УДК 512.56+512.64

Дяченко С. М.

НАПІВГРУПИ РІССА НАД ЦИКЛІЧНОЮ ГРУПОЮ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ СКІНЧЕННОГО ЗОБРАЖУВАЛЬНОГО ТИПУ

У цій статті ми розглядаємо напівгрупи Рісса над циклічною групою четвертого порядку та описуємо напівгрупи скінченного зображувального типу в модулярному випадку, тобто, коли характеристика основного поля рівна два.

Ключові слова: напівгрупа Рісса, Моріта еквівалентний, зображення, матрична задача.

Вступ

Нехай $C_4 = \{e, a, a^2, a^3 \,|\, a^4 = e\}$ — циклічна група четвертого порядку і B — не нульова $n \times m$ матриця над $C_4 \cup \{0\}$. Для кожного $g \in C_4$ та пари індексів (i, j), $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ розглянемо $m \times n$ матрицю $(g)_{ij}$. У цієї матриці на місці (i, j) стоїть елемент g, а решта рівні нулю. Позначимо $\mathcal{R}(C_4, B)$ множину всіх таких матриць разом з нульовою матрицею. Визначимо множення «$*$» таким чином

$$(g)_{ij} * (g')_{i'j'} = (g)_{ij} \cdot B \cdot (g')_{i'j'},$$

де «$\cdot$» — звичайне множення матриць. Тоді множина $\mathcal{R}(C_4, B)$ разом з операцією «$*$» називається напівгрупою Рісса над групою C_4 з сендвіч-матрицею B.

Позначимо $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(C_4, B)$. Нехай також поле F має характеристику два. Нас буде цікавити зображувальний тип напівгрупи $\mathcal{R}(B)$ над полем F. Зауважимо, що задача про опис зображень напівгрупи $\mathcal{R}(B)$ еквівалентна задачі про опис зображень її напівгрупової алгебри $F[\mathcal{R}(B)]$.

Позначимо $\mathcal{M}(B) = F[\mathcal{R}(B)]$. Тоді $\mathcal{M}(B)$ — це алгебра всіх $m \times n$ матриць над груповою алгеброю $F[C_3]$ з множенням $M_1 * M_2 = M_1 B M_2$.

Аналогічно, як у статті [1], доводиться, що за матрицею B можна побудувати так зване «спрощення» — матрицю D, що має такий вигляд:

$$D = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де

$$A_1 = \mathrm{diag}(a + e, \ldots, a + e),$$
$$A_2 = \mathrm{diag}((a + e)^2, \ldots, (a + e)^2),$$
$$A_3 = \mathrm{diag}((a + e)^3, \ldots, (a + e)^3)$$

— діагональні матриці.

При цьому алгебри $\mathcal{M}(B)$ та $\mathcal{M}(D)$ мають однаковий зображувальний тип.

Основний результат

У цьому розділі ми доведемо теорему, що описує всі напівгрупи Рісса скінченного типу. Це основна теорема статті.

Теорема 1. *Алгебра $\mathcal{M}(B)$ має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли її спрощення — матриця D дорівнює одній з таких матриць:*

$$(e), \quad \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & a + e \end{pmatrix}.$$

Доведення теореми ми проведемо в декілька кроків.

Твердження 2. *Якщо матриця D містить нульовий рядок (стовпчик) і $\tilde{D}$ — матриця, отримана за допомогою викреслення цього рядка (стовпчика), то алгебра $\mathcal{M}(\tilde{D})$ є факторалгеброю алгебри $\mathcal{M}(D)$ за деяким ідеалом.*

Доведення. Доведемо твердження у випадку, коли m-й стовпчик матриці D є нульовим. Розглянемо алгебру $\mathcal{M}(D)$, вона має базис e_{ij}, a_{ij}, $\bar{a}_{ij}$, $\bar{\bar{a}}_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, де e_{ij} — це матриця з єдиним ненульовим елементом e на місці (i, j), a_{ij} — це матриця з єдиним ненульовим елементом a на місці (i, j), $\bar{a}_{ij}$ — це матриця з єдиним ненульовим елементом a^2 на місці (i, j), $\bar{\bar{a}}_{ij}$ — це матриця з єдиним ненульовим елементом a^3 на місці (i, j). Лінійний підпростір

$$I = \langle e_{m1}, \ldots, e_{mn}, a_{m1}, \ldots, \bar{a}_{m1}, \ldots, \bar{\bar{a}}_{m1}, \ldots, \bar{\bar{a}}_{mn} \rangle$$

є ідеалом в $\mathcal{M}(D)$. Дійсно, $De_{mj} = 0$, тоді $x * e_{mj} = 0$ для всіх $x \in \mathcal{M}(D)$, отже, I є лівим ідеалом. Матриця e_{mj} має ненульові елементи лише у m-му рядку, а отже, матриця $e_{mj} * x$ має ненульові елементи лише у m-му рядку, отже, I

є правим ідеалом, а отже, двостороннім ідеалом. Аналогічне справедливо для a_{mj}, $\bar{a}_{mj}$, $\bar{\bar{a}}_{mj}$. Отже, I — ідеал. Легко бачити, що $\mathcal{M}(D)/I \simeq \mathcal{M}(\tilde{D})$.

