Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова.— 2013, № 15.— С. 74–86.

УДК 519.21

Властивості розподілу випадкової неповної суми заданого знакозмінного ряду Люрота з незалежними коефіцієнтами

М. В. Працьовитий, Ю. В. Хворостіна
(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. У роботі досліджується випадкова величина τ, яка є випадковою неповною сумою знакозмінного ряду Люрота з незалежними коефіцієнтами. Доведено критерії належності її розподілу кожному з трьох чистих лебегівських типів (чисто дискретному, чисто абсолютно неперервному і чисто сингулярно неперервному). Досліджено поведінку модуля характеристичної функції випадкової величини τ на нескінченості. Знайдено умову, при якій функція розподілу τ зберігає фрактальну розмірність Хаусдорфа-Безиковича.

Ключові слова: знакозмінний ряд Люрота, випадкова неповна сума (підсума) знакозмінного ряду Люрота, нескінченні згортки Бернуллі, модуль характеристичної функції випадкової величини, лебегівська структура розподілу, розмірність Хаусдорфа-Безиковича.

Abstract. In the paper we study the random variable τ, which is a random partial sum of the alternating Luroth series with independent coefficients. We derive necessary and sufficient conditions for distribution of random variable τ to belong to each of the three pure Lebeg's types (pure discrete, pure absolutely continuous or a pure singularly continuous). We study the behavior module characteristic function of the random variable τ to infinity. The conditions of preserving the fractal Hausdorff-Besicovitch dimension of the probability distribution function of the random variable τ are also found.

Keywords: alternating Luroth series, random incomplete sum (subsum) of alternating Luroth series, infinite Bernoulli convolutions, module characteristic function of the random variable, Lebesgue structure of probability distribution, Hausdorff-Besicovitch dimension.

Вступ

Нехай (a_k) – задана послідовність натуральних чисел,

$$s_k = a_k(a_k + 1), \quad A_k = s_1 s_2 \dots s_{k-1} a_k.$$

Тоді $A_{k+1} = A_k(a_k + 1)a_{k+1}$. Числовий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{A_k}, \tag{1}$$

називається знакозмінним рядом Люрота, при цьому a_k називається його k-тим натуральними елементом. Відомо [11], що будь-яке ірраціональне число $x \in (0; 1]$ розкладається єдиним чином у знакозмінний ряд Люрота, одні раціональні числа розкладаються в ряд з періодичною послідовністю натуральних елементів, а інші – представляються частинною сумою знакозмінного ряду Люрота двома різними способами.

Розглядається випадкова величина (в.в.)

$$\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\tau_k}{A_k}, \tag{2}$$

де (τ_k) — послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 і 1 з ймовірностями p_{0k}, p_{1k} відповідно, причому $p_{0k}+p_{1k} = 1$. Розподіл в.в. τ є нескінченною згорткою Бернуллі, керованою рядом (1). Згідно з теоремою Джессена-Вінтнера [9] випадкова величина τ має чистий лебегівський тип розподілу: чисто дискретний, чисто абсолютно неперервний або чисто сингулярний, причому критейрій дискретності є наслідком відомої теореми П. Леві [12]: розподіл τ є дискретним тоді і тільки тоді, коли

$$M \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0.$$

Множина всіх неповних сум $E(a_n) = \{x : x = \sum\limits_{k \in K \subset \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k-1}}{A_k},\ K \in 2^{\mathbb{N}}\}$ ряду Люрота, визначеного послідовністю (a_n), є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега, якщо нерівність $a_n \neq 1$ виконується нескінченну кількість разів ([5]). Тому абсолютно неперервний розподіл можливий лише за умови $a_n = 1$ для всіх n, більших деякого n_0. Саме по цій причині даний випадок заслуговує на окрему увагу.

У цій роботі ми шукаємо вичерпну відповідь на питання про лебегівську структуру (лебегівський тип) розподілу τ, тополого-метричні та фрактальні властивості спектра розподілу (мінімального замкнутого носія), а також поведінку модуля характеристичної функції $f_\tau(t) = Me^{it\tau}$ на нескінченності.

1. Нега-двійкове зображення та його геометрія

Випадок $a_n = 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, для якого множина неповних сум $E(a_n)$ ряду Люрота є відрізком, потребує окремого розгляду.

