \in N$ або з $l_\infty(Z, \mathbb{C}^m)$ визначимо розвинення у вигляді формального ряду Лорана [2]

$$\bar{a} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n \omega^n, \tag{9}$$

де ω — комплексна змінна. Розвинення (9) будемо називати ω–зображенням послідовності $\bar{a}$. Зважуючи на те, що множення ряду на ω означає зсув нумерації координат вектора $\bar{a}$ на одну позицію вправо, позначатимемо відповідний оператор зсуву буквою Ω. Тоді для $j \in Z$ оператор Ω^j означатимемо зсув нумерації координат на j позицій вправо при $j > 0$ і на $-j$ позицій вліво при $j < 0$. Тотожний оператор у $s(Z, \mathbb{C}^m)$ і $l_\infty(Z, \mathbb{C}^m)$ позначимо буквою E (E$\bar{a} = \bar{a}$). Використовуючи ω–представлення (9), запишемо систему (8) як операторно-різницеве рівняння

$$L\bar{a} = -6h\bar{f}, \tag{10}$$

де $\bar{f} = \{f(t_n) : n \in Z\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t_n)\, \omega^n$,

$L = L(A, \Omega, h) = (Ah - 3I)\, \Omega + 4Ah\mathrm{E} + (Ah + 3I)\, \Omega^{-1}$ — різницевий оператор.

Відповідно до [2] послідовність $\bar{a}$ із $l_\infty(Z, \mathbb{C}^m)$, яка задовільняє (10) при $f \in l_\infty(Z, \mathbb{C}^m)$, назвемо обмеженим розв'язком рівняння (10) і відповідно до систем (7) та (8).

Наступна теорема дає необхідні й достатні умови існування та єдиності обмеженого розв'язку рівняння (10), тобто умови існування обмеженого зворотного оператора L^{-1}.

Теорема 1. *Для того, щоб існував обмежений у* $l_\infty(Z,\mathbb{C}^m)$ *оператор* $L^{-1}=L^{-1}(A,\Omega,h)$*, необхідно і достатньо, щоб* $\sigma(A)$ *— спектр оператора* A *не перетинався з інтервалом*

$$J=\left[-i\sqrt{3}h^{-1},+i\sqrt{3}h^{-1}\right],$$

що лежить на уявній вісі.

Доведення. Теорема 1 є наслідком [2]. Для доведення теореми 1 досить показати, що множина точок $\lambda\in C^1$, для яких характеристичне рівняння

$$(\lambda h-3)\,z+4\lambda h+(\lambda h+3)z^{-1}=0 \qquad (11)$$

має відносно z корені з рівним одиниці модулем, збігається з інтервалом J.

Для цього знайдемо вираз для λ з (11)

$$\lambda=\frac{3}{h}\cdot\frac{z-z^{-1}}{4+z+z^{-1}}$$

і підставимо замість z рівну за модулем одиниці величину $e^{i\varphi},\ 0\le\varphi<2\pi$:

$$\lambda=\frac{3}{h}\cdot\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{4+e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}=\frac{3i}{h}\cdot\frac{\sin\varphi}{2+\cos\varphi}. \qquad (12)$$

Враховуючи, що при $\varphi\in[0,2\pi]$ вираз $\sin\varphi\,(2+\cos\varphi)^{-1}$ змінюється в проміжку $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, доходимо висновку, що належність коренів характеристичного рівняння (11) одиничному колу $S=\left\{z\in C^1:|z|=1\right\}$ означає: $\lambda\in J$. При цьому, якщо розглядати J як об'єднання лівого берега J_- і правого берега J_+, то співвідношення (12) встановлює між J і S взаємно однозначну відповідність. Теорема 1 доведена.