Твердження 3. *Алгебри $\mathcal{M}(D)$ з однією з таких сендвіч-матриць D є нескінченного зображувального типу.*

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведення. У випадку

$$D = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

алгебра $\mathcal{M}(D)$ має базис

$$\{e_{ij}, a_{ij}, \bar{a}_{ij}, \bar{\bar{a}}_{ij} \,|\, 1 \le i, j \le 2\}$$

(позначення як у попередньому твердженні). Помітимо, що $e_{22} = e_{21} * e_{12}$, $a_{12} = a_{11} * e_{12}$, $a_{21} = e_{21} * a_{11}$, $a_{22} = e_{21} * a_{11} * e_{12}$, $\bar{a}_{11} = a_{11}^2$, $\bar{a}_{12} = \bar{a}_{11} * e_{12}$, $\bar{a}_{21} = e_{21} * \bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22} = e_{21} * \bar{a}_{11} * e_{12}$, $\bar{\bar{a}}_{11} = a_{11} * a_{11} * a_{11}$, $\bar{\bar{a}}_{12} = \bar{\bar{a}}_{11} * e_{12}$, $\bar{\bar{a}}_{21} = e_{21} * \bar{\bar{a}}_{11}$, $\bar{\bar{a}}_{22} = e_{21} * \bar{\bar{a}}_{11} * e_{12}$.

Таким чином, система твірних алгебри складається з таких елементів $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, a_{11}\}$. Маємо такі співвідношення:

$e_1 * e_1 = e_1$; $e_2 * e_1 = 0$; $a_1 * e_1 = a_1$;
$e_1 * e_2 = e_2$; $e_2 * e_2 = 0$; $a_1 * a_1 * a_1 * a_1 = e_1$;
$e_1 * a_1 = a_1$; $e_2 * a_1 = 0$.

Розглянемо таке зображення $R(X)$ алгебри, при якому елементам $e_{11}, e_{12}, e_{21}, a_{11}$ відповідають такі матриці:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & X & 0 & 0 \\ E & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можна перевірити, що для такого набору матриць виконуються всі співвідношення алгебри, отже, це дійсно є зображенням алгебри. Легко перевірити, що два такі зображення $R(X)$ та $R(X')$ еквівалентні тоді і лише тоді, коли існує невироджена матриця S така, що $X' = S^{-1}XS$. Отже, задача є нескінченного типу.

У випадку

$$D = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

базис алгебри складається з елементів $\{e_{i1}, a_{i1}, \bar{a}_{i1}, \bar{\bar{a}}_{i1} \,|\, 1 \le i \le 3\}$. Помітимо, що виконуються такі співвідношення $a_{i1} = e_{i1} * a_{11}$, $\bar{a}_{11} = a_{11} * a_{11}$, $\bar{\bar{a}}_{11} = a_{11} * a_{11} * a_{11}$, $\bar{a}_{i1} = e_{i1} * a_{11} * a_{11}$, $\bar{\bar{a}}_{i1} = e_{i1} * a_{11} * a_{11} * a_{11}$, $1 < i \le 3$.

Отже, система твірних алгебри складається з елементів $\{e_{11}, e_{21}, e_{31}, a_{11}\}$. Співвідношення такі:

$e_{11} * e_{11} = e_{11}$; $e_{11} * e_{21} = 0$; $e_{11} * e_{31} = 0$;
$e_{21} * e_{11} = e_{21}$; $e_{21} * e_{21} = 0$; $e_{21} * e_{31} = 0$;
$e_{31} * e_{11} = e_{31}$; $e_{31} * e_{21} = 0$; $e_{31} * e_{31} = 0$;
$a_{11} * e_{11} = a_{11}$; $a_{11} * e_{21} = 0$; $a_{11} * e_{31} = 0$;
$a_{11} * a_{11} * a_{11} * a_{11} = e_{11}$.

