МЕТОД ФАЗОВОГО УКРУПНЕННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ МАТЕМАТИЧНИХ ЗАДАЧ

Одинець Ю.А.,

Чернігівський національний педагогічний університет імені Т.Г.Шевченка

У статті формулюється суть методу фазового укрупнення та демонструється його ефективність при розв'язанні різних математичних задач з планіметрії, алгебрі, теорії чисел.

В статье формулируется сущность метода фазового укрупнения и демонстрируется его эффективность при решении различных математических задач по планиметрии, алгебре, теории чисел.

In this paper we formulate the essence of the method of the phase consolidation and demonstrate its effectiveness in solving various mathematical problems in plane geometry, algebra, number theory.

Суть методу фазового укрупнення в дослідженні математичних об'єктів (структур, математичних моделей) полягає в тому, що розглядається (досліджується, вивчається): 1) ширша система (сім'я) об'єктів, окремим представником якої є досліджуваний об'єкт; 2) більш складна система (структура), компонентою чи елементом якої є досліджуваний об'єкт; 3) ширший фазовий простір, у який «занурено» досліджуваний об'єкт.

Метод фазового укрупнення математичного об'єкта і спосіб розв'язання задач, який ґрунтується на фазовому укрупненні, є відомим математичним прийомом. Пояснимо суть методу розв'язання задач з використанням фазового укрупнення на прикладах.

Задача 1. Знайти катети прямокутного трикутника, гіпотенуза якого має довжину 2 см, а четверта степінь одного з катетів більша за довжину другого катета на 4.

Розв'язання. Нехай x, y — довжини шуканих катетів прямокутного трикутника, тоді згідно з умовою $y^4 - x = 4$. Виразивши один катет через інший, отримаємо $y = \sqrt[4]{x+4}$.

Згідно з теоремою Піфагора $x^2 + y^2 = 4$. Тоді з умови задачі отримаємо $x^2 + (\sqrt[4]{x+4})^2 = 4$. Це рівняння можна представити у вигляді: $x^2 = 4 - \sqrt{x+4}$. Або ж записати його наступним чином $x - \sqrt{4 - \sqrt{x+4}} = 0$. Розв'яжемо це рівняння.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ 4 + x \geq 0, \\ 4 - \sqrt{4+x} \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0 \\ x \geq -4, \\ 4 \geq \sqrt{4+x}; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0 \\ x \geq -4, \\ 16 \geq 4 + x; \end{cases}$ $0 < x \leq 12$.

Розглянемо рівняння $x - \sqrt{a - \sqrt{a+x}} = 0$. Початкове рівняння є його частковим випадком при $a = 4$. Звільнимось від ірраціональностей:

$$\begin{cases} a-\sqrt{a+x}=x^2, \\ x\ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a-x^2=\sqrt{a+x}, \\ x\ge 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (a-x^2)^2=(\sqrt{a+x})^2, \\ x\ge 0, \\ a-x^2\ge 0; \end{cases}$$

Рівняння останньої системи є квадратним відносно a:

$$a^2-2ax^2+x^4=a+x,\ a^2-(1+2x^2)a+(x^4-x)=0.$$

Розв’яжемо його

$$D=(1+2x^2)^2-4(x^4-x)=1+4x^2+4x^4-4x^4+4x=(1+2x)^2,$$

$$a_{1,2}=\frac{(1+2x^2)\pm\sqrt{(1+2x)^2}}{2}=\frac{1+2x^2\pm|1+2x|}{2},$$

При $2x+1\ge 0$ маємо $a_1=x^2+x+1$ і $a_2=x^2-x$.

При $2x+1<0$ маємо $a_1=x^2-x$ і $a_2=x^2+x+1$.

Отже, $a\in\{x^2+x+1;\ x^2-x\}$.

