УДК 517.9; 519.3

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА З НЕЛОКАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

В. О. Капустян

Нац. техн. ун-т України "КПІ"
Україна, 03056, Київ, просп. Перемоги, 37
e-mail: kapustyanv@ukr.net

О. А. Капустян

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
Україна, 03680, просп. Акад. Глушкова, 4д
e-mail: olena.kap@gmail.com

О. К. Мазур

Нац. ун-т харчових технологій
Україна, 01601, Київ 33, вул. Володимирська, 68

We prove that an optimal control problem for a Poisson equation with nonlocal boundary-value conditions in a circular sector has a classical solution in the class of distributed controls.

Доказана разрешимость в классическом смысле задачи оптимального управления в классе распределенных управлений для уравнения Пуассона с нелокальными краевыми условиями в круговом секторе.

Вступ. Теорія лінійно-квадратичних задач оптимального керування розподіленими системами є добре розвиненою [1, 2]. У багатьох випадках початкову задачу можна розщепити за допомогою методу Фур'є [3–5]. Задача керування еліптичним рівнянням з нелокальними крайовими умовами в круговому секторі [6], що розглядається у цій статті, не допускає ні повного розщеплення, ні застосування L^2-теорії. Її розв'язність у класі розподілених керувань вдається одержати шляхом використання біортонормованих систем функцій [7] та при подальшому аналізі розв'язків матричних рівнянь Фредгольма.

Постановка задачі. В круговому секторі $Q = \{(r,\theta) | r \in (0,1), \theta \in (0,\pi)\}$ розглядається задача оптимального керування

$$\begin{aligned}
&\Delta y := \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = u(r,\theta), \quad (r,\theta) \in Q,\\
&y(1,\theta) = p(\theta), \quad p(0) = 0,\\
&y(r,0) = 0, \quad r \in (0,1),\\
&\frac{\partial y}{\partial \theta}(r,0) = \frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\pi), \quad r \in (0,1),
\end{aligned} \tag{1}$$

$$J(y,u) = \|y(\alpha)\|_D^2 + \int\limits_0^1 \|u(r)\|_D^2\, dr \to \inf, \tag{2}$$

де $p \in C^1([0,\pi])$ — задана функція, $\alpha \in (0,1)$ — фіксоване число, $\|\cdot\|_D$ — норма в $L^2(0,\pi)$, еквівалентна стандартній, що задається рівністю

$$\|v\|_D = \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2\right)^{1/2},$$

де $n \geq 1,\ v_n = \int_0^\pi v(\theta)\psi_n(\theta)d\theta,\ \psi_0(\theta) = \frac{2}{\pi^2},\ \psi_{2n}(\theta) = \frac{4}{\pi^2}(\pi-\theta)\sin 2n\theta,\ \psi_{2n-1}(\theta) = = \frac{4}{\pi^2}\cos 2n\theta.$

Метою роботи є встановлення класичної розв'язності задачі (1), (2), тобто знаходження оптимального серед допустимих процесів $\{u,y\} \in C(\bar{Q}) \times (C(\bar{Q}) \bigcap C^2(Q))$. Для застосування спектрального методу використовуються біортонормовані і повні в $L^2(0,\pi)$ системи функцій Самарського – Іонкіна [7]

$$\Psi = \{\psi_n\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{та} \quad \Phi = \{\varphi_0(\theta) = \theta, \quad \varphi_{2n}(\theta) = \sin 2n\theta, \quad \varphi_{2n-1}(\theta) = \theta\cos 2n\theta\}_{n=1}^{\infty}. \tag{3}$$

Тоді для будь-якого $u \in L^2(Q)$

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r)\,\varphi_n(\theta), \tag{4}$$

де $u_n(r) = \int_0^\pi u(r,\theta)\psi_n(\theta)\,d\theta$. Отже, розв'язок задачі (1) будемо шукати у вигляді

$$y(r,\theta) = y_0(r)\theta + \sum_{n=1}^{\infty}\left(y_{2n-1}(r)\theta\cos 2n\theta + y_{2n}(r)\sin 2n\theta\right), \tag{5}$$