Розглянемо таке зображення $R(X)$ алгебри, при якому елементам $e_{11}, e_{21}, e_{31}, a_{11}$ відповідають такі матриці:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ X & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можна перевірити, що для такого набору матриць виконуються всі співвідношення алгебри, отже, це дійсно є зображенням алгебри. Легко перевірити, що два такі зображення $R(X)$ та $R(X')$ еквівалентні тоді і лише тоді, коли існує невироджена матриця S така, що $X' = S^{-1}XS$. Отже, задача є нескінченного типу.

Твердження 4. *Якщо матриці A_1, A_2 та A_3 — порожні, то алгебра $\mathcal{M}(D)$ має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли*

$$D = (e).$$

Доведення. Нехай матриця D має розмір $n \times m$ і має єдиний ненульовий елемент e на місці $(1, 1)$. Позначимо таку матрицю $\mathcal{E}_{n,m}$. Якщо $n \ge 3$, то за твердженням 2 алгебра $\mathcal{M}(\mathcal{E}_{n,m})$ має фактор-алгебру $\mathcal{M}(\mathcal{E}_{3,1})$, яка є нескінченного зображувального типу за твердженням 3, а отже, і сама алгебра нескінченного типу, бо алгебра, що має фактор-алгебру нескінченного типу, сама є алгеброю нескінченного типу. Аналогічно розглядається випадок $m \ge 3$. Таким чином, $m, n \le 2$, але якщо $m = n = 2$, то за твердженням 3 алгебра також матиме нескінченний тип.

Отже, можливі лише такі випадки:

$$D = (e), \quad D = \begin{pmatrix} e & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}.$$

У випадку $D = (e)$ ми маємо просто зображення групи C_4 над полем характеристики два. Ця задача скінченного типу (див. [2]). Якщо

$$D = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix},$$

то алгебра має базис $e_1 = (e\ 0)$, $e_2 = (0\ e)$, $a_1 = (a\ 0)$, $a_2 = (0\ a)$, $\bar{a}_1 = (a^2\ 0)$, $\bar{a}_2 = (0\ a^2)$, $\bar{\bar{a}}_1 = (a^3\ 0)$, $\bar{\bar{a}}_2 = (0\ a^3)$. Системою твірних є елементи $\{e_1, e_2, a_1\}$. Розглянемо деяке зображення: M_{e_1}, M_{e_2}, M_{a_1}. Після приведення матриць M_{e_1}, M_{e_2} до вигляду

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

матриця M_{a_1} буде мати такий вигляд

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & 0 & 0 \\ U_{21} & U_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тоді для матриці

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$$

отримаємо задачу про опис оператора U такого, що $U^4 = E$ у векторному просторі градуйованому частково-впорядкованою множиною $S = \{1 < 2\}$. Ця задача нескінченного типу [3, Theorem 1]. Випадок $D = (e\ 0)$ розглядається аналогічно.

Твердження 5. *Якщо матриця A_1 не порожня, тобто D містить на головній діагоналі хоча б один елемент $a + e$, то така алгебра має скінченний тип лише у випадку*

$$D = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & a+e \end{pmatrix}.$$

Доведення. Нехай матриця D має порядок $n \times m$, причому на місці $(1,1)$ стоїть e, на місці $(2,2)$ стоїть $a+e$, далі на головній діагоналі стоїть будь-що (0, $a+e$, $(a+e)^2$ або $(a+e)^3$) (зауважимо, що може бути також випадок матриці розміру 2×3 та 3×2). Припустимо, крім того, що $n \geq 3$. Алгебра $\mathcal{M}(D)$ має базис $\{e_{ij}, a_{ij}, \bar{a}_{ij}, \bar{\bar{a}}_{ij} \,|\, 1 \leq i \leq m, 1 \leq i \leq n\}$ (позначення, як вище). Помітимо, що виконуються такі рівності $e_{ij} = e_{i1} * e_{1j}$, $a_{11} = e_{12} * e_{21} + e_{11}$, $a_{1j} = a_{11} * e_{1j}$, $a_{i1} = e_{i1} * a_{11}$, $a_{ii} = e_{i1} * a_{11} * e_{1i}$, $\bar{a}_{11} = a_{11}^2$, $\bar{a}_{1i} = \bar{a}_{11} * e_{1i}$, $\bar{a}_{i1} = e_{i1} * \bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{ii} = e_{i1} * \bar{a}_{11} * e_{1i}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq i \leq n$. Таким чином, система твірних алгебри складається з таких елементів

$$\{e_{11}, e_{1j}, e_{i1} \,|\, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}.$$

Розглянемо зображення $R(X)$ цієї алгебри, при якому

$$M_{e_{11}} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{e_{12}} = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$M_{e_{13}} = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решта матриць нульові. Два такі зображення $R(X)$ та $R(X')$ є еквівалентними тоді і лише тоді, коли існує невироджена матриця S така, що $X' = S^{-1}XS$. Отже, задача є нескінченного типу.