Повернемось до початкового рівняння. Якщо $a=x^2+x+1$ і $a=4$, то маємо рівняння $x^2+x+1=4$, звідки $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$. Враховуючи, що змінна виражає довжину катета, то робимо висновок, що $x=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ — сторонній розв’язок. Переконаємось, що $x=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ є коренем початкового рівняння безпосередньою підстановкою:

$$x-\sqrt{4-\sqrt{4+x}}=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}-\sqrt{4-\sqrt{4+\frac{-1+\sqrt{13}}{2}}}=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}-\sqrt{4-\sqrt{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}}=$$

$$=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}-\sqrt{4-\sqrt{\frac{(1+\sqrt{13})^2}{4}}}=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}-\sqrt{4-\frac{1}{2}(1+\sqrt{13})}=$$

$$=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}-\sqrt{\frac{7-\sqrt{13}}{2}}=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}-\sqrt{\frac{(1-\sqrt{13})^2}{4}}=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}-\frac{\sqrt{13}-1}{2}=0.$$

Нехай тепер $a=x^2-x$. Тоді при $a=4$ отримуємо рівняння $x^2-x-4=0$, $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$. Обидва значення є сторонніми розв’язками, оскільки

$$\frac{1-\sqrt{17}}{2}<0 \quad \text{і} \quad 4-\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)^2<0.$$

Відповідь: $x = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

Як бачимо, метод фазового укрупнення дозволяє досить просто отримати розв’язок складного рівняння, яке «в лоб» розв’язується складно. Подібний прийом часто зустрічається у задачах математичних олімпіад, коли рівняння розв’язуються відносно коефіцієнта. При цьому рівняння відносно коефіцієнта найчастіше є простим (лінійним чи квадратним), у той час як початкове рівняння є значно складнішим. Однак, побачити цей спосіб можуть лише натреновані учні. Метод фазового укрупнення дозволяє спростити сприйняття такого прийому розв’язування складних рівнянь.

Задача 2. Довести, що трійкова система числення є найекономнішою з усіх s-кових систем.

Розв’язання. Для різних систем кількість чисел, які можна записати в даній системі за допомогою певної кількості символів (знаків, цифр), різна. Систему числення називають більш економною, якщо для фіксованого набору знаків кількість чисел ними записаними є більшою. Наприклад, в десятковій системі числення, щоб записати 1000 чисел (0-999) необхідно 30 символів (по 10 символів для кожного розряду), а в двійковій системі за допомогою 30 символів можна записати 2^{15}=32768 різних чисел.

Нехай n — наявна кількість символів (цифр), x — основа системи числення. Тоді $\dfrac{n}{x}$ — число розрядів, $F(x) = x^{\frac{n}{x}}$ — кількість чисел, які можна записати за допомогою n символів.

Дослідимо $y = F(x)$ на максимум, використовуючи диференціальне числення. З цією метою прологарифмуємо вираз функції $\ln y = \dfrac{n}{x}\ln x$ та знайдемо її похідну: $\dfrac{y'}{y} = -\dfrac{n}{x^2}\ln x + \dfrac{n}{x^2}$, $y' = nx^{\frac{n}{x}-2}(1-\ln x)$. Звідки бачимо, що $y' = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = e$. Оскільки $y'\left(\dfrac{1}{e}\right) > 0$, $y'(e^2) < 0$, то $x = e$ — точка максимуму функції $F(x)$. Ми розглядаємо системи числення з натуральною основою. Оскільки $2 < e < 3$, то, оцінивши відношення $\dfrac{F(3)}{F(2)} = \dfrac{3^{\frac{n}{3}}}{2^{\frac{n}{2}}} = \sqrt[6]{\dfrac{3^{2n}}{2^{3n}}} = \left(\dfrac{9}{8}\right)^{6n} > 1$, робимо висновок: трійкова система числення є найекономнішою.

Суть методу фазового укрупнення в цій задачі полягала в тому, що основа системи числення є цілим числом, а для можливості застосування методів диференціального числення ми розглядали його як дійсне число. Це дозволило розширити спектр методів аналізу систем числення і прийти до потрібного нам висновку.

