УДК 519.11+519.173

Дуденко М. А.

УНІЦИКЛІЧНІ ГРАФИ МЕТРИЧНОЇ РОЗМІРНОСТІ 2

Охарактеризовано певні родини уніциклічних графів, що мають метричну розмірність 2.

Ключові слова: простий граф, метричний простір, метричний базис, метрична розмірність, уніциклічний граф.

1. Поняття метричного генератора і метричної розмірності простих графів було введено у 2000 році в статті [1]. Метричні генератори використовуються в задачах перевірки ізоморфності графів, у задачах пошуку підпростору, ізометричного даному, для пошуку ізометрій метричного простору, що є розширенням ізометрії фіксованого підпростору, в робототехніці тощо [2–6].

При дослідженні метричних генераторів графів природно виникають задачі характеризації метричної розмірності певних родин графів, а також опис родин, для яких метрична розмірність буде дорівнювати наперед заданому числу. Так, у роботі [2] наведено явну формулу, використовуючи яку можна обчислити метричну розмірність дерев, а в статті [3] доведено, що простий граф має метричну розмірність 1 тоді і тільки тоді, коли він є ланцюгом. Також в [3] охарактеризовано всі графи, задані на множині вершин потужності n, що мають метричну розмірність $n-2$ (розмірність $n-1$ має тільки повний граф на n вершинах). Відомо також (див. [4]), що метрична розмірність простого циклу дорівнює 2.

У цій статті ми охарактеризуємо деякі родини уніциклічних графів, що мають метричну розмірність 2.

2. У статті розглядатимемо прості графи, тобто графи без кратних ребер і петель, з неорієнтовними ребрами. Множину ребер такого графа можна ототожнити з підмножиною множини всіх двоелементних підмножин множини вершин.

Нехай $G = (V, E, \partial_E)$ — простий граф з множиною вершин V, $|V| < \infty$, і множиною ребер E. За графом G однозначно визначається метричний простір (V, d_G), визначений на множині вершин V, метрика d_G між двома довільними вершинами v_1 і v_2 дорівнює 0, якщо $v_1 = v_2$, і довжині найкоротшого шляху, що з'єднує вершини v_1 і v_2, якщо $v_1 \neq v_2$.

Листком називається вершина графа, яка має степінь 1. *Внутрішніми* називаються вершини, що мають степінь не менший ніж 3. Внутрішня вершина v *близька до листка* l, якщо немає інших внутрішніх вершин, ближчих до цього листка, тобто немає інших внутрішніх вершин у найкоротшому шляху, що з'єднує v і l.

Внутрішню вершину графа G називатимемо *2-листковою*, якщо їй відповідають рівно 2 листки.

Простий граф називається *уніциклічним*, якщо він містить рівно 1 цикл.

Означення 1. Вершина t *розділяє* вершини x і y, якщо виконується така нерівність:

$$d_G(t, x) \neq d_G(t, y).$$

Означення 2. Множина $M \subset V$ називається *метричним генератором* графа G, якщо для будь-якої пари вершин з V існує $t \in M$, яка розділяє ці вершини. *Метричним базисом* називається метричний генератор графа G, що складається з найменшої кількості вершин.

Кількість вершин у метричному базисі називається *метричною розмірністю* графа G і позначається $\dim G$.

3. У статті [4] було доведено, що для довільного n простий цикл, який містить n вершин, має метричну розмірність 2. Покажемо, що деякі родини графів, які мають подібну структуру, також мають метричну розмірність 2.

Твердження 1. *Нехай G — уніциклічний зв'язний граф, що містить одну вершину степеня 3. Тоді* $\dim G = 2$.

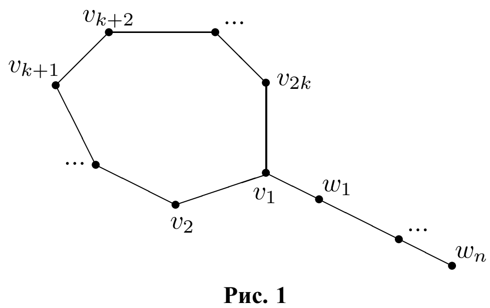

Рис. 1

Доведення. Зрозуміло, що якщо граф G містить цикл, то його розмірність не може бути менша ніж 2.