У випадку D розміру 2×2 алгебра матиме систему твірних e_{11}, e_{12}, e_{21}. Після приведення матриці $M_{e_{11}}$,

$$M_{e_{12}} = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{e_{21}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{pmatrix},$$

де для матриць X, Y виконується співвідношення $(XY)^4 = 0$. Ця задача скінченного типу.

Твердження 6. *Якщо матриця A_1 порожня, а A_2 або A_3 не порожня, тобто D містить на головній діагоналі хоча б один елемент $(a+e)^2$ або $(a+e)^3$, то така алгебра має нескінченний зображувальний тип.*

Доведення. Нехай матриця D має порядок $n \times m$, причому на місці $(1,1)$ стоїть e, на місці $(2,2)$ стоїть $(a+e)^2$ або $(a+e)^3$, далі на головній діагоналі стоїть 0, або $(a+e)^2$, або $(a+e)^3$. Алгебра $\mathcal{M}(D)$ має базис $\{e_{ij}, a_{ij}, \bar{a}_{ij}, \bar{\bar{a}}_{ij} \,|\, 1 \leq i \leq m, 1 \leq i \leq n\}$. Помітимо, що $e_{ii} = e_{i1} * e_{1i}$, $a_{1j} = a_{11} * e_{1j}$, $a_{i1} = e_{i1} * a_{11}$, $a_{ii} = e_{i1} * a_{11} * e_{1i}$, $\bar{a}_{11} = a_{11}^2$, $\bar{a}_{1j} = \bar{a}_{11} * e_{1j}$, $\bar{a}_{i1} = e_{i1} * \bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{ij} = e_{i1} * \bar{a}_{11} * e_{1j}$, $\bar{\bar{a}}_{11} = a_{11}^3$, $\bar{\bar{a}}_{1j} = \bar{\bar{a}}_{11} * e_{1j}$, $\bar{\bar{a}}_{i1} = e_{i1} * \bar{\bar{a}}_{11}$, $\bar{\bar{a}}_{ij} = e_{i1} * \bar{\bar{a}}_{11} * e_{1j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq i \leq n$. Таким чином, система твірних алгебри складається з таких елементів

$$\{e_{11}, e_{1j}, e_{i1}, a_{11} \,|\, 1 \leq i \leq m, 1 \leq i \leq n\}.$$

Розглянемо таке зображення $R(X)$ алгебри, при якому елементам $e_{11}, e_{12}, e_{21}, a_{11}$ відповідають такі матриці:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & X & 0 & 0 \\ E & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а решті твірних відповідають нульові матриці. Можна перевірити, що для такого набору матриць виконуються всі співвідношення алгебри, отже, це дійсно є зображенням алгебри. Легко перевірити, що два такі зображення $R(X)$ та $R(X')$ еквівалентні тоді і лише тоді, коли існує невироджена матриця S така, що $X' = S^{-1}XS$. Отже, задача нескінченного типу.

Висновки

У статті ми розглянули напівгрупи Рісса над циклічною групою четвертого порядку. Ми вивчали їх зображувальний тип у модулярному випадку і дали опис усіх напівгруп, що мають скінченний зображувальний тип.

Список літератури

1. Дяченко С. М. Напівгрупи Рісса над циклічною групою третього порядку скінченного зображувального типу / С. М. Дяченко // Наукові записки НаУКМА. — 2010. — Т. 100 : Фізико-математичні науки. — С. 7–10.
2. Brenner S. Modular representations of p-groups / S. Brenner // J. Algebra. — 1970. — No. 1. — P. 69–102.
3. Bondarenko V. M. Linear operators on S-graded vector spaces / V. M. Bondarenko // Linear algebra and its applications. — 2003. — Vol. 365. — P. 45–90.
4. Понизовский И. С. О конечности типа полугрупповой алгебры конечной вполне простой полугруппы / И. С. Понизовский // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1972. — Т. 28. — С. 154–163.

S. Dyachenko

ON FINITE REPRESENTATION TYPE REES SEMIGROUP OVER THE CYCLIC GROUP OF ORDER FOUR

Rees semigroup over C_4 is considered. Semigroups of finite representation type is described in modular case.

Keywords: Rees semigroup, Morita equivalent, representation, matrix problem.

Матеріал надійшов 29.08.2014