Помноживши рівняння (11) на z, перетворимо це рівняння в квадратне

$$(\lambda h-3)\,z^2+4\lambda hz+(\lambda h+3)=0. \qquad (13)$$

Фіксуючи значення параметра $h>0$, визначимо функцію

$w=w(\lambda h)=\sqrt{3\lambda^2h^2+9}$

комплексного аргументу $\lambda\in C^1\setminus J$ так, щоб

$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\frac{w(\lambda h)}{\lambda}=\sqrt{3}h.$

Користуючись цією функцією, запишемо вираз для коренів рівняння (13):

$$z_1=z_1(\lambda h)=\frac{2\lambda h-w(\lambda h)}{3-\lambda h}=-\frac{\lambda h+3}{2\lambda h+w(\lambda h)},$$

$$z_2=z_2(\lambda h)=\frac{2\lambda h+w(\lambda h)}{3-\lambda h}=(z_1(-\lambda h))^{-1}.$$

З доведення теореми 1 випливає, що функції $z_1(\lambda h)$ і $z_2(\lambda h)$ здійснюють взаємно однозначне відображення $J=J_-\bigcup J_+$ на S.

Тоді внаслідок принципу відповідності границь [7, с. 208] отримаємо:

Теорема 2. *Функція* $z_1=z_1(\lambda h)$ *здійснює конформне відображення* $C^1\setminus J$ *в середину одиничного круга* $\{z:|z|<1\}$ *(*$z_1(-3)=0,\ z_1(\infty)=\sqrt{3}-2,\ z_1(3)=0,5$*).*

Функція $z_2=z_2(\lambda h)$ *здійснює конформне відображення* $C^1\setminus J$ *у зовнішність одиничного круга* $\{z:|z|>1\}$ *(*$z_2(-3)=2,\ z_2(\infty)=-\sqrt{3}-2,\ z_2(3)=\infty$*).*

Щоб отримати явне зображення обмеженого розв'язку рівняння (10), знайдемо спершу обмежений розв'язок рівняння типу (8) при $H=C^1$, $A=\lambda\in C^1\setminus J$ і дельта-подібною правою частиною

$$(\lambda h-3)\,G_{n+1}+4\lambda hG_n+(\lambda h+3)\,G_{n-1}=$$
$$=\delta_{n0},n\in Z, \qquad (14)$$

де δ_{n0} — символ Кронекера.

Обмежений розв'язок рівняння (14) сконструюємо з двох геометричних прогресій z_1^n і z_2^n, $n\in Z$ за формулою

$$G_n=\begin{cases}cz_1^n, n\ge0,\\ cz_2^n, n<0\end{cases},$$

де c — константа, яку треба визначити.

За теоремою 2 $\bar{G}$ — обмежена послідовність. Оскільки z_1 і z_2 є коренями характеристичного рівняння (11), то члени послідовності $\bar{G}$ будуть задовольняти усі рівняння системи (14), окрім рівняння з номером $n=0$. Константу c виберемо так, щоб задовольнити рівняння з номером $n=0$, тобто

$$c\left[(\lambda h-3)\,z_1+4\lambda h+(\lambda h+3)\,z_2^{-1}\right]=1.$$

Звідси маємо

$$c=0.5w(\lambda h)^{-1}.$$

Таким чином, для значень $\lambda\in C^1\setminus J$ отримаємо:

$$G_n=0,5w(\lambda h)^{-1}\cdot\begin{cases}\left(-\frac{\lambda h+3}{2\lambda h+w(\lambda h)}\right)^n, n\ge0,\\ \left(-\frac{\lambda h-3}{2\lambda h+w(\lambda h)}\right)^{-n}, n<0\end{cases}.$$

Наступна теорема показує, що для операторно-різницевого рівняння (10) функція $G_n=G(n,\lambda h)$ дискретного аргументу $n\in Z$ відіграє таку саму роль, як і функція Гріна$G(t)$ для рівняння (1).

Теорема 3. *Якщо нормальний в H оператор A задовольняє умові (2), то оператор $L^{-1} = L^{-1}(A,\Omega,h)$ здійснює неперервне відображення $l_\infty(Z,\mathbb{C}^m)$ в себе. Його дія на $\bar b = \sum_{n\in Z} b_n\omega^n$ задається виразом*

$$\bar a = (L^{-1})\bar b =$$
$$= \sum_{n\in Z}\left(\sum_{k\in Z} G(n-k,Ah)\,b_k\right)\omega^n, \quad (15)$$