Оскільки G — уніциклічний зв'язний граф, то єдина його вершина степеня 3 належить циклу. Пронумеруємо вершини графа G, починаючи з вершини степеня 3 (див. рис. 1), і позначимо символами $v_1, \ldots, v_m$ вершини, що належать циклу,

$w_1, \ldots, w_n$ — вершини ланцюга. Розглянемо такі можливі випадки:

1. Припустимо, що існує деяке натуральне $k > 1$, для якого $m = 2k + 1$.

Тоді як базис візьмемо вершини v_{k+1} і v_{k+2}. Тоді для довільних вершин графа u і w, якщо

$$d_G(u, v_{k+1}) = d_G(w, v_{k+1}),$$

то, оскільки вершини v_{k+1} і v_{k+2} сусідні і розташовані «симетрично» в циклі відносно вершини v_1, випливатиме, що

$$d_G(u, v_{k+2}) \neq d_G(w, v_{k+2}).$$

Зауважимо також, що довільна з вершин v_{k+1} і v_{k+2} буде розділяючою для вершин $w_1, \ldots, w_n$ ланцюга.

2. Випадок $m = 2k$ розглядається аналогічно, але як розділяючі вершини можемо взяти пару (v_k, v_{k+1}) або (v_{k+1}, v_{k+2}).

Твердження 2. *Нехай G — уніциклічний граф, що має дві вершини степеня 3, причому одна з них належить циклу, а друга — поза ним. Тоді* $\dim G = 2$.

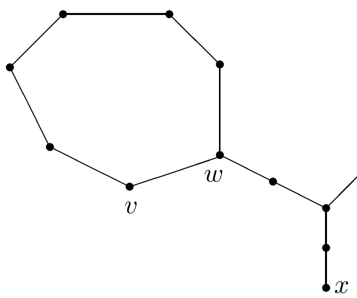

Рис. 2

Доведення. Граф G містить цикл, а отже, його розмірність не може бути менша двох. Покажемо, що метричний базис графа складатиметься з двох вершин.

Припустимо, що w і w' — вершини степеня 3 в циклі і поза ним відповідно. З вершини w' можуть починатись лише два ланцюги, оскільки вона має степінь 3. Позначимо символом x один з листків графа G. Вершина x буде розділяючою для всіх точок ланцюга, для якого вона є початком, і шляху від вершини x до вершини w. Оскільки для того, щоб розділити всі вершини циклу, достатньо взяти дві сусідні вершини, то виберемо в метричний базис вершину v, що є суміжною з w, і вершину x. Вершина x не розділятиме вершини, розташовані на однаковій відстані від вершини w', а також вершини, розташовані «симетрично» в циклі відносно вершини w. Легко перевірити, що ці вершини розділяє v. Отже, $\dim G = 2$.

Нехай, як і раніше, $G = (V, E)$ — уніциклічний граф. Символом V_1 позначимо підмножину всіх вершин графа G, що належать циклу.

Означення 3. Говоритимемо, що вершина $u \in$ $\in V \setminus V_1$ графа G *проектується* у вершину $w \in V_1$, якщо для довільної вершини $q \in V_1$ виконується нерівність:

$$d_G(u, w) < d_G(u, q).$$

Для довільних двох вершин u, v графа G, якщо $u, v \in V_1$, то існує два шляхи в циклі, що з'єднують ці вершини. Позначимо їх P_1 і P_2, а їх довжини — $d_G(P_1)(u, v)$ і $d_G(P_2)(u, v)$ відповідно.

Означення 4. Говоритимемо, що вершини u і v *розташовані симетрично* в графі G, якщо має місце рівність:

$$d_G(P_1)(u, v) = d_G(P_2)(u, v),$$

і є *майже симетричними*, якщо

$$d_G(P_1)(u, v) = d_G(P_2)(u, v) + 1,$$

де P_1, P_2 — шляхи, що з'єднують u і v.

Теорема 3. *Нехай $G = (V, E)$ — уніциклічний граф і $\dim G = 2$. Тоді існує не більше двох вершин у циклі, в які можуть проектуватися вершини степеня 3, що лежать поза циклом.*

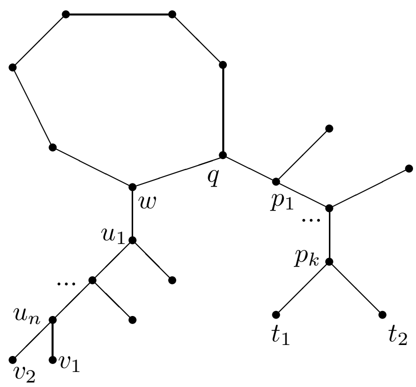

Рис. 3

Доведення. Нехай w, q — вершини уніциклічного графа G, що належать циклу і в які проектуються вершини степеня 3 поза циклом. Зрозуміло, що обидві вершини w, q мають степінь 3.

