УДК 517.929

# ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ В СЛУЧАЕ НЕЙТРАЛЬНОГО ЛИНЕЙНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

**Д. В. Бельский**

*Ин-т математики НАН Украины*
*Украина, 01601, Киев, ул. Терещенковская, 3*

*We study stability in the case of a neutral linear approximation.*

*Вивчається стійкість у випадку нейтрального лінійного наближення.*

Изучается система уравнений

$$x' = Ax + F_2(t)x^2 + F_3(t)x^3 + \ldots, \tag{1}$$

где $A$ — постоянная вещественная $(2m \times 2m)$-матрица, которая подобна диагональной матрице с чисто мнимыми попарно комплексно-сопряженными собственными числами на главной диагонали; $F_l(t)x^l$ — однородные полиномы степени $l$ от $x_1, \ldots, x_{2m}$ с периодическими или почти периодическими вещественными коэффициентами — вектор-функциями от $t$. Устойчивость нулевого решения этой системы при постоянных коэффициентах в однородных полиномах изучалась в [1]. В настоящей статье предлагается конструктивный метод построения возмущенной функции Ляпунова [2, 3] на основе техники теории нормальных форм для некоторых случаев системы (1). Сама теория нормальных форм [4] для таких систем неприменима.

Сначала определим функцию Ляпунова для невозмущенной системы

$$x' = Ax = S\mathrm{diag}\,(iw_1, \ldots, iw_m, -iw_1, \ldots, -iw_m)\, S^{-1}x = SDS^{-1}x. \tag{2}$$

Выполним замену переменных $x = Sz$:

$$z' = \mathrm{diag}\,(iw_1, \ldots, iw_m, -iw_1, \ldots, -iw_m)\, z.$$

Пусть $V_0(z) \overset{\mathrm{df}}{=} (z, z) = z^T \bar{z} = \sum_{i=1}^{2m} z_i \bar{z}_i = \sum_{i=1}^{2m} |z_i|^2 = \|z\|^2$. Производная этой функции в силу последней системы для $z$ такова:

$$\frac{dV_0}{dt} = (z', z) + (z, z') = (Dz, z) + (z, Dz) = (Dz, z) + (D^* z, z) = (Dz, z) - (Dz, z) = 0.$$

Мы считаем $x$ вещественным вектором. Поэтому суперпозиция $V_0(S^{-1}x) = \|S^{-1}x\|^2$ — положительно определенная квадратичная форма с вещественными коэффициентами, которая тождественно равна константам на вещественных решениях системы (2).

Сначала изучим случай $m = 1$, когда матрица $A$ имеет размер $2 \times 2$ и два собственных числа $\pm iw$, $w \neq 0$. Основываясь на функции Ляпунова для невозмущенной системы (2)

$V_0(S^{-1}x) = (V_2x, x)$, где $V_2$ — симметричная вещественная матрица, построим возмущенную функцию Ляпунова для системы (1) в виде

$$V(t,x) = (V_2x,x) + V_3(t)x^3 + V_4(t)x^4 + \ldots + V_{2n}(t)x^{2n}, \quad n \geq 2, \tag{3}$$

где $V_l(t)x^l$ — однородные полиномы степени $l$ от $x_1$, $x_2$ с переменными вещественными коэффициентами — функциями от $t$. Для этого найдем условия, обеспечивающие знакоопределенность производной функции $V(t,x)$ в силу системы (1). Вычислим эту производную

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= 2\left(V_2x, Ax + \sum_{j=2}^{+\infty} F_j(t)x^j\right) + \sum_{m=3}^{2n}\left\{\frac{\partial V_m(t)x^m}{\partial t} + \frac{\partial V_m(t)x^m}{\partial x}\left(Ax + \sum_{j=2}^{+\infty} F_j(t)x^j\right)\right\} = \\
&= \left\{2\left(V_2x, F_2(t)x^2\right) + \frac{\partial V_3(t)x^3}{\partial t} + \frac{\partial V_3(t)x^3}{\partial x}Ax\right\} + \\
&+ \left\{2\left(V_2x, F_3(t)x^3\right) + \frac{\partial V_3(t)x^3}{\partial x}F_2(t)x^2 + \frac{\partial V_4(t)x^4}{\partial t} + \frac{\partial V_4(t)x^4}{\partial x}Ax\right\} + \ldots \\
&\ldots + \sum_{m=5}^{2n}\left\{2\left(V_2x, F_{m-1}(t)x^{m-1}\right) + \sum_{l=3}^{m-1}\frac{\partial V_l(t)x^l}{\partial x}F_{m-l+1}(t)x^{m-l+1} + \right. \\
&\left. + \frac{\partial V_m(t)x^m}{\partial t} + \frac{\partial V_m(t)x^m}{\partial x}Ax\right\} + 2\left(V_2x, \sum_{j=2n}^{+\infty} F_j(t)x^j\right) + \\
&+ \sum_{m=3}^{2n}\frac{\partial V_m(t)x^m}{\partial x}\sum_{j=2n-m+2}^{+\infty} F_j(t)x^j.\end{aligned} \tag{4}$$