Задача 3. Вивести формулу для обчислення площі трикутника *ABC,* заданого в прямокутній декартовій системі координат координатами своїх вершин $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $C(x_C, y_C)$.

Розв'язання. Розглянемо вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; 0)$ і $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A; 0)$. Скористаємось відомими фактами з теорії векторного добутку векторів. Відомо, що

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} | \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} | = \frac{1}{2}\sqrt{0^2 + 0^2 + \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A)| = \frac{1}{2} | x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C - x_C y_B + x_C y_A + x_A y_B |$$

Розглянемо визначник $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$ і розкладемо його за елементами третього стовпця: $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} x_B & y_B \\ x_C & y_C \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_C & y_C \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \end{vmatrix} =$

$= x_B y_C - x_B y_A - x_A y_C - x_C y_B + x_C y_A + x_A y_B$.

Отже, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix} \right|$.

Суть методу фазового укрупнення в даній ситуації полягала в наступному. Маючи фігуру на площині – трикутник *ABC*, ми перейшли до тривимірного простору, в одній з площин якого знаходиться даний трикутник, використали одну з геометричних властивостей векторного добутку векторів – результату операції, яка не визначена в двовимірному просторі (на площині) і отримали компактну на вигляд формулу у матричній формі.

Схожий прийом нами буде використано і в наступній задачі.

Задача 4. Довести, що визначник ортогональної матриці, тобто матриці $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, яка має властивості $\begin{cases} a_1^2 + a_2^2 = 1, \\ b_1^2 + b_2^2 = 1, \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0; \end{cases}$ дорівнює ± 1.

Доведення. В ортонормованому базисі $< \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} >$ розглянемо вектори $\vec{a} = (a_1; a_2; 0)$ і $\vec{b} = (b_1; b_2; 0)$. Оскільки $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + 0 = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$. Тому $\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = 0$, а отже, синус напрямленого (орієнтованого) кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює ± 1.

З іншого боку, $\sin\left(\vec{a}\hat{,}\vec{b}\right)=\dfrac{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\sqrt{0+0+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2}=\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right|$.

Тому $\left|\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right|=1$, а отже, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=\pm 1$.

У наступних двох задачах метод фазового укрупнення полягатиме у доведенні більш загальних тверджень, ніж вимагається в умові задачі. Як це не парадоксально виглядає, але такий підхід дозволяє спростити процес отримання відповіді до задачі, яка є частковим випадком більш загальної задачі.

Задача 5. Три сторони *AB*, *BC*, *AD* рівнобічної трапеції *ABCD* (*BC*□*AD*) мають довжини *a, b, c*; *M* – точка площини, для якої вираз $AM^2+BM^2+CM^2+DM^2$ набуває найменшого значення; точка *G* задовольняє умову $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Обчислити відстань між точками *G* і *M*.

Розв'язання. Методом координат доведемо, що точки *G* і *M* збігаються не лише для даної трапеції *ABCD*, а й для довільних чотирьох точок A_1, A_2, A_3, A_4.

Справді, якщо $A_i\left(x_i;y_i\right)$, $G(x_G;y_G)$, то $\overrightarrow{GA_i}=\left(x_i-x_G;\,y_i-y_G\right)$, $i\in\{1,2,3,4\}$.

Векторна рівність $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GA_3}+\overrightarrow{GA_4}=\vec{0}$ еквівалентна системі рівнянь $\left(x_1-x_G\right)+\left(x_2-x_G\right)+\left(x_3-x_G\right)+\left(x_4-x_G\right)=0,\left(y_1-y_G\right)+\left(y_2-y_G\right)+\left(y_3-y_G\right)+\left(y_4-y_G\right)=0.$ Звідси координати точки $G(x_G;y_G)$ обчислюються за формулами $x_G=\frac{1}{4}\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)$, $y_G=\frac{1}{4}\left(y_1+y_2+y_3+y_4\right)$.