а його норма допускає оцінку

$$\left\|L^{-1}\right\| \le Ch^{-1} \quad (16)$$

Доведення. Існування оператора L^{-1} випливає з теореми 1. Зображення (15) є наслідком отриманого зображення обмеженого розв'язку рівняння (14). Оцінимо норму оператора L^{-1}:

$$\left\|L^{-1}\right\| =$$
$$= \sup_{\substack{\bar b\in l_\infty(Z,\mathbb{C}^m),\\ \|\bar b\|_{l_\infty(Z,\mathbb{C}^m)}=1}} \left\|L^{-1}(A,\Omega,h)\,\bar b\right\|_{l_\infty(Z,\mathbb{C}^m)}$$
$$= \sum_{n\in Z}\sup_{\substack{b_n\in\mathbb{C}^m,\\ \|b_n\|_{\mathbb{C}^m}=1}} \|G(n,Ah)\,b_n\|_{\mathbb{C}^m}$$
$$= \sum_{n\in Z}\|G(n,Ah)\|_{L(\mathbb{C}^m)}.$$

Вважатимемо, що матриця A подібна до діагональної $A = U^{-1}DU$, де U — не вироджена матриця, $D = diag(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$. Покладемо $K = \|U\|\cdot\left\|U^{-1}\right\|$. (Вважаємо, що матрична норма узгоджена з евклідовою нормою в C^m. Якщо A симетрична, то матрицю U можна вибрати унітарною, тоді $K=1$). Як наслідок зроблених припущень отримаємо:

$$\left\|L^{-1}\right\| \le \frac{K}{2}\sup_{|Re\lambda|\ge d}|w(\lambda h)|^{-1}\sum_{n\in Z} q^{|n|} \le \frac{K}{6}\cdot\frac{1+q}{1-q},$$

де $q = \sup\limits_{|Re\lambda|\ge d}\left(|z_1(\lambda h)|,\left|z_2^{-1}(\lambda h)\right|\right) =$

$\sup\limits_{Re\lambda=d}|z_1(\lambda h)| = |z_1(dh)|$. Звідси для малих значень h маємо

$$\left\|L^{-1}\right\| \le \frac{K}{6}\cdot\frac{3dh+3\sqrt{3(dh)^2+9}}{dh-3+\sqrt{3(dh)^2+9}} \le$$
$$\le (dh)^{-1}K\left(1+\frac{dh}{2}+\frac{d^2h^2}{4}\right).$$

Теорему 3 доведено.

Наступна теорема дає оцінку наближення обмеженого розв'язку рівняння (1) методом сплайн-коллокації.

Теорема 4. *Якщо матриця A задовольняє умові (2) і вектор-функція $f(t)$ належить $C^4\left(R^1,\mathbb{C}^m\right)$, то обмежеий розв'язок*

$$\bar a = -6h\cdot L^{-1}\bar f$$

визначає кубічний сплайн $S(t)$, що наближує обмежений розв'язок $y(t) = \left(\Lambda^{-1}f\right)(t)$ рівняння (1)з точністю $O\left(h^4\right)$.

Доведення. Оскільки для $f\in C^4\left(R^1,\mathbb{C}^m\right)$ обмежений розв'язок $y(t)$ рівняння (1) належить $C^5\left(R^1,\mathbb{C}^m\right)\subset C^4\left(R^1,\mathbb{C}^m\right)$, то кубічний сплайн $S(y,t)$, що інтерполює $y(t)$ у вузлах сітки $\Delta(h)$, наближає $y(t)$ з точністю $O\left(h^4\right)$. Для доведення теореми достатньо показати, що різниця $\mathfrak{S}(t) = S(t)-S(y,t)$ сплайна $S(t)$, що наближає розв'язок $y(t)$, і сплайна $S(y,t)$, що інтерполює розв'язок $y(t)$, рівномірно оцінюється величиною $O(h^4)$.

Підставимо в рівняння (6) замість $S(t)$ суму $S(y,t)+\mathfrak{S}(t)$ і віднімемо рівняння (1) при $t=t_k$. Зважаючи, що $y(t_k = S(y,t_k), k\in Z$, одержимо

$\mathfrak{S}'(t_k) - A\mathfrak{S}(t_k) = y'(t_k) - S'(y,t_k)$.