Відомо, що для довільного $x \in \left[-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$ існує послідовність (α_n), $\alpha_n \in \{0; 1\}$, така, що

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-2)^{n-1}} = \frac{\alpha_1}{2^0} - \frac{\alpha_2}{2^1} + \frac{\alpha_3}{2^2} - \frac{\alpha_4}{2^3} + \ldots \equiv \bar{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}.$$

Символічний (скорочений) запис $\bar{\Delta}^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$ називається *нега-двійковим зображенням.* Раціональні числа відрізка $\left[-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$ мають періодичне нега-двійкове зображення, а деякі з них мають два формально різних зображення $\bar{\Delta}^2_{\alpha_1\ldots\alpha_m 0(01)}$ і $\bar{\Delta}^2_{\alpha_1\ldots\alpha_m 1(10)}$.

Це зображення має геометрію, яка відмінна від геометрії класичного двійкового зображення:

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \ldots \equiv \Delta^2_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}.$$

Вона відображається у властивостях циліндричних множин.

Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — фіксований набір нулів та одиниць. *Циліндром рангу m з основою $c_1c_2\ldots c_m$*, що відповідає нега-двійковому зображенню, називається множина $\bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m}$ всіх чисел, які мають зображення $\bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m\alpha_{m+1}\ldots\alpha_{m+j}\ldots}$, $\alpha_{m+j} \in \{0, 1\}$, $j \in N$.

Циліндри мають властивості:

1. $\bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m} = \bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m 0} \cup \bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m 1}$.
2. Циліндр $\bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m}$ є відрізком, причому
$$\bar{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_{2k-1}} = \left[\sum_{n=1}^{2k-1} \frac{(-1)^{n-1}c_n}{2^{n-1}} - \frac{1}{3\cdot 2^{2k-3}}; \sum_{n=1}^{2k-1} \frac{(-1)^{n-1}c_n}{2^{n-1}} + \frac{1}{3\cdot 2^{2k-2}}\right];$$
$$\bar{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_{2k}} = \left[\sum_{n=1}^{2k} \frac{(-1)^{n-1}c_n}{2^{n-1}} - \frac{1}{3\cdot 2^{2k-1}}; \sum_{n=1}^{2k} \frac{(-1)^{n-1}c_n}{2^{n-1}} + \frac{1}{3\cdot 2^{2k-2}}\right].$$
3. $\max \bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_{2k-2}0} = \min \bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_{2k-2}1}$;
$\min \bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_{2k-1}0} = \max \bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_{2k-1}1}$.
4. $\operatorname{diam}\bar{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m} = |\bar{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}| = \dfrac{1}{2^{m-1}}$.
5. Основне метричне відношення:
$$\frac{|\bar{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m i}|}{|\bar{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m}|} = \frac{1}{2}.$$
6. Для будь-якої послідовності (c_n) має місце рівність
$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bar{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m} = \bar{\Delta}^2_{c_1c_2\ldots c_m\ldots}.$$

Лема 1. *Строго зростаюча функція*

$$y = f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x,$$

яка відображає відрізок $\left[-\frac{2}{3};\ \frac{4}{3}\right]$ *на* $[0;1]$*, коректно визначається рівністю*

$$f(\bar{\Delta}^2_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}) = \Delta^2_{a_1[1-a_2]a_3[1-a_4]a_5\ldots}. \tag{3}$$

Доведення. Справді, якщо $x = \bar{\Delta}^2_{a_1a_2\ldots a_n\ldots}$, то

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2}x = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2k-1}}{2^{2k-2}} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2k}}{2^{2k-1}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2k-1}}{2^{2k-1}} + \left(\frac{1}{3} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2k}}{2^{2k}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{2k-1}}{2^{2k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-a_{2k}}{2^{2k}} = \Delta^2_{a_1[1-a_2]a_3[1-a_4]a_5\ldots}.$$

Коректність означення функції f рівністю (3) могла б бути порушеною, якщо для двох різних нега-двійкових зображень числа

$$x = \bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m 0(01)} = \bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m 1(10)}$$

рівність (3) давала б різні результати (значення). Але

$$f(\bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_{2k-1}0(01)}) = \Delta^2_{c_1[1-c_2]\ldots[1-c_{2k-2}]c_{2k-1}1(00)},$$

$$f(\bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_{2k-1}1(10)}) = \Delta^2_{c_1[1-c_2]\ldots[1-c_{2k-2}]c_{2k-1}0(11)} = \Delta^2_{c_1[1-c_2]\ldots[1-c_{2k-2}]c_{2k-1}1(00)},$$

$$f(\bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_{2k}0(01)}) = \Delta^2_{c_1[1-c_2]\ldots[1-c_{2k}]1(00)},$$

$$f(\bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_{2k}1(10)}) = \Delta^2_{c_1[1-c_2]\ldots[1-c_{2k}]0(11)} = \Delta^2_{c_1[1-c_2]\ldots[1-c_{2k}]1(00)}.$$