Нехай в прямокутній декартовій системі координат точка *M* задана своїми координатами: $M(x;y)$. Тоді $f(M)=AM^2+BM^2+CM^2+DM^2=$

$$=\left(x-x_1\right)^2+\left(y-y_1\right)^2+\left(x-x_2\right)^2+\left(y-y_2\right)^2+\left(x-x_3\right)^2+\left(y-y_3\right)^2+\left(x-x_4\right)^2+\left(y-y_4\right)^2=$$

$$=4x^2+4y^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2-2(xx_1+yy_1+xx_2+yy_2+xx_3+yy_3+xx_4+yy_4)=$$

$$=4x^2+4y^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2-2x(x_1+x_2+x_3+x_4)-2y(y_1+y_2+y_3+y_4)=$$

$$=4\left[\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}\right)^2\right]+C,$$ де

$$C=\left(x_1^2+...+x_4^2\right)+\left(y_1^2+...+y_4^2\right)-\frac{1}{4}\left[\left(x_1+...+x_4\right)^2+\left(y_1+...+y_4\right)^2\right].$$

Оскільки *C* не залежить від точки M, то вираз $f(M)$ набуває найменшого значення, коли $x=\frac{1}{4}\left(x_1+x_2+x_3+x_4\right)$, $y=\frac{1}{4}\left(y_1+y_2+y_3+y_4\right)$.

Отже, точки *G* і *M* збігаються. Тому $GM=0$.

Задача 6. Довести, що з усіх трикутників заданої площі найменший периметр має рівносторонній трикутник.

Доведення. Формула Герона для обчислення площі трикутника виглядає: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p=\frac{a+b+c}{2}$.

Використовуючи співвідношення між середнім арифметичним та середнім геометричним трьох додатних чисел $\sqrt[3]{uvt}\le\frac{u+v+t}{3}$, отримаємо:

$$\frac{S^2}{p}=(p-a)(p-b)(p-c)\le\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3=\frac{p^3}{27}.$$

Отже, $S\le\sqrt{\frac{p^4}{27}}=\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$, причому рівність має місце лише при $a=b=c$.

Звідки випливає, що найменший периметр при сталій площі має той трикутник, для якого має місце рівність $S=\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$, тобто той, у якого $a=b=c$.

Висновки. Метод фазового укрупнення – інноваційний метод розв’язування задач. З цим методом учнів слід знайомити поступово, відповідно до їх рівня математичного розвитку та їх навчальних можливостей. Учням, які цікавляться математикою, представляють цей метод в позакласній роботі з математики, зокрема цьому може бути присвячене одне або кілька занять математичного гуртка. Доцільно знайомити з методом фазового укрупнення обдарованих учнів при підготовці їх до участі в математичних олімпіадах різних рівнів. Цьому методу можуть бути присвячені роботи, які пишуть учні в системі МАН. Що ж до загального знайомства з вказаним методом, то слід це робити на заключних етапах вивчення шкільної геометрії, коли учні вже вивчили основні положення стереометрії й на уроках повторення відбувається узагальнення і систематизація їх знань, навичок, вмінь, та з’являється можливість розв’язувати планіметричні задачі з точки зору стереометрії. На цьому ж етапі можна запропонувати учням відповідний елективний курс, наприклад, «Розв’язування задач методом фазового укрупнення». Як показує, досвід такий курс може бути досить ефективним і покращувати загальний математичний рівень розвитку учня.

Список використаної літератури

1. Готман Э.Г., Скопец З.А. Задача одна – решения разные. – К.: Рад. шк., 1988. – 173с.
2. Працьовитий М.В. Аналітична геометрія. Геометричні перетворення. Тема 3: Рухи (Ізометричні перетворення площини). – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2011. – 56с.
3. Працьовитий М.В. Елементи векторної алгебри. Множення векторів. – К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2010. – 116 с.
4. Працьовитий М.В., Гончаренко Я.В. Олімпіади з математики для абітурієнтів. – К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 2010. – 44 с.
5. Фомин С.В. Системы счисления. – М.: Наука, 1987. – 48 с. – (Популярные лекции по математике).