Оскільки за [4, с. 232] різниця

$\delta_k = y'(t_k) - S'(y,t_k) = O(h^4), k\in Z$,

то для параметрів α_k сплайна одержимо систему рівнянь

$(Ah-3I)\alpha_{k+1} + 4Ahy_k + (Ah-3I)\alpha_{k+2} = -6h\delta_k, k\in Z$

з правою частиною, що має оцінку $O(h^5)$. Звідси внаслідок оцінки (16) одержимо

$\alpha_k = O(h^4)$ і $\mathfrak{S} = O(h^4)$.

Теорему 4 доведено.

Розширення класу єдиності розв'язку

Для подальших досліджень розглянемо питання про розширення класу єдиності розв'язку рівняння (1). Деякий простір $E\supset C(R^1,\mathbb{C}^m)$ неперервних на R^1 вектор-функцій $f(t)$ із значеннями в $\mathbb{C}^m$ назвемо класом єдиності розв'язку рівняння (1), якщо на цей простір може бути продовжений оператор Λ^{-1}, визначений зображенням (3). При цьому $y(t) = (\Lambda^{-1}f)(t)$ також належить E і є в цьому просторі єдиним розв'язком рівняння (1). Як зазначено у вступі, за теоремою М. Г. Крейна [1], класом єдиності розв'язку рівняння (1) є простір $C(R^1,\mathbb{C}^m)$. Наступна теорема розширює цей клас єдиності розв'язку рівняння (1) завдяки включення вектор-функцій неперервних по $t\in R^1$, для яких $\|f(t)\|$ може прямувати до нескінченності при $t\to\infty$ з субекспоненціальною швидкістю.

Теорема 5. *Для будь-якої квадратної матриці A порядку m, спектр $\sigma(A)$ якої задовольняє умові (2) при деякому фіксованому $d > 0$, класом єдиності розв'язків рівняння (1) є простір $E = E(R^1, C^m)$ неперервних по $t \in R^1$ вектор-функцій $f(t)$, для яких*

$$\rho_\delta(f) = \sup_{t \in R^1} e^{-\delta|t|} \|f(t)\|_{C^m} < +\infty \qquad (17)$$

для будь-якого $\delta > 0$.

Доведення. Внаслідок умови (2) матрична норма функції Гріна $G(t)$ рівняння (1) допускає оцінку $\|G(t)\| \leqslant Ke^{-d|t|}$, де константа $K \geqslant 1$ залежить від матриці A (якщо A симетрична, то $K = 1$). Тоді з урахуванням умови (17) для $f \in E(R^1, \mathbb{C}^m)$, і $\delta \in (0, d)$ отримаємо

$$\left\|(\Lambda^{-1} f(t))\right\|_{C^m} = \left\|\int_{R^1} G(t-s) f(s) ds\right\|_{C^m} \leqslant K\rho_\delta(t) \cdot \int_{R^1} e^{-d|t-s|} \cdot e^{\delta|s|} ds.$$

Оскільки

$$-d \cdot |t-s| + \delta\,|s| \leqslant$$
$$\leqslant -d \cdot |t-s| + \delta(|s-t| + |t|) =$$
$$= -(d-\delta) \cdot |t-s| + \delta\,|t|,$$

то

$$\left\|(\Lambda^{-1} f)(t)\right\|_{C^m} \leq$$
$$\leq K\rho_\delta(f) e^{\delta|t|} \cdot \int_{R^1} e^{-(d-\delta)|t-s|} ds$$
$$= K\rho_\delta(f) \int_{R^1} e^{-(d-\delta)|s|} ds \cdot e^{\delta(t)} = \frac{2K}{d-\delta} \rho_\delta(f) \cdot e^{\delta|t|}.$$

Звідси випливає, що для всіх $\delta \in (0, d)$

$$\rho_\delta(\Lambda^{-1} f) \leqslant \frac{2K}{d-\delta} \cdot \rho_\delta(f).$$

Це означає, що $\Lambda^{-1} f \in E(R^1, \mathbb{C}^m)$. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що $y(t) = (\Lambda^{-1} f)(t)$ є розв'язком рівняння (1). Оскільки нетривіальні розв'язки однорідного рівняння (1) не належать $E(R^1, \mathbb{C}^m)$, то $y(t)$ єдиний розв'язок рівняння (1) у $E(R^1, \mathbb{C}^m)$.