Тому $f(\bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m 0(01)}) = f(\bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m 1(10)})$ для будь-якого набору $(c_1, c_2, ..., c_m)$ цифр двійкового алфавіту. □

2. Лебегівська структура розподілу

Лема 2. *Випадкова величина*

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\psi_n}{2^n},$$

де ψ_n *– незалежні в. в. такі, що* $P\{\psi_k = 0\} = \frac{1}{2} = P\{\psi_k = 1\}$*, має рівномірний на відрізку* $\left[-\frac{2}{3};\ \frac{4}{3}\right]$ *розподіл.*

Доведення. Для доведення цього факту досить показати, що для довільного циліндра $\bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m}$ має місце рівність

$$P\{\psi \in \bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m}\} = \frac{1}{2}|\bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m}| = \frac{1}{2^m}.$$

Оскільки випадкові величини ψ_k незалежні і мають вказані розподіли, то

$$P\{\psi_1 = c_1, \psi_2 = c_2, \ldots, \psi_n = c_n, \ldots\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{c_k k} = \lim_{m\to\infty}\frac{1}{2^m} = 0.$$

Враховуючи геометрію знакозмінного ряду Люрота (властивості циліндричних множин неповних сум ряду), маємо

$$P\{\psi \in \bar{\Delta}^2_{c_1\ldots c_m}\} = P\{\psi_1 = c_1, \psi_2 = c_2, \ldots, \psi_m = c_m\} = \prod_{k=1}^{m} p_{c_k k} = \frac{1}{2^m},$$

що й вимагалося довести. □

Наслідок 1. *Якщо існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що при $n \geq n_0$ для послідовності незалежних випадкових величин ψ'_n виконуються рівності $P\{\psi'_n = 0\} = \frac{1}{2} = P\{\psi'_n = 1\}$, то розподіл випадкової величини*

$$\psi' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \psi'_n}{2^n}$$

є кусково рівномірним.

Справді, випадкову величину ψ' можна подати у вигляді:

$$\psi' = \widehat{\psi} + \frac{1}{2^{n_0}}\psi,$$

де $\widehat{\psi} = \sum\limits_{k=0}^{n_0-1} \dfrac{(-1)^k \psi_n}{2^k}$, а ψ – рівномірно розподілена випадкова величина за лемою 2. Враховуючи геометрію циліндричних зображень точок множини неповних сум даного ряду, в.в. ψ' є рівномірно розподіленою на всіх циліндричних відрізках n_0-го рангу таких, що $\Delta_{j_1 j_2 \ldots j_{n_0}}$, $p_{j_k k} > 0$, $k = \overline{1, n_0}$. □

Нехай

$$\delta_k(x) = \delta_k(\bar{\Delta}^2_{a_1(x)a_2(x)\ldots a_n(x)\ldots}) = \begin{cases} a_k(x), & \text{якщо } k \text{ – непарне,} \\ 1 - a_k(x), & \text{якщо } k \text{ – парне.} \end{cases}$$

Теорема 1. *1. Неперервно розподілена випадкова величина*

$$\tau_0 = \bar{\Delta}^2_{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_k \ldots},$$

нега-двійкові цифри τ_k якої є незалежними і мають розподіли:

$$P\{\tau_k = i\} = p_{ik}, \;\; i \in \{0; 1\},$$

має: 1.1 абсолютно неперервний розподіл, якщо

$$L \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (1 - 2p_{\delta_k k})^2 < \infty,$$

причому експоненціальний розподіл зі щільністю $f(x) = \frac{\beta}{e^\beta - 1} \cdot e^{\beta x}$, $-\infty < \beta < \infty$, якщо

$$p_{0k} = \begin{cases} (1 + e^{\frac{\beta}{2^k}})^{-1} & \text{при непарних } k, \\ 1 - (1 + e^{\frac{\beta}{2^k}})^{-1} & \text{при парних } k; \end{cases}$$

1.2 сингулярний, якщо $L = \infty$.