В фигурных скобках находятся однородные полиномы степеней $m = 3, 4, \ldots, 2n$. Однородные полиномы нечетных степеней не могут быть знакопостоянными ($G_{2l+1}(-x)^{2l+1} = -G_{2l+1}x^{2l+1}, l \geq 0$), не будучи тождественно равными нулю. Поэтому их нужно обнулить, т. е. сначала решить уравнение

$$\frac{\partial V_3(t)x^3}{\partial t} + \frac{\partial V_3(t)x^3}{\partial x}Ax = -2(V_2x, F_2(t)x^2). \tag{5}$$

Это можно сделать методом характеристик, но необходимость ограниченности коэффициентов в полиномах $V_l(t)x^l$ влечет необходимость использовать технику теории нормальных форм.

На основе жордановой нормальной формы матрицы $A = S\mathrm{diag}\,(iw, -iw)S^{-1} = SDS^{-1}$ определим величины $\Lambda = (iw, -iw)^T$, $Q = (q_1, q_2)^T$, где $q_{1,2}$ — целые неотрицательные числа, $|Q| = q_1 + q_2$, $x^Q = x_1^{q_1}x_2^{q_2}$. Тогда множество функций $\{e_Q(x) = (S^{-1}x)^Q \,\big|\, |Q| = m\}$, где $m \in N$ фиксировано, образует базис в линейном над $C$ пространстве скалярных однородных полиномов степени $m$. Поэтому $V_3(t)x^3 = \sum_{|Q|=3} v_Q(t)e_Q(x)$, $-2(V_2x, F_2(t)x^2) =$

$= \sum_{|Q|=3} \varphi_Q(t) e_Q(x)$ и уравнение (5) принимает вид

$$\sum_{|Q|=3} \frac{dv_Q(t)}{dt}\, e_Q(x) + \sum_{|Q|=3} v_Q(t) \frac{\partial e_Q(x)}{\partial x}\, Ax = \sum_{|Q|=3} \varphi_Q(t) e_Q(x).$$

Преобразуем произведение

$$\frac{\partial e_Q(x)}{\partial x}\, Ax = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} e_Q\left(e^{As}x\right) = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \left(S^{-1}e^{As}x\right)^Q = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \left(e^{Ds}S^{-1}x\right)^Q =$$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} \left\{ e^{(\Lambda,Q)s} \left(S^{-1}x\right)^Q \right\} = (\Lambda, Q) \left(S^{-1}x\right)^Q = (\Lambda, Q) e_Q(x).$$

Поэтому уравнение (5) эквивалентно системе уравнений

$$\frac{dv_Q(t)}{dt} + (\Lambda, Q) v_Q(t) = \varphi_Q(t) \quad \forall Q : |Q| = 3. \tag{6}$$

Определим матрицу $T \stackrel{\text{df}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Поскольку $AS = SD$ и $A\bar{S} = \bar{S}\bar{D}$, матрица $S$ — это два комплексно-сопряженных собственных вектора матрицы $A$, соответствующие собственным числам $\pm iw$. Эти матрицы имеют следующие свойства: $\bar{S} = ST$, $T^2 = E$, $\overline{S^{-1}} = TS^{-1}$. Поэтому $\overline{e_Q(x)} = \left(\overline{S^{-1}}x\right)^Q = \left(TS^{-1}x\right)^Q = \left(S^{-1}x\right)^{TQ} = e_{TQ}(x)$.