Теорему 5 доведено.

Нехай $\mathfrak{P}$ — сукупність всіх многочленів $P_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} t^k \alpha_k, n \in N, \alpha_k \in C^m$.

Неважко переконатися, що $\mathfrak{P}$ утворює в $E(R^1, C^m)$ лінійний многовид, а диференціальний оператор Λ є бієктивним відображенням многовиду $\mathfrak{P}$ в себе, що зберігає степінь многочлена. Тому, якщо права частина рівняння (1) — многочлен $P_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} t^k \alpha_k$, то коефіцієнти поліноміального розв'язку $Q_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} t^k \beta_k$ можна знайти із системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\beta_1 - A\beta_0 = \alpha_1, \\
&2\beta_2 - A\beta_1 = \alpha_2, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&m\beta_m - A\beta_{m-1} = \alpha_{m-1}, \\
&-A\beta_m = \alpha_m.
\end{aligned}$$

Беручи до уваги, що при виконанні умови (2) матриця

$$\begin{pmatrix}
-A & I & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & -A & 2I & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & -A & 3I & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -A & mI \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -A
\end{pmatrix}$$

невироджена, ця система є однозначно розв'язною. Таким чином, якщо $f(t)$ — многочлен, то розв'язок рівняння (1) в $E(R^1, \mathbb{C}^m)$ також є многочленом.

Зауважимо, що для систем різницевих рівнянь типу (8) питання про розширення класу єдиності розв'язку розглянуто в [8], де встановлено, що простір послідовностей $\bar{a}$, для яких $\|a_n\|_{C^m}$ має при $n \to \infty$ субекспоненціальне зростання утворює клас єдиності розв'язків системи (8). Послідовності $\bar{a}$, члени яких є значеннями деякого полінома $P_n(t) \in \mathfrak{P}$ у вузлах сітки $\Delta(h)$ будемо позначати символом $[P_n(t)]$ й інтерпретувати як многочлени дискретного аргумента $t \in \Delta(h)$. При виконанні умови (2) різницевий оператор $L(A, \Omega, h)$ породжує бієктивне відображення $\mathfrak{P}$ в себе, що зберігає степінь многочлена. Тому, якщо вектор функція $f(t)$ є многочленом $P_n(t)$, розв'язок $\bar{a}$ системи (8) зі згаданого класу єдиності породжується значеннями на сітці $\Delta(h)$ деякого полінома $Q_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} t^k \beta_k$. Тоді між коефіцієнтами α_k та β_k існує лінійний зв'язок

$$T_n \vec{\beta} = \vec{\alpha},$$

де T_n — квадратна матриця розмірності $n+1$,
$\vec{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)^T$, $\vec{\beta} = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_n)^T$.

Таким чином матриця T_n визначає перетворення многочлена $Q_n(t)$ степені n дискретного аргументу $t \in \Delta(h)$ під дією різницевого оператора $L(A, \Omega, h)$. Обернена матриця в такому разі T_n^{-1} відповідатиме дії оберненого оператора L^{-1}, якщо права частина рівняння (10) — многочлен $P_n(t)$. При цьому добуток $T_n^{-1}\overrightarrow{\alpha}$ визначатиме коефіцієнти поліноміального розв'язку рівняння (10).

Рівняння з малим параметром

Розглянемо диференціальне рівняння з малим параметром $\varepsilon > 0$ і матричним коефіцієнтом A, що задовольняє умові (2):

$$\Lambda(\varepsilon, A) = \varepsilon y' + Ay = f(t). \qquad (18)$$

Множенням рівняння (18) на ε^{-1} можна прийти до рівняння типу (1), яке матиме великий параметр. Наближений розв'язок рівняння (18) шукатимемо у вигляді розвинення (5) методом сплайн-коллокації. При цьому система рівнянь (7) набуде вигляду

$$\frac{\varepsilon}{2h} \cdot A^{-1}(a_{n+1} - a_{n-1}) + \frac{1}{6}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}a_{n-1} = = A^{-1}f(t_n), n \in Z. \qquad (19)$$