Припустимо, що в графі G є n вершин $u_1, \ldots, u_n$ степеня 3 поза циклом, які проектуються в w, і k вершин $p_1, \ldots, p_k$, що проектуються в q. Вершини u_n і p_k є 2-листковими. Виберемо до базису листки v_1 і t_1, що близький до u_n і p_k відповідно (див. рис. 3). Покажемо, що вершини v_1 і t_1 утворюють метричний базис графа G. Для того щоб розділити всі вершини циклу, достатньо взяти дві його вершини, не розташовані в циклі симетрично.

Оскільки листок v_1 з'єднаний ланцюгом з w, а t_1 — з q, то v_1 і t_1 будуть розділяти ті вершини в циклі, що й w і q. Вершини w і q не розташовані в циклі симетрично, а тому t_1 і v_1 розділятимуть вершини циклу. Решта вершин $u_1, \ldots, u_{n-1}, p_1, \ldots, p_{k-1}$ мають по одному листку. Вершина v_1 не розділятиме вершини, розташовані на однаковій відстані від вершин $u_1, \ldots, u_{n-1}$, але їх розділятиме вершина t_1. Аналогічно вершина t_1 не розділятиме вершини, розташовані на однаковій відстані від вершин $p_1, \ldots, p_{k-1}$, але їх розділятиме вершина v_1. Отже, можуть існувати дві вершини в циклі уніциклічного графа G, в які може проектуватись довільна кількість вершин степеня 3, у випадку $\dim G = 2$.

Припустимо тепер, що існує ще одна вершина h в циклі уніциклічного графа G, в яку проектується вершина p степеня 3 поза циклом. Вершина p є 2-листковою. Позначимо відповідні їй листки символами p_1, p_2. Жодна з вершин u_1 і v_1 їх не розділятиме, а тому в цьому випадку виконуватиметься нерівність:

$$\dim G > 2.$$

Що й доводить твердження теореми.

Теорема 4. *Нехай G — уніциклічний граф, утворений склеюванням вершини простого циклу C і листка дерева T. Тоді*

$$\dim G \geq \dim T.$$

Доведення. Метричний базис графа G повинен розділяти вершини дерева T. Відстань від довільної вершини циклу до деякої вершини дерева буде більшою на деяке натуральне число від відстані від листка дерева, за яким відбувалося склеювання, до вершини дерева. А тому метрична розмірність графа G буде не меншою за метричну розмірність дерева T.

Зауважимо, що у твердженні теореми 4 може бути як строга нерівність, прикладом є твердження 1, так і досягатись рівність, як у твердженні 2.

З теореми 4 безпосередньо випливає

Наслідок 5. *Якщо G — уніциклічний граф і $\dim G = 2$, то G не містить поза циклом вершин степеня строго більшого, ніж 3.*

Доведення. Доведення випливає з теореми 4 і формули обчислення метричної розмірності дерев, доведеної в роботі [2].

4. Залежно від кількості вершин у циклі графа будемо розрізняти парні та непарні уніциклічні графи.

Означення 5. Уніциклічний граф G називатимемо *непарним*, якщо він містить непарну кількість вершин у циклі, і *парним* — в іншому випадку.

Опишемо ще декілька родин графів, метрична розмірність яких дорівнює 2.

Твердження 6. *Нехай G — непарний уніциклічний граф, у якого степінь довільної вершини не перевищує 3, причому всі вершини степеня 3 належать циклу. Тоді*