де функції $\{y_k(r)\}_{k=0}^{\infty}$ є розв'язками системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dy_0}{dr}\right) = r\,u_0(r), \quad y_0(1) = p_0, \tag{6}$$

$$r\,\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dy_{2k-1}}{dr}\right) - (2k)^2 y_{2k-1} = r^2\,u_{2k-1}(r),\ y_{2k-1}(1) = p_{2k-1}, \tag{7}$$

$$r\,\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dy_{2k}}{dr}\right) - (2k)^2 y_{2k} - 4k\,y_{2k-1} = r^2\,u_{2k}(r), \quad y_{2k}(1) = p_{2k}, \tag{8}$$

$$p_k = \int\limits_0^\pi p(\theta)\,\psi_k(\theta)\,d\theta.$$

Таким чином, початкова задача (1), (2) зводиться до наступної: на допустимих парах $\{u_n(r), y_n(r)\}_{n=0}^{\infty}$ задачі (6) – (8) мінімізувати критерій якості

$$J(y,u) = y_0^2(\alpha) + \int\limits_0^1 u_0^2(r)\,dr + \sum_{k=1}^{\infty}(y_{2k-1}^2(\alpha) + y_{2k}^2(\alpha) +$$

$$+ \int\limits_0^1 (u_{2k-1}^2(r) + u_{2k}^2(r))\,dr) = J_0 + \sum_{k=1}^{\infty} J_k. \tag{9}$$

При цьому оптимальний процес $\{\tilde{u}_n(r), \tilde{y}_n(r)\}_{n=0}^{\infty}$ повинен бути таким, щоб формула (4) визначала функцію з $C(\bar{Q})$, а формула (5) — функцію з $C(\bar{Q}) \bigcap C^2(Q)$.

Основні результати. Структура задачі (6) – (9) дозволяє редукувати її до послідовності наступних задач:

$$\text{на розв'язках (6) мінімізувати функціонал } J_0 = J_0(u_0), \tag{10}$$

$$\text{на розв'язках (7), (8) мінімізувати функціонал } J_k = J_k(u_{2k-1}, u_{2k}), \quad k \geq 1. \tag{11}$$

При фіксованих $\{u_k(r)\}_{k=0}^{\infty} \subset C([0,1])$ розв'язки задачі (6) – (8) мають вигляд

$$y_0(r) = p_0 - \int\limits_r^1 \left(\frac{1}{s} \int\limits_0^s \xi u_0(\xi) d\xi \right) ds = p_0 + \int\limits_0^1 G_0(r,s) u_0(s)\,ds, \tag{12}$$

де

$$G_0(r,s) = \begin{cases} s \ln r, \ s \in [0,r], \\ s \ln s, \ s \in [r,1], \end{cases}$$

$$y_{2k-1}(r) = p_{2k-1}\, r^{2k} + \frac{1}{4k} \int\limits_0^1 s\, G_k(r,s) u_{2k-1}(s)\,ds, \tag{13}$$

$$G_k(r,s) = \begin{cases} s^{2k}(r^{2k} - r^{-2k}), \ s \in [0,r], \\ r^{2k}(s^{2k} - s^{-2k}), \ s \in [r,1], \end{cases}$$

$$y_{2k}(r) = p_{2k}\, r^{2k} + p_{2k-1}\, r^{2k}\, t \ln r + \frac{1}{4k} \int\limits_0^1 s\, G_k(r,s) u_{2k}(s)\,ds +$$

$$+ \frac{1}{4k} \int\limits_0^1 s\, \bar{G}_k(r,s) u_{2k-1}(s)\,ds, \tag{14}$$

$$\bar{G}_k(r,s) = \int\limits_0^1 p^{-1} G_k(r,p) G_k(p,s)\, dp =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2k}\left(\left(\dfrac{s}{r}\right)^{2k} - (rs)^{2k}\right) + r^{2k}s^{2k}\ln(rs) - \left(\dfrac{s}{r}\right)^{2k}\ln\left(\dfrac{s}{r}\right), \ s \in [0,r], \\ \dfrac{1}{2k}\left(\left(\dfrac{r}{s}\right)^{2k} - (rs)^{2k}\right) + r^{2k}s^{2k}\ln(rs) - \left(\dfrac{r}{s}\right)^{2k}\ln\left(\dfrac{r}{s}\right), \ s \in [r,1]. \end{cases}$$

Лема 1. *Для будь-якого $k \geq 0$ формули (12) – (14) визначають розв'язки*

$$y_k \in C([0,1]) \cap C^2(0,1)$$

задачі (6) – (8).