При $\varepsilon = 0$ система (19) вироджується в систему рівнянь, яка відповідає задачі побудови інтерполяційного сплайна для вектор-функції $A^{-1}f(t)$ [4].

$$\frac{1}{6}a_{n+1} + \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{6}a_{n-1} = A^{-1}f(t_n). \qquad (20)$$

Відповідно до методу локальної сплайн-апроксимації [4] для послідовності a_n запишемо асимптотичні формули

$$a_n = A^{-1}(-\tfrac{1}{6}f(t_{n+1}) + \tfrac{4}{3}f(t_n) - -\frac{1}{6}f(t_{n-1})) + O(h^4), n \in Z. \qquad (21)$$

Наступна теорема узагальнює асимптотичні формули (21) на випадок системи (19) з малим параметром.

Теорема 6. *Якщо параметр $\varepsilon > 0$ є малим порівняно з h і вектор-функція $f(t)$ в правій частині (8) належить $C^4(R^1, C^m)$, то для розв'язку системи різницевих рівнянь (19) мають місце асимптотичні формули*

$$\begin{aligned} a_n = A^{-1}(&-\tfrac{1}{6}f(t_{n+1}) + \tfrac{4}{3}f(t_n) - \\ &-\tfrac{1}{6}f(t_{n-1})) - \\ &-\tfrac{\varepsilon}{2h}A^{-2}(f(t_{n+1}) - f(t_{n-1})) + \\ &+\tfrac{\varepsilon^2}{h^2}A^{-3}(f(t_{n+1}) - 2f(t_n) + f(t_{n-1})) - \\ &-\tfrac{\varepsilon^3}{2h^3}A^{-4}(f(t_{n+2}) - 2f(t_{n+1}) + 2f(t_{n-1}) - \\ &-f(t_{n-2})) + O(h^4), n \in Z. \qquad (22) \end{aligned}$$

Формули (22) є точними, за умови що $f(t)$ — кубічний многочлен.

Доведення. Вважаючи, що $m = 1$ і $A = \lambda \in C^1(\operatorname{Re}\lambda \neq 0)$, визначимо матрицю T_3 та обернену до неї ${T_3}^{-1}$. Нехай $\mu = \varepsilon \cdot h^{-1}$. Для цього знайдемо образи базисних многочленів $[1], [t], [t^2], [t^3]$ під дією різницевого оператора $L = L(\varepsilon, \lambda, h)$.

$L[1] = [1]$,

$L[t] = \mu \cdot [1] + [t]$,

$L[t^2] = \frac{h^2}{3}[1] + 2\mu[t] + [t^2]$,

$L[t^3] = \mu h^2[1] + h^2[t] + 3\mu[t^2] + [t^3]$.

Звідси знаходимо матриці T_3 та ${T_3}^{-1}$

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & \mu & \frac{h^2}{3} & \mu h^2 \\ 0 & 1 & 2\mu & h^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3\mu \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$${T_3}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\mu & 2\mu^2 - \frac{h^2}{3} & 6\mu^3 - \mu h^2 \\ 0 & 1 & -2\mu & 6\mu^2 - h^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3\mu \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо праву частину $f(t)$ рівняння (18) розкласти за формулою Тейлора в околі точки $t = t_n$ $f(t) = f(t_n) + f'(t_n)(t - t_n) + \frac{1}{2}f''(t_n)(t - t_n)^2 + \frac{1}{6}f'''(t_n)(t - t_n)^3 + O((t - t_n)^4)$, то, враховуючи вигляд матриці ${T_3}^{-1}$, отримаємо $a_n = f(t_n) - \mu f'(t_n) + (\mu^2 - \frac{h^2}{6})f''(t_n) + (\mu^3 - \frac{\mu h^2}{6})f'''(t_n) + O(h^4)$.

Замінивши в останньому співвідношенні $f'(t_n)$, $f''(t_n)$,$f'''(t_n)$ центральними розділеними різницями

$$f'(t_n) = \frac{f(t_{n+1}) - f(t_{n-1})}{h} - \frac{h^2}{6}f'''(t_n) + O(h^4),$$

$$f''(t_n) = \frac{f(t_{n+1}) - 2f(t_n) + f(t_{n-1})}{h^2} + O(h^2),$$

$$f'''(t_n) = \frac{f(t_{n+2}) - 2f(t_{n+1}) + 2f(t_n) - f(t_{n-2})}{2h^3} + +O(h^2),$$

отримаємо (22). Теорему 6 доведено.