2. Її функція розподілу зберігає фрактальну розмірність Хаусдорфа-Безиковича тоді і тільки тоді, коли у матриці $\|p_{ik}\|$ *відсутні нулі і*

$$\lim_{k\to\infty} p_{0k} = \frac{1}{2}.$$

Доведення. З леми 1 випливає, що випадкові величини

$$\tau_0 = \bar{\Delta}^2_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n\ldots} \quad \text{і} \quad \bar{\tau} = \Delta^2_{\tau_1[1-\tau_2]\tau_3[1-\tau_4]\ldots}$$

де τ_n – незалежні випадкові величини, що мають розподіл $P\{\tau_k = i\} = p_{ik}$, $i = \{0; 1\}$, мають еквівалентні розподіли.

З незалежності членів послідовності (τ_n) випливає незалежність членів послідовності (τ'_n)

$$\tau'_n = \begin{cases} \tau_n & \text{при непарних } n, \\ 1 - \tau_n & \text{при парних } n. \end{cases}$$

Оскільки властивості розподілу випадкової величини

$$\bar{\tau} = \Delta^2_{\tau'_1\tau'_2\ldots\tau'_n\ldots}$$

вивчались у роботах [3, 13, 14], то, проінтерпретувавши відомі факти для $\bar{\tau}$ у термінах означення в.в. τ, ми отримаємо перше твердження з використанням результатів статей [13, 14], а друге – роботи [3]. □

Наслідок 2. *Якщо* $p_{0k} = p_0 = const \neq \frac{1}{2}$, *причому* $0 < p_0 < 1$, *то функція розподілу в.в.* τ *є строго зростаючою сингулярною функцією* $(\lambda\{x : F'(x) \neq 0\} = 0)$, *причому для її математичного сподівання та дисперсії мають місце рівності:*

$$M\tau = \frac{2}{3}p_1; \qquad D\tau = \frac{3}{4}p_0p_1.$$

Справді, оскільки

$$\tau = \tau_1 - \frac{1}{2}\left(\tau_2 - \frac{\tau_3}{2} + \ldots\right) = \tau_1 - \frac{1}{2}\widehat{\tau},$$

де випадкові величини τ, $\widehat{\tau}$ мають однаковий розподіл, то, враховуючи властивості математичного сподівання, маємо

$$M\tau = M\tau_1 - \frac{1}{2}M\widehat{\tau}.$$

Звідси

$$M\tau = \frac{2}{3}p_1.$$

За означенням та властивостями дисперсії маємо

$$D\tau = M(\tau - M\tau)^2 = M\tau^2 - (M\tau)^2.$$

$$D\tau = D\left(\tau_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\widehat{\tau}\right) = D\tau_1 + \frac{1}{4}D\widehat{\tau}.$$

Звідси

$$D\tau = \frac{3}{4}D\tau_1 = \frac{3}{4}(M\tau_1^2 - (M\tau_1)^2) = \frac{3}{4}(p_1 - p_1^2) = \frac{3}{4}p_0p_1. \qquad \square$$

Наступне твердження узагальнює попередні результати про лебегівські властивості розподілу в.в.τ.

Теорема 2. *Неперервний розподіл випадкової величина τ є:*

1) *абсолютно неперервним, якщо існує $n_0 \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n \geq n_0$ має місце рівність $a_n = 1$, і виконується умова:*
$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{p_{0k}\cdot\frac{1}{2}} + \sqrt{p_{1k}\cdot\frac{1}{2}}\right) > 0 \sim L \equiv \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2} - p_{0k}\right)^2 < \infty; \qquad (4)$$
2) *чисто сингулярним в решті випадків, тобто $L = \infty$ або $a_n \neq 1$ нескінченну кількість разів.*

Доведення. Нехай $M = 0$ і елементи знакозмінного ряду Люрота $a_n = 1$ для всіх n більших деякого n_0. При $n_0 > 1$ представимо випадкову величину τ у вигляді

$$\tau = \tau^{(1)} + \tau^{(2)},$$

$$\text{де} \qquad \tau^{(1)} = \sum_{j=1}^{n_0-1}\frac{\tau_j(-1)^{j+1}}{A_j} \quad \text{і} \quad \tau^{(2)} = \frac{(-1)^{n_0-1}}{A_{n_0-1}(a_{n_0-1}+1)}\sum_{k=n_0}^{\infty}\frac{\tau_k(-1)^k}{2^k}.$$

Випадкові величини $\tau^{(1)}$ і $\tau^{(2)}$ є незалежними, бо незалежними є випадкові величини τ_n. Випадкова величина $\tau^{(1)}$ має дискретний розподіл, а тому випадкові величини τ і $\tau^{(2)}$ мають одночасно абсолютно неперервний чи сингулярно неперервний розподіли. Тому, не порушуючи загальності, вважатимемо $n_0 = 1$.