Если однородный полином $B_k(t)x^k = \sum_{|Q|=k} b_Q(t) e_Q(x)$ веществен, то выполняются тождества

$$B_k(t)x^k = \sum_{|Q|=k} b_Q(t) e_Q(x) \equiv \overline{B_k(t)x^k} = \sum_{|Q|=k} \overline{b_Q(t)} e_{TQ}(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{|Q|=k} b_{TQ}(t) e_{TQ}(x) \equiv \sum_{|Q|=k} \overline{b_Q(t)} e_{TQ}(x) \Leftrightarrow \overline{b_Q(t)} \equiv b_{TQ}(t) \quad \forall |Q| = k.$$

Поэтому, так как полином $-2(V_2x, F_2(t)x^2) = \sum_{|Q|=3} \varphi_Q(t) e_Q(x)$ веществен, $\overline{\varphi_Q(t)} \equiv \varphi_{TQ}(t)$ для $|Q| = 3$. Для вещественности полинома $V_3(t)x^3 = \sum_{|Q|=3} v_Q(t) e_Q(x)$ необходимо и достаточно выполнения равенств $\overline{v_Q(t)} \equiv v_{TQ}(t)$, $|Q| = 3$. Поскольку функция $\overline{v_Q(t)}$ — решение уравнения

$$\overline{\frac{dv_Q(t)}{dt} + (\Lambda, Q) v_Q(t)} = \overline{\varphi_Q(t)} \Leftrightarrow \frac{d\overline{v_Q(t)}}{dt} + (\Lambda, TQ)\overline{v_Q(t)} = \varphi_{TQ}(t),$$

а коэффициент $v_{TQ}(t)$ — решение уравнения $\dfrac{dv_{TQ}(t)}{dt} + (\Lambda, TQ) v_{TQ}(t) = \varphi_{TQ}(t)$ и дифференциальные уравнения для обеих функций совпадают, тождество $\overline{v_Q(t)} \equiv v_{TQ}(t)$ эквивалентно равенству $\overline{v_Q(0)} = v_{TQ}(0)$. Таким образом, для вещественности полинома $V_3(t)x^3$ необходимо и достаточно выполнения равенств $\overline{v_Q(0)} = v_{TQ}(0)$, $|Q| = 3$.

Для ограниченности функций $v_Q(t)$ предположим, что коэффициенты полинома $F_2(t)x^2$ периодические с периодом $2\pi$ и разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды Фурье, т. е. функции $\varphi_Q(t)$ периодические и $\varphi_Q(t) = \sum_{p\in Z}\varphi_{Q,p}e^{ipt}$, $\sum_{p\in Z}|\varphi_{Q,p}| < +\infty$. Мы также предполагаем, что $(q_1-q_2)w+p \neq 0$. Для иррационального $w$ это условие выполняется как только $q_1 \neq q_2$. В исследуемом сейчас случае $|Q| = 3$ это неравенство всегда выполняется. Тогда из уравнения (6) получаем формулу

$$v_Q(t) = e^{i(q_2-q_1)wt}\left(v_Q(0) + \int\limits_0^t e^{i(q_1-q_2)ws}\varphi_Q(s)ds\right) =$$

$$= e^{i(q_2-q_1)wt}\left(v_Q(0) - \sum_{p\in Z}\frac{\varphi_{Q,p}}{i\{(q_1-q_2)w+p\}}\right) + \sum_{p\in Z}\frac{\varphi_{Q,p}e^{ipt}}{i\{(q_1-q_2)w+p\}}.$$

Пусть $v_Q(0) = \sum_{p\in Z}\dfrac{\varphi_{Q,p}}{i\{(q_1-q_2)w+p\}}$. Проверим вещественность полинома $V_3(t)x^3$. Для этого исследуем свойства коэффициентов Фурье функций $\varphi_Q(t)$:

$$\sum_{p\in Z}\bar{\varphi}_{Q,p}e^{-ipt} = \overline{\varphi_Q(t)} \equiv \varphi_{TQ}(t) = \sum_{p\in Z}\varphi_{TQ,p}e^{ipt} \Leftrightarrow \sum_{-(-p)\in Z}\bar{\varphi}_{Q,-(-p)}e^{i(-p)t} =$$

$$= \sum_{-p\in Z}\bar{\varphi}_{Q,-p}e^{ipt} = \sum_{p\in Z}\bar{\varphi}_{Q,-p}e^{ipt} = \sum_{p\in Z}\varphi_{TQ,p}e^{ipt} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{\varphi}_{Q,p} = \varphi_{TQ,-p}, \quad |Q| = 3, \quad p \in Z.$$

Отсюда получаем

$$\overline{v_Q(0)} = \sum_{p\in Z}\frac{\varphi_{TQ,-p}}{-i\{(q_1-q_2)w+p\}} = \sum_{p\in Z}\frac{\varphi_{TQ,-p}}{i\{(q_2-q_1)w-p\}} = \sum_{p\in Z}\frac{\varphi_{TQ,p}}{i\{(q_2-q_1)w+p\}} = v_{TQ}(0).$$

Таким образом, полином $V_3(t)x^3$ вещественен с $2\pi$-периодическими коэффициентами и однородный полином 3-й степени в (4) равен нулю.