Доведення. Оскільки y_k — розв'язки задачі (6) – (8), то достатньо показати, що $y_k \in C([0,1])$ $\forall k \geq 0$. Позначимо $\Pi = [0,1] \times [0,1]$. Тоді $G_0 \in C(\Pi)$, $\max_\Pi |G_0(r,s)| = e^{-1}$, отже, $y_0 \in C([0,1])$.

Для $k \geq 1$ $G_k \in C(\Pi \setminus \{0,0\})$, $\max_\Pi |G_k(r,s)| \leq 1$, отже, $y_{2k-1} \in C([0,1])$. Оскільки $x^k \ln x \in C([0,1])$, $\max_{x\in[0,1]} |x^k \ln x| = e^{-1}\, k^{-1}$, то для $\bar{G}_k \in C(\Pi \setminus \{0,0\})$ маємо

$$\max_\Pi |\bar{G}_k(r,s)| \leq \frac{1}{k},$$

отже, $y_{2k} \in C([0,1])$.

Лему доведено.

Теорема 1. *Задачі (10), (11) мають єдиний розв'язок $\{\tilde{u}_k\}_{k=0}^\infty$, причому $\tilde{u}_k \in C([0,1])$ для будь-якого $k \geq 0$.*

Доведення. З формул (12) – (14) випливає, що функціонали $J_0 : L^2(0,1) \mapsto \mathbb{R}$, $J_k : L^2(0,1) \times L^2(0,1) \mapsto \mathbb{R}$ є строго опуклими, неперервними і коерцитивними. Це, згідно з [1], означає, що задачі (10), (11) мають єдиний розв'язок у просторах $L^2(0,1)$ та $L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ відповідно.

Прирівнюючи до нуля похідні Фреше від J_0, J_k, одержуємо наступні інтегральні рівняння Фредгольма:

$$u_0(s) = -\int\limits_0^1 G_0(\alpha,s) G_0(\alpha,p) u_0(p)\, dp - p_0\, G_0(\alpha,s), \tag{15}$$

$$u_{2k-1}(s) = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{(4k)^2}\int\limits_0^1 \Big[\Big(s\, G_k(\alpha,s) p\, G_k(\alpha,p) + s\, \bar{G}_k(\alpha,s) p\, \bar{G}_k(\alpha,p)\Big) u_{2k-1}(p) +$$

$$+ 2s\, \bar{G}_k(\alpha,s) p\, G_k(\alpha,p) u_{2k}(p)\Big]\, dp - p_{2k}\alpha^{2k}\frac{1}{4k}\, s\, G_k(\alpha,s) -$$

$$- \Big(p_{2k}\alpha^{2k} + p_{2k-1}\alpha^{2k}\ln\alpha\Big)\frac{1}{4k}\, s\, \bar{G}_k(\alpha,s), \tag{16}$$

$$u_{2k}(s) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(4k)^2}\int\limits_0^1 [2s\, G_k(\alpha,s)p\,\bar{G}_k(\alpha,p)u_{2k-1}(p) + s\, G_k(\alpha,s)p\,\bar{G}_k(\alpha,p)u_{2k}(p)]\, dp -$$

$$- \left(p_{2k}\alpha^{2k} + p_{2k-1}\alpha^{2k}\ln\alpha\right)\frac{1}{4k}\, s\, G_k(\alpha,s). \tag{17}$$

Оскільки $\max_{(p,s)\in\prod} |G_0(\alpha,p)G_0(\alpha,s)| \le e^{-2} < 1$, то рівняння (15) має єдиний розв'язок $\tilde{u}_0 \in C([0,1])$.

Розглянемо матрицю $A_k(p,s)$ і вектор-функцію $f_k(s)$ вигляду

$$A_k(p,s) = \begin{pmatrix} s\, G_k(\alpha,s)p\, G_k(\alpha,p) + s\,\bar{G}_k(\alpha,s)p\,\bar{G}_k(\alpha,p) & 2s\,\bar{G}_k(\alpha,s)p\, G_k(\alpha,p) \\ 2s\, G_k(\alpha,s)p\,\bar{G}_k(\alpha,p) & s\, G_k(\alpha,s)p\,\bar{G}_k(\alpha,p) \end{pmatrix},$$

$$f_k(s) = \begin{pmatrix} -p_{2k}\alpha^{2k}\dfrac{1}{4k}\, s\, G_k(\alpha,s) - \left(p_{2k}\alpha^{2k} + p_{2k-1}\alpha^{2k}\ln\alpha\right)\dfrac{1}{4k}\, s\,\bar{G}_k(\alpha,s) \\ -\left(p_{2k}\alpha^{2k} + p_{2k-1}\alpha^{2k}\ln\alpha\right)\dfrac{1}{4k}\, s\, G_k(\alpha,s) \end{pmatrix}.$$