Нехай $\{(\Omega_k, B_k, \mu_k)\}$ і $\{(\Omega_k, B_k, \nu_k)\}$ дві послідовності ймовірнісних просторів такі, що для довільного $k \in \mathbb{N}$

$$\Omega_k = \{0;\, 1\},\ B_k - \sigma\text{-алгебра всіх підмножин } \Omega_k,$$

$$\mu_k(0) = p_{0k}, \quad \mu_k(1) = p_{1k}, \quad \nu_k(0) = \frac{1}{2} = \nu_k(1).$$

Очевидно, що $\mu_k \ll \nu_k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$. Розглянемо нескінченні добутки ймовірнісних просторів:

$$(\Omega, B, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty}(\Omega_k, B_k, \mu_k), \qquad (\Omega, B, \nu) = \prod_{k=1}^{\infty}(\Omega_k, B_k, \nu_k).$$

З теореми Какутані [10] випливає, що $\mu \ll \nu$ тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \rho(\mu_k, \nu_k) > 0, \qquad \text{де } \rho(\mu_k, \nu_k) = \int\limits_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\nu_k}} d\nu_k \text{– інтеграл Хелінгера.}$$

У даному випадку

$$\prod_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\nu_k}} d\nu_k > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{p_{0k} \cdot \frac{1}{2}} + \sqrt{p_{1k} \cdot \frac{1}{2}} \right) > 0.$$

Використавши розклад Тейлора функції $y = \sqrt{1+x}$, отримаємо, що останній добуток збіжний тоді і тільки тоді, коли збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[(1 - 2p_{0k})^2 + (1 - 2p_{1k})^2 \right] < \infty. \tag{5}$$

Оскільки $(1 - 2p_{0k})^2 + (1 - 2p_{1k})^2 = 2\,(1 - 2p_{0k})^2$, то ряди (5) і L збігаються одночасно.

Отже, з умови (4) випливає умова абсолютної неперервності міри μ відносно міри ν.

Розглянемо вимірне відображення $\Omega \xrightarrow{f} \left[-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right]$, яке визначене рівністю:

$$\forall \omega = (\omega_1, ..., \omega_k, ...) \in \Omega : \quad f(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega_k}{2^k}.$$

Для довільної борелівської множини E визначимо образи μ^* і ν^* мір μ і ν під дією відображення f наступним чином:

$$\mu^*(E) = \mu(f^{-1}(E)), \qquad \nu^*(E) = \nu(f^{-1}(E)).$$

Міра μ^* співпадає з ймовірнісною мірою P_τ, а міра ν^* – з ймовірнісною мірою P_ψ. За лемою 2 ймовірнісна міра P_ψ еквівалентна мірі Лебега λ. З абсолютної неперервності міри μ відносно міри ν випливає абсолютна неперервність міри μ^* відносно міри ν^*. Оскільки міра ν^* еквівалентна мірі λ, то з умови (4) випливає абсолютна неперервність розподілу випадкової величини τ.

Отже, для неперервно розподіленої в.в. τ, якщо $a_n = 1$ для всіх натуральних n більших деякого n_0 і деяка підпослідовність $p_{\tau_k k}$ досить швидко збігається до $\frac{1}{2}$, то розподіл випадкової величини τ буде абсолютно неперервним, а якщо підпослідовність $p_{\tau_k k}$ збігається до значення, відмінного від $\frac{1}{2}$, або $a_n \neq 1$ для нескінченної множини значень, то розподіл τ буде сингулярним, в останньому випадку – канторівського типу. $\square$

3. Асимптотичні властивості модуля характеристичної функції

Характеристичною функцією $f_X(t)$ *випадкової величини* X називається математичне сподівання комплекснозначної випадкової величини e^{itX}, тобто

$$f_X(t) = Me^{itX}.$$

Апарат характеристичних функцій зручний для дослідження структури і властивостей розподілів дійснозначних випадкових величин [10]. Зокрема, відомо [2], що величина

$$L_X = \lim_{|t|\to\infty} \sup |f_X(t)|$$

дорівнює:

1) 1 для дискретно розподіленої випадкової величини X;

2) 0 для абсолютно неперервно розподіленої випадкової величини X.