Если предположить, что коэффициенты полинома $F_3(t)x^3$ имеют те же свойства, что и коэффициенты $F_2(t)x^2$, то полином 4-й степени в (4) можно частично исследовать как уравнение

$$\frac{\partial V_4(t)x^4}{\partial t} + \frac{\partial V_4(t)x^4}{\partial x}Ax = -2\left(V_2x, F_3(t)x^3\right) - \frac{\partial V_3(t)x^3}{\partial x}F_2(t)x^2.$$

Иными словами, сумма в левой части может обнулить не все слагаемые в правой части, если функцию $V_4(t)x^4$ строить по этому алгоритму. А именно, в случае $q_1 \neq q_2 \neq 2$, снова предполагая, что $(q_1-q_2)w+p \neq 0$, мы можем с помощью $2\pi$-периодических коэффициентов $v_Q(t)$ слева обнулить соответствующие коэффициенты $\varphi_Q(t)$ справа. И условие вещественности полинома для всех $Q \neq (2,2)^T$ выполняется. При $Q = (2,2)^T$ и $(\Lambda, Q) = 0$ для $v_{(2,2)^T}(t)$ получаем уравнение

$$\frac{dv_{(2,2)^T}(t)}{dt} = \varphi_{(2,2)^T}(t) = \overline{\varphi_{T\binom{2}{2}}(t)} = \overline{\varphi_{(2,2)^T}(t)}.$$

Если $\int_0^{2\pi} \varphi_{(2,2)^T}(t)dt \neq 0$, то последнее уравнение не имеет ограниченных решений. Но с помощью ограниченного коэффициента $v_{(2,2)^T}(t)$ можно обнулить следующую часть функции справа: $\varphi_{(2,2)^T}(t) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_{(2,2)^T}(s)ds$. Таким образом, в полиноме 4-й степени в (4) осталось одно слагаемое $he_{(2,2)^T}(x) = h\left(S^{-1}x\right)^{(2,2)^T}$, где $h = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_{(2,2)^T}(t)dt$. Пусть $S = \begin{pmatrix} a & \bar{a} \\ b & \bar{b} \end{pmatrix}$, тогда $h\left(S^{-1}x\right)^{(2,2)^T} = h\left|\frac{-bx_1}{a\bar{b}-\bar{a}b} + \frac{ax_2}{a\bar{b}-\bar{a}b}\right|^4$, где сумма под знаком модуля является координатой вектора $S^{-1}x$; первая координата этого вектора комплексно сопряжена со второй и $\left\|S^{-1}x\right\|^2 = 2\left|\frac{-bx_1}{a\bar{b}-\bar{a}b} + \frac{ax_2}{a\bar{b}-\bar{a}b}\right|^2$ — положительно определенная вещественная квадратичная форма. Поэтому выполняется неравенство

$$|h|\left(S^{-1}x\right)^{(2,2)^T} \geq \gamma\|x\|^4, \quad \gamma > 0.$$

Если $h < 0$, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво, а если $h > 0$, — неустойчиво. Это следует из теорем Ляпунова [2]. Действительно, в формуле (3) мы ограничиваемся тремя слагаемыми ($n = 2$): первое из них — положительно определенная вещественная квадратичная форма, остальные — однородные полиномы 3- и 4-й степени с ограниченными коэффициентами, поэтому функция $V(t,x)$ является положительно определеной с бесконечно малым высшим пределом при $x \to 0$. Знакоопределенность производной функции $V(t,x)$ в силу системы (1) следует из предположения

$$\sum_{j=2}^{+\infty}\left\|F_j(t)x^j\right\| \leq \sum_{j=2}^{+\infty} f_j\|x\|^j < +\infty, \quad \|x\| < r, \tag{7}$$