Тоді з рівнянь (16), (17) маємо, що вектор $z_k(s) = \begin{pmatrix} u_{2k-1}(s) \\ u_{2k}(s) \end{pmatrix}$ задовольняє рівняння

$$z_k(s) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(4k)^2}\int\limits_0^1 A_k(p,s)z_k(p)\, dp + f_k(s). \tag{18}$$

На підставі оцінок з леми 1 маємо

$$\max_{\prod} \|A_k(p,s)\| \le 4, \quad \max_{s\in[0,1]} \|f_k(s)\| \le \frac{\alpha^{2k-1}}{2k}(|p_{2k}| + |p_{2k-1}|).$$

Тоді для будь-якого $k \ge 1$ рівняння (18) має єдиний розв'язок $\tilde{z}_k(s) = \begin{pmatrix} \tilde{u}_{2k-1}(s) \\ \tilde{u}_{2k}(s) \end{pmatrix} \in$ $\in C([0,1])$, і при цьому для будь-якого $r \in [0,1]$

$$|\tilde{u}_{2k-1}(r)| \le \frac{\alpha^{2k-1}}{k}(|p_{2k-1}| + |p_{2k}|), \quad |\tilde{u}_{2k}(r)| \le \frac{\alpha^{2k-1}}{k}(|p_{2k-1}| + |p_{2k}|). \tag{19}$$

Теорему доведено.

З оцінок (19) випливає, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{u}_n(r)\varphi_n(\theta)$ збігається рівномірно на $\bar{Q}$ і за формулою (4) визначає функцію $\tilde{u}(r,\theta) \in C(\bar{Q})$.

Теорема 2. *Ряд*

$$\tilde{y}_0(r)\theta + \sum_{n=1}^{\infty}(\tilde{y}_{2n-1}(r)\theta\, \cos 2n\theta + \tilde{y}_{2n}(r)\sin 2n\theta),$$

де $\{\tilde{y}_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— розв'язки системи (6) – (8) з керуваннями* $\{\tilde{u}_n\}_{n=1}^{\infty}$*, за формулою (5) визначає функцію* $\tilde{y}(r,\theta) \in C(\bar{Q}) \bigcap C^2(Q)$.

Доведення. За формулами (12) – (14) шуканий ряд має вигляд

$$p_0\,\theta + \theta \int\limits_0^1 G_0(r,s)u_0(s)\,ds + \sum_{n=1}^{\infty} \big(p_{2n-1}\,r^{2n}\,\theta\cos 2n\theta + \big(p_{2n}\,r^{2n} + p_{2n-1}\,r^{2n}\,\ln r\big)\sin 2n\theta\big) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \theta\cos 2n\theta\,\frac{1}{4n}\int\limits_0^1 sG_n(r,s)\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \sin 2n\theta \left(\frac{1}{4n}\int\limits_0^1 sG_n(r,s)\tilde{u}_{2n}(s)\,ds + \frac{1}{4n}\int\limits_0^1 s\bar{G}_n(r,s)\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds\right). \tag{20}$$

Функції $r^{2n}\sin 2n\theta$ і $r^{2n}(\ln r\,\sin 2n\theta + \theta\cos 2n\theta)$ є гармонічними, $p \in C^1([0,\pi])$, $p(0) = 0$, отже, згідно з [6], перший ряд у (20) є функцією з класу $C(\bar{Q}) \bigcap C^2(Q)$.

З леми 1 та оцінок (19) за ознакою Вейєрштрасса маємо, що $\tilde{y} \in C(\bar{Q})$.