Висновки

Запропонована модифікація методу сплайн-коллокації адаптована на випадок наближення кубічними сплайнами обмежених розв'язків рівняння (1). При цьому задача пошуку обмежених розв'язків зводиться до задачі пошуку обмежених розв'язків нескінченної системи різницевих рівнянь (10) із тридіагональной матрицею. Зважаючи на те, що ця матриця взагалі кажучи не має діагональної переваги, для вивчення розв'язності цієї системи отримано явне представлення (16). При достатній гладкості вектор-функції $f(t)$ $f \in C^4(R^1, \mathbb{C}^m)$ пропонований метод забезпечує максимально можливу за порядком точність $O(h^4)$ наближення кубічними сплайнами. Для досягнення такої точності при наближенні розв'язків крайових задач для рівнянь другого порядку в [4] побудовані п'ятидіагональні системи різницевих рівнянь.

Апроксимація обмежених розв'язків рівняння (1), розглянута в [2, 5, 6], зведена до пошуку обмежених розв'язків тридіагональної системи різницевих рівнянь типу (10). За достатньої гладкості $f(t)$ одержувана точність наближення $O\left(h^2\right)$ відповідає точності наближення похідної центральною розділеною різницею.

Зауважимо, що в [8] для тридіаогнальних різницевих рівнянь (10) встановлено аналог теореми 5, а саме показано що для цієї системи послідовності з субекспоненціальною швидкістю зростання на ∞ утворюють клас єдиності розв'язку. Там також встановлено інваріантність поліномів дискретного аргументу щодо різницевого оператора $L(A, \Omega, h)$ та одержано асимптотичні наближення для розв'язку.

Список літератури

1. Далецкий Ю. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Далецкий, М. Крейн. — М. : Наука, 1970. — С. 536.
2. Городній М. Ф. Властивості розв'язків різницевих і диференціальних рівнянь та їх стохастичних аналогів у банаховому просторі / М. Ф. Городній. Автореферат дис. на здобуття наук. ступеня докт. фіз.-мат. наук : спец. 01.01.02 «Диференціальні рівняння». – К., 2004. — С. 32.
3. Gorbachuk M. L. Boundary-value problems for operator-differential equations / M. L. Gorbachuk, V. I. Gorbachuk // Dordrecht : Kluwer., 1991. — P. 364.
4. Завьялов Ю. С. Методи сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. — М. : Наука, 1980. — С. 352.
5. Чайковський А. В. Функції від оператора зсуву та їх застосування до різницевих рівнянь / А. В. Чайковський // Укр. мат. журн. —- 2010. — N. 10. — С. 1408–1419.
6. Романенко В. Н. Наближення обмежених розв'язків різницевих та диференціальних рівнянь в абстрактних просторах розв'язками відповідних задач Коші / В. Н. Романенко. Автореферат дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук : спец. 01.01.02 «Диференціальні рівняння». — К., 2011. — С. 20.
7. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат. — М. : Наука., 1969. — С. 576.
8. Кашпіровський О. Клас єдиності і локальні наближення розв'зків нескінченних стаціонриних систем різницевих рівнянь / О. Кашпіровський, М. Андросенко // Вісн. Київ. ун-ту. Математика, Механіка. — 2011. — N. 25. — С. 7–11.

O. Kashpirovskyi, M. Androsenko

ON SPLINE APPROXIMATIONS OF REAL AXES FOR SOLUTIONS OF DIFFERETIAL EQUATIONS

The possibility of approximation by cubic splines on base of spline collocation method for bounded on real axes solutions of linear differential equations with unbounded operator coefficients is proved. Properties of solutions of difference equation systems defining parameters of collocational spline are studied. It is shown that approximation order of bounded solution to differential equation coincides with the approximation order with interpolation splines.

Keywords: bounded solution, cubic spline, small parameter , conformal mapping, asymptotic exposition, class of uniqueness of solutions.

Матеріал надійшов 16.03.2012