Для сингулярних розподілів L_X може набувати всіх значень з $[0; 1]$. Сингулярні розподіли з $L_X = 1$ близькі до дискретних, а з $L_X = 0$ — до абсолютно неперервних. Тому величина L_X характеризує близькість за властивостями сингулярного розподілу до дискретного чи абсолютно неперервного.

Лема 3. *Характеристична функція випадкової величини* τ, *визначеної рівністю* (2), *має вигляд*

$$f_\tau(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(p_{0k} + p_{1k} \exp \frac{(-1)^{k-1} it}{A_k} \right), \tag{6}$$

а її модуль – вираз і оцінку

$$|f_\tau(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} |f_k(t)| \geq \prod_{k=1}^{\infty} \left| \cos \frac{t}{2A_k} \right|, \tag{7}$$

$$\text{де } \ |f_k(t)| = \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k} \sin^2 \frac{t}{2A_k}}.$$

Доведення. Використовуючи означення характеристичної функції та властивості математичного сподівання, отримуємо

$$\begin{aligned}
f_\tau(t) &= M\left(e^{it\tau}\right) = M\left(\exp\left(it \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}\tau_k}{A_k} \right)\right) = \\
&= M\left(\exp \frac{it\tau_1}{A_1} \cdot \exp \frac{-it\tau_2}{A_2} \cdot \ldots \cdot \exp \frac{(-1)^{k-1} it\tau_k}{A_k} \cdot \ldots \right) = \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} M\left(\exp \frac{(-1)^{k-1} it\tau_k}{A_k} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(p_{0k} + p_{1k} \exp \frac{(-1)^{k-1} it}{A_k} \right) = \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \left((p_{0k} + p_{1k} \cos \frac{(-1)^{k-1} t}{A_k}) + i(p_{1k} \sin \frac{(-1)^{k-1} t}{A_k}) \right) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(t),
\end{aligned}$$

і
$$|f_k(t)| = \sqrt{p_{0k}^2 + 2p_{0k}p_{1k}\cos\frac{t}{A_k} + p_{1k}^2} = \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k}\sin^2\frac{t}{2A_k}}.$$
Оскільки $4p_{0k}p_{1k} = 4p_{0k}(1-p_{0k}) \leq 1$, то
$$|f_\tau(t)| = \prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k}\sin^2\frac{t}{2A_k}} \geq \prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{1 - \sin^2\frac{t}{2A_k}} = \prod_{k=1}^{\infty}\left|\cos\frac{t}{2A_k}\right|.$$
□

Наслідок 3. *Якщо $p_{0k} = \frac{1}{2} = p_{1k}$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$, то має місце рівність*
$$|f_\tau(t)| = \prod_{k=1}^{\infty}\left|\cos\frac{t}{2A_k}\right|.$$

Наслідок 4. *Для будь-якої послідовності (t_n) такої, що $|t_n| \to \infty$ $(n \to \infty)$ має місце нерівність*
$$L_\tau \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\prod_{k=1}^{\infty}\left|\cos\frac{t_n}{2A_k}\right|. \tag{8}$$

Справді,
$$L_\tau \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}|f_\tau(t_n)| = \overline{\lim_{n\to\infty}}\prod_{k=1}^{\infty}|f_k(t_n)| \geq \overline{\lim_{n\to\infty}}\prod_{k=1}^{\infty}\left|\cos\frac{t_n}{2A_k}\right|.$$
Дослідимо поведінку модуля характеристичної функції випадкової величини τ на нескінченності.

Теорема 3.

1. *Якщо $a_n = 1$ для всіх $n > n_0$, то рівність $L_\tau = 0$ має місце тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{k\to\infty} p_{1k} = \dfrac{1}{2}$.*
2. *Якщо $a_n \neq 1$ для нескінченної множини значень n, то $L_\tau > 0$.*

Доведення. **1.** Перше твердження є наслідком відомого факту, доведеного у роботі [1], який стосується характеристичної функції випадкової величини X з незалежними однаково розподіленими випадковими двійковими цифрами.