Залишилося дослідити рівномірну на $[a,b] \times [c,d] \subset (0,1) \times (0,\pi)$ збіжність рядів з похідних по r,θ першого та другого порядку від функцій

$$B_n(r,\theta) = \frac{1}{4n}\int\limits_0^1 sG_n(r,s)\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds\,\theta\cos 2n\theta = b_n(r)\,\theta\cos 2n\theta,$$

$$C_n(r,\theta) = \frac{1}{4n}\int\limits_0^1 sG_n(r,s)\tilde{u}_{2n}(s)\,ds\,\sin 2n\theta = c_n(r)\,\sin 2n\theta,$$

$$D_n(r,\theta) = \frac{1}{4n}\int\limits_0^1 s\bar{G}_n(r,s)\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds\,\sin 2n\theta = d_n(r)\,\sin 2n\theta.$$

З оцінок (19) одержимо, що ряди з похідних $\dfrac{\partial}{\partial\theta}, \dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}$ збігаються на $\bar{Q}$ рівномірно за ознакою Вейєрштрасса.

Для будь-яких $r \in [a,b]$, $n > 1$

$$b_n(r) = \frac{1}{4n}\left((r^{2n} - r^{-2n})\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds + r^{2n}\int\limits_r^1 (s^{2n+1} - s^{1-2n})\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds\right), \tag{21}$$

$$b_n'(r) = \frac{1}{2}(r^{2n-1} + r^{-2n-1})\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds + \frac{1}{2}\,r^{2n-1}\int\limits_r^1 (s^{2n+1} - s^{1-2n})\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds$$

(доданки, які не містять інтегралів, взаємно знищуються),

$$b_n''(r) = \frac{1}{2}\left((2n-1)r^{2n-2} + (-2n-1)r^{-2n-2}\right)\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds +$$

$$+ \frac{1}{2}(2n-1)r^{2n-2}\int\limits_r^1 (s^{2n+1} - s^{1-2n})\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds + \tilde{u}_{2n-1}(r). \tag{22}$$

Оскільки $\int_0^r s^{2n+1}\,ds = \dfrac{r^{2n+1}}{2n+2}$,

$$\int\limits_r^1 (s^{2n+1} - s^{1-2n})\,ds = -\frac{n}{1-n^2} - \frac{r^{2n+2}}{2n+2} + \frac{r^{2-2n}}{2-2n},$$

то існує $C_1 > 0$ таке, що

$$|b_n'(r)| \le \frac{C_1}{n}\frac{\alpha^{2n-1}}{n}\left(|p_{2n-1}| + |p_{2n}|\right),$$

а отже, ряди $\sum_{n=2}^\infty \dfrac{\partial}{\partial r}B_n(r,\theta)$, $\sum_{n=2}^\infty \dfrac{\partial}{\partial r}C_n(r,\theta)$, $\sum_{n=2}^\infty \dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}B_n(r,\theta)$, $\sum_{n=2}^\infty \dfrac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}C_n(r,\theta)$ збігаються рівномірно на $[a,b]\times[c,d]$.

З тих же оцінок $|b_n''(r)| \le C_2\dfrac{\alpha^{2n-1}}{n}(|p_{2n-1}|+|p_{2n}|)$ і, таким чином, ряди $\sum_{n=2}^\infty \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}B_n(r,\theta)$, $\sum_{n=2}^\infty \dfrac{\partial^2}{\partial r^2}C_n(r,\theta)$ збігаються рівномірно на $[a,b]\times[c,d]$.

Для функції $d_n(r)$ маємо

$$d_n(r) = \frac{1}{8n^2}r^{-2n}\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds - \frac{1}{8n^2}r^{2n}\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds +$$

$$+ \frac{1}{4n}r^{2n}\int\limits_0^r s^{2n+1}\ln s\,\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds + \frac{1}{4n}r^{2n}\ln r\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds -$$

$$- \frac{r^{-2n}}{4n}\int\limits_0^r s^{2n+1}\ln s\,\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds + \frac{r^{-2n}\ln r}{4n}\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds +$$

$$+ \frac{1}{8n^2}r^{2n}\int\limits_r^1 s^{-2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds - \frac{1}{8n^2}r^{2n}\int\limits_r^1 s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds +$$

$$+ \frac{1}{4n}r^{2n}\int\limits_r^1 s^{2n+1}\ln s\,\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds + \frac{1}{4n}r^{2n}\ln r\int\limits_r^1 s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds -$$

$$-\frac{1}{4n}\,r^{2n}\ln s\int\limits_r^1 s^{-2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds+\frac{1}{4n}\,r^{2n}\int\limits_r^1 s^{-2n+1}\ln r\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds,$$