$$\dim G = 2.$$

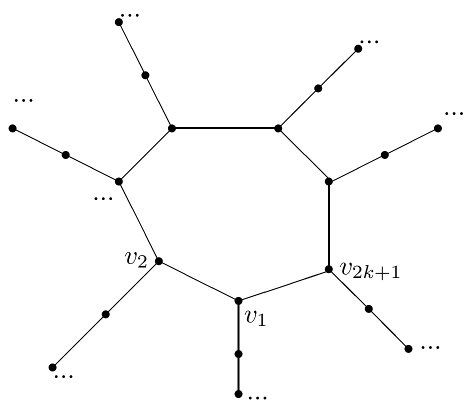

Рис. 4

Доведення. Пронумеруємо вершини циклу графа G і позначимо їх $v_1, \ldots, v_{2k+1}$. Також позначимо $w_1^1, \ldots, w_1^{n_1}$ — вершини першого ланцюга, $w_2^1, \ldots, w_2^{n_2}$ — вершини другого ланцюга, $w_{2k+1}^1, \ldots, w_{2k+1}^{n_{2k+1}}$ — вершини останнього ланцюга. Виберемо пару вершин v_1, v_{k+1}. Покажемо, що вони утворюють метричний базис графа G. Вершини v_1, v_{k+1} є майже симетричними в циклі, тому ті вершини, які не будуть розділятись вершиною v_1, будуть розділятись v_{k+1}, і навпаки. Крім того, вершини, які не розділятиме v_1, такі як v_3 і w_2^1, також розділятимуться вершиною v_{k+1}, і навпаки, вершини, що не розділятимуться v_{k+1}, розділятимуться v_1. Отже, $\dim G = 2$.

Теорема 7. *Нехай G — непарний уніциклічний граф. Тоді якщо існує не більше двох вершин у циклі графа G, в які можуть проектуватися вершини степеня 3, що лежать поза циклом графа G, то* $\dim G = 2$.

Доведення. Доведення цієї теореми безпосередньо випливає з доведення теореми 3 і того факту, що якщо в циклі графа непарна кількість вершин, то вершини, в які проектуються вершини степеня 3, що лежать поза циклом, не можуть бути симетричними в циклі.

Твердження 8. *Нехай G — парний уніциклічний граф, причому в циклі графа G є рівно дві вершини, що мають степінь 3. Тоді якщо* $\dim G = 2$, *то ці вершини не можуть бути симетричними в циклі.*

Доведення. Нехай маємо парний граф G, у якому вершини u, v проектуються у вершини w, t відповідно. Припустимо, що вершини w і t є симетричними в циклі. Вершини u, v є 2-листковими, тому для того, щоб вершини, що є листками для цих вершин, розділялись, у метричний базис графа G потрібно вибрати листки v_1 і u_1, що відповідають вершинам v і u відповідно. Оскільки w і t є симетричними в циклі, то існують такі вершини p, q, що виконуються рівності:

$$d_G(p, w) = d_G(q, w),$$
$$d_G(p, t) = d_G(q, t).$$

Але тоді виконуватимуться також рівності:

$$d_G(p, v_1) = d_G(q, u_1),$$
$$d_G(p, v_1) = d_G(q, u_1).$$

Звідси випливає, що v_1 і u_1 не будуть розділяючими для p, q. Отже,

$$\dim G > 2.$$

А тому наше припущення неправильне, що й доводить твердження.

Безпосередньо з цього твердження, а також з доведення теореми 3 отримуємо

Наслідок 9. *Нехай G — парний уніциклічний граф, що містить дві вершини степеня 3 в циклі і не містить жодної вершини степеня більшого, ніж 3 поза циклом. Тоді якщо вершини степеня 3 несиметричні в циклі, то* $\dim G = 2$.

Список літератури

1. Resolvability in graphs and the metric dimension of a graph / G. Chartrand, L. Eroh, M. A. Johnson, O. R. Oellermann // Discrete Appl. Math. — 2000. — Vol. 105. — P. 99–113.
2. Sebõ A. On metric generators of graphs / A. Sebõ, E. Tannier // Mathematics of Operations Research. — 2004. — Vol. 29. — P. 383–393.
3. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация: алгоритмы и сложность / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. — М. : Мир, 1984. — 510 с.
4. Khuller S. Landmarks in graphs / S. Khuller, B. Raghavachari, A. Rosenfeld // Disc. Appl. Math. — 1996. — Vol. 70. — P. 217–229.
5. Boundary vertices in graphs / G. Chartrand, D. Erwin, G. L. Johns, P. Zhang // Discrete Math. — 2003. — Vol. 263. — P. 25–34.
6. Estrada-Moreno A. The k-metric dimension of corona product graphs [Electronic resource] / A. Estrada-Moreno, I. G. Yero, J. A. Rodriguez-Valazquez. — 2014. — Mode of access: URL: http://arxiv.org/abs/1401.3780v1. — Title from the screen.

M. Dudenko

UNICYCLIC GRAPHS WITH METRIC DIMENSION 2

Some families of unicyclic graphs with metric dimension 2 are characterized.

Keywords: simple graph, metric space, metric basis, metric dimension, unicyclic graph.

Матеріал надійшов 21.01.2015