Справді, оскільки: 1) випадкову величину τ можна подати у вигляді
$$\tau = \tau^{(1)} + \tau^{(2)},$$
$$\text{де}\qquad \tau^{(1)} = \sum_{j=1}^{n_0}\frac{\tau_j(-1)^{j+1}}{A_j}\quad\text{ і }\quad \tau^{(2)} = \frac{(-1)^{n_0}}{A_{n_0}(a_{n_0}+1)}\sum_{k=n_0+1}^{\infty}\frac{\tau_k(-1)^k}{2^k}$$
є незалежними випадковими величинами, а тому $f_\tau(t) = f_{\tau^{(1)}}(t)f_{\tau^{(2)}}(t)$; і
2) $L_{\tau^{(1)}} = 1$ (бо в.в. $\tau^{(1)}$ має дискретний розподіл), то величина L_τ визначається $L_{\tau^{(2)}}$ і тому можна, не порушуючи загальності, вважати $n_0 = 0$.

У даному випадку вираз характеристичної функції випадкової величини τ

$$|f_\tau(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} \left|\cos \frac{t}{2^k}\right|$$

співпадає з виразом характеристичної функції випадкової величини X.

2. Нехай нерівність $a_n \neq 1$ виконується нескінченну кількість разів, а саме:

$$a_{n_m} > 1, \;\; m = 1, 2, \dots .$$

Розглянемо послідовність $t_m = 2\pi A_{n_m}$, яка очевидно прямує до нескінченності при $m \to \infty$. Для неї

$$|f_\tau(t_m)| \geq \prod_{k=1}^{\infty} \left|\cos \frac{2\pi A_{n_m}}{2A_k}\right|,$$

Розглянемо окремо множник нескінченного добутку

$$\left|\cos \frac{\pi A_{n_m}}{A_k}\right| = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k \leq n_m, \\ \cos \frac{\pi}{(a_{n_m}+1)a_{n_m+1}(a_{n_m+1}+1)\dots(a_{k-1}+1)a_k}, & \text{якщо } k > n_m. \end{cases}$$

Якщо $k > n_m$, то

$$\cos \frac{\pi}{(a_{n_m}+1)a_{n_m+1}(a_{n_m+1}+1)\dots(a_{k-1}+1)a_k} \geq cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k-n_m-1}} =$$

$$= 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k-n_m}} > 1 - 2\left(\frac{\pi}{3 \cdot 2^{k-n_m}}\right)^2.$$

Тоді

$$|f_\tau(t_m)| \geq \prod_{k=n_m+1}^{\infty} \left|\cos \frac{\pi A_{n_m}}{A_k}\right| > \prod_{k=n_m+1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{\pi^2}{9 \cdot 2^{2(k-n_m)-1}}\right)\right). \tag{9}$$

Із збіжності ряду

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\pi^2}{9 \cdot 2^{2(k-n_m)-1}}$$

випливає збіжність останнього добутку нерівності (9) за ознакою збіжності нескінченних добутків [6]: *нескінченний добуток* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-u_k)$ *збігається тоді і тільки тоді, коли збігається ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$.

Отже, згідно наслідку 4

$$L_\tau = \overline{\lim_{|t| \to \infty}} |f_\tau(t)| > 0.$$

Що і вимагалося довести. □

Теорема 4. *Якщо для* $n \geq n_0$ *і всіх* $k > n$ *виконується нерівність*

$$\frac{k!}{n!} \leq (a_n+1)a_{n+1}(a_{n+1}+1)\dots(a_{k-1}+1)a_k, \tag{10}$$

то має місце рівність $L_\tau = 1$.

Доведення. Розглянемо послідовність $t_n = 2\pi A_n$, де (A_n) – послідовність натуральних чисел, яка визначає знакозмінний ряд Люрота.

Тоді за наслідком 4

$$L_\tau \geq \overline{\lim_{n\to\infty}} \prod_{k=1}^{\infty} \left|\cos \frac{t_n}{2A_k}\right|.$$

Але

$$\left|\cos \frac{t_n}{2A_k}\right| = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k \leq n, \\ \cos \frac{\pi}{(a_n+1)a_{n+1}(a_{n+1}+1)\ldots(a_{k-1}+1)a_k}, & \text{якщо } k > n. \end{cases}$$

Тому

$$\prod_{k=1}^{\infty} |f_k(t_n)| \geq \prod_{k=n+1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{(a_n+1)a_{n+1}(a_{n+1}+1)\ldots(a_{k-1}+1)a_k}.$$