$$\begin{aligned}
d_n'(r) = &-\frac{1}{4n}\,r^{-2n-1}\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds-\frac{1}{4n}\,r^{2n-1}\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds+\\
&+\frac{1}{2}\,r^{2n-1}\int\limits_0^r s^{2n+1}\ln s\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds+\frac{1}{4n}\left(2nr^{2n-1}\ln r+r^{2n-1}\right)\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds+\\
&+\frac{1}{2}\,r^{-2n-1}\int\limits_0^r s^{2n+1}\ln s\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds+\\
&+\frac{1}{4n}\,\left(-2nr^{-2n-1}\ln r+r^{-2n-1}\right)\int\limits_0^r s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds+\\
&+\frac{1}{4n}\,r^{2n-1}\int\limits_r^1 s^{-2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds-\frac{1}{4n}\,r^{2n-1}\int\limits_r^1 s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds+\\
&+\frac{1}{2}\,r^{2n-1}\int\limits_r^1 s^{2n+1}\ln s\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds+\frac{1}{4n}\left(2nr^{2n-1}\ln r+r^{2n-1}\right)\int\limits_r^1 s^{2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds-\\
&-\frac{1}{4n}\,\left(2nr^{2n-1}\ln r+r^{2n-1}\right)\int\limits_r^1 s^{-2n+1}\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds+\\
&+\frac{1}{2}\,r^{2n-1}\int\limits_r^1 s^{-2n+1}\ln s\tilde{u}_{2n-1}(s)\,ds\qquad\forall r\in[a,b].
\end{aligned}$$

Оскільки

$$\int\limits_0^r s^{2n+1}\ln s\,ds=\frac{1}{2n+2}\,r^{2n+2}\ln r-\frac{r^{2n+2}}{(2n+2)^2},$$

то існує $C_3>0$ таке, що

$$|d_n'(r)|\le\frac{C_3}{n}\,\frac{\alpha^{2n-1}}{n}\,(|p_{2n-1}|+|p_{2n}|),$$

отже, ряди $\sum_{n=2}^\infty\frac{\partial}{\partial r}\,D_n(r,\theta)$, $\sum_{n=2}^\infty\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\,D_n(r,\theta)$ збігаються рівномірно на $[a,b]\times[c,d]$.

Легко бачити, що існує $C_4 > 0$ таке, що

$$|d_n''(r)| \leq C_4 \frac{\alpha^{2n-1}}{n} (|p_{2n-1}| + |p_{2n}|),$$

отже, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial r^2} D_n(r,\theta)$ збігається рівномірно на $[a,b] \times [c,d]$.

Таким чином, $\tilde{y} \in C(\bar{Q}) \bigcap C^2(Q)$, і теорему доведено.

Зауваження. Якщо $u(r,\theta) \in C(\bar{Q})$ і з деякою константою $C > 0 \; \forall n \geq 1 : |u_n(r)| \leq \leq \frac{C}{n^2}$, то керування u є допустимим у задачі (1), (2), тобто відповідна функція $y(r,\theta)$ з (5) визначає класичний розв'язок (1).

Висновки. У роботі доведено розв'язність задачі оптимального керування на класичних розв'язках еліптичної крайової задачі в круговому секторі з рівністю потоків на радіусах та рівністю нулю розв'язку на одному з радіусів у класі розподілених керувань для квадратичного критерію якості.

1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 414 с.

2. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978. — 463 с.

3. *Белозеров В. Е., Капустян В. Е.* Геометрические методы модального управления. — Киев: Наук. думка, 1999. — 259 с.

4. *Капустян В. Е.* Оптимальная стабилизация ограниченным сосредоточенным управлением решений параболической краевой задачи // Проблемы управления и информатики. — 1999. — № 6. — С. 58 – 67.

5. *Капустян Е. А., Наконечный А. Г.* Синтез оптимального ограниченного управления для параболической краевой задачи с быстро осциллирующими коэффициентами // Проблемы управления и информатики. — 1999. — № 6. — С. 44 – 57.

6. *Моисеев Е. И., Амбарцумян В. Э.* О разрешимости нелокальной краевой задачи с равенством потоков на части границы и сопряженной к ней системе // Дифференц. уравнения. — 2010. — **46**, № 5. — С. 718 – 725.

7. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференц. уравнения. — 1977. — **13**, № 2. — С. 294 – 304.

Одержано 22.04.13