Але при $k > n$ і виконанні нерівості (10)

$$\cos \frac{\pi}{(a_n+1)a_{n+1}(a_{n+1}+1)\ldots(a_{k-1}+1)a_k} \geq \cos \frac{\pi n!}{k!} =$$
$$= 1 - 2\sin^2 \frac{\pi n!}{2k!} > 1 - 2\left(\frac{\pi n!}{2k!}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\pi n!}{\sqrt{2}k!}\right)^2.$$

Тоді

$$\prod_{k=n+1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{(a_n+1)a_{n+1}(a_{n+1}+1)\ldots(a_{k-1}+1)a_k} \geq \prod_{k=n+1}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{\pi n!}{\sqrt{2}k!}\right)^2\right).$$

Згідно з ознакою збіжності нескінченних добутків останній добуток є збіжним, бо ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\pi n!}{\sqrt{2}k!}\right)^2$ є збіжним. А отже,

$$\prod_{k=n+1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{(a_n+1)a_{n+1}(a_{n+1}+1)\ldots(a_{k-1}+1)a_k} \to 1 \ (n \to \infty).$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=n+1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{(a_n+1)a_{n+1}(a_{n+1}+1)\ldots(a_{k-1}+1)a_k} = 1.$$

Отже, $L_\tau \geq 1$. Але величина $L_\tau \in [0;1]$. Тому $L_\tau = 1$. □

Зауваження 1. *Теорема 4 свідчить про близькість сингулярно неперервного розподілу випадкової величини τ при умові (10) до дискретного.*

Наслідок 5. *Якщо $a_{n+1} > a_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то має місце рівність $L_\tau = 1$.*

Справді, з умови $a_{n+1} > a_n$ випливає нерівність (10) для всіх $k > n$.

Зауваження 2. *Умови наслідку 5 більш обмежливі ніж умови теореми 4, про що свідчить наступний приклад.*

Приклад. Нехай $a_{2m-1} = 2m-1$ і $a_{2m} = a_{2m-1}$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. Тоді очевидно умови наслідку 5 виконуються не для всіх $n \in \mathbb{N}$. Але для довільних n і k натуральних таких, що $k > n$, справедливі нерівності

$$(a_n+1)a_{n+1}(a_{n+1}+1)\dots(a_{k-1}+1)a_k \geq n(n+1)(n+2)\dots k \geq$$
$$\geq (n+1)(n+2)(n+3)...(n-(k-n)) = \frac{k!}{n!},$$

тобто виконуються умови теореми 4.

Література

[1] *Гончаренко Я.В.* Асимптотичні властивості характеристичної функції випадкової величини з незалежними двійковими цифрами та згортки сингулярних розподілів ймовірностей // Наук. записки НПУ ім. М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. – 2002. – №3. – С. 376–390.

[2] *Лукач Е.* Характеристические функции. — Москва: Наука, 1979. — 424 с.

[3] *Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Фрактальна геометрія та перетворення, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича // Динамічні системи: Праці Українського математичного конгресу–2001. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. — С. 77–93.

[4] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[5] *Працьовитий М.В., Хворостіна Ю.В.* Множина неповних сум знакозмінного ряду Люрота та розподіли ймовірностей на ній // Наук. час. НПУ ім. М.П.Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. — К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009. — №10.—С.14–28.

[6] *Титчмарш Е.* Теория функций: Пер. с англ. – 2-е изд. перераб. — М.: Наука, 1980. — 464 с.

[7] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff–Besicovitch dimension // Ergodic Theory Dynam. Systems. — 2004. — Vol. 24, no. 1. — P. 1–16.

[8] *Billingsley P.* Ergodic theory and information. — New York: John Willey and Sons, 1965.

[9] *Jessen B., Wintner A.* Distribution functions and the Riemann zeta function // Trans. Amer. Math. Soc. — 1935. — Vol. 38, no. 1. — P. 48–88.

[10] *Kakutani S.* Equivalence of infinite product measures // Ann. of Math. — 1948. — Vol. 49. — P. 214–224.

[11] Kalpazidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J., *Lüroth-type alternating series representations for real numbers*, Acta Arith **55** (1990), 311–322.

[12] *Lévy P.* Sur les séries dont les termes sont des variables éventuelles indépendantes // Studia Math. — 1931. — Vol. 3. — P. 119–155.

[13] *Marsaglia G.* Random variables with independent binary digits. — Ann. Math. Statist. — 1971. — Vol. 12, no. 6. — P. 1922–1929.

[14] *Salem R.* On some singular monotonic functions which are strictly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. — 1943. — Vol. 53, no. 3. — P. 427–439.