и оценки для случая $h < 0$

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= h\left|\frac{-bx_1}{a\bar{b}-\bar{a}b} + \frac{ax_2}{a\bar{b}-\bar{a}b}\right|^4 + 2\left(V_2x, \sum_{j=4}^{+\infty} F_j(t)x^j\right) + \\
&\quad + \frac{\partial V_3(t)x^3}{\partial x}\sum_{j=3}^{+\infty} F_j(t)x^j + \frac{\partial V_4(t)x^4}{\partial x}\sum_{j=2}^{+\infty} F_j(t)x^j \leq \\
&\leq -\gamma\|x\|^4 + 2\|V_2\|\|x\|\sum_{j=4}^{+\infty} f_j\|x\|^j + \rho_1\|x\|^2\sum_{j=3}^{+\infty} f_j\|x\|^j + \rho_2\|x\|^3\sum_{j=2}^{+\infty} f_j\|x\|^j = \\
&= \left\{-\gamma + \left(2\|V_2\|\sum_{j=0}^{+\infty} f_{j+4}\|x\|^j + \rho_1\sum_{j=0}^{+\infty} f_{j+3}\|x\|^j + \rho_2\sum_{j=0}^{+\infty} f_{j+2}\|x\|^j\right)\|x\|\right\}\|x\|^4 \leq -\frac{\gamma}{2}\|x\|^4
\end{aligned}$$

при $\|x\| < r_1 < r$. Аналогично для $h > 0$ получаем $\frac{dV}{dt} \geq \frac{\gamma}{2}\|x\|^4$ при $\|x\| < r_1 < r$.

Периодичность коэффициентов и абсолютная сходимость их рядов Фурье необходимы только для полиномов $F_2(t)x^2$ и $F_3(t)x^3$, для остальных слагаемых ряда в системе (1) достаточно выполнения условия (7).

В случае $h = 0$ этот алгоритм можно продолжать до тех пор, пока не будет найдена функция $V_{2n}(t)x^{2n}$ с ненулевым значением интеграла $\int_0^{2\pi} \varphi_{(n,n)^T}(t)dt.$

Если для всех $n \geq 2$ последний интеграл равен нулю, то возникает проблема сходимости ряда (3), которая может быть не менее сложной, чем теорема о сходимости рядов Пуанкаре в теории нормальных форм [4].

Исследуем теперь немного более общий случай: $m \geq 2$ и коэффициенты $f_Q(t)$ полиномов $F_2(t)x^2$ и $F_3(t)x^3$ — почти периодические функции с абсолютно сходящимися рядами Фурье

$$f_Q(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_{Q,k}e^{iu_kt}, \quad u_k \in R, \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|f_{Q,k}\| < +\infty, \quad |Q| = 2,3.$$

Из вещественности функций получаем $u_k = -u_{-k}$ и $\overline{f_{Q,k}} = f_{Q,-k}$, $k \in Z$. Матрица $S$ в этом случае также является объединением собственных векторов матрицы $A$, $S = [s_1, \dots, s_m, \bar{s}_1, \dots, \bar{s}_m]$, матрица $T = \begin{pmatrix} 0 & E_m \\ E_m & 0 \end{pmatrix}$, где $E_m$ — единичная матрица размера $m \times m$. Свойства матриц, критерий вещественности однородных полиномов в терминах базиса $e_Q(x)$, свойства этого базиса такие же, как и в случае $m = 1$. Вектор $x$ снова веществен.

Для построения полиномов $V_3(t)x^3$, $V_4(t)x^4$ используем тот же алгоритм и предположим, что для $|Q| = 3, 4$, $\{k, j\} \subset Z$ условие

$$(\Lambda, Q) + i(u_k + u_j) = i\{(q_1 - q_{m+1})w_1 + \ldots + (q_m - q_{2m})w_m + u_k + u_j\} = 0$$

влечет равенства $q_j = q_{m+j}$, $j = \overline{1, m}$.

Для $|Q| = 3$ снова получаем

$$v_Q(t) = e^{-(\Lambda,Q)t}\left(v_Q(0) + \int_0^t e^{(\Lambda,Q)s}\varphi_Q(s)ds\right). \tag{8}$$

Из формы коэффициентов полинома $F_2(t)x^2$ можно заключить, что

$$\varphi_Q(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_{Q,k}e^{iu_kt}.$$

При $|Q| = 3$ выполняются неравенства $(\Lambda, Q) + iu_k \neq 0$ и

$$v_Q(t) = e^{-(\Lambda,Q)t}\left(v_Q(0) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_{Q,k}}{(\Lambda, Q) + iu_k}\right) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_{Q,k}e^{iu_kt}}{(\Lambda, Q) + iu_k}.$$

Мы также всегда предполагаем, что второе слагаемое — ряд экспонент — сходится абсолютно. Пусть $v_Q(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dfrac{\varphi_{Q,k}}{(\Lambda, Q) + iu_k}$. Проверим выполнение условия вещественности полинома $V_3(t)x^3$. Справедливо тождество

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi_{Q,k}} e^{-iu_k t} = \overline{\varphi_Q(t)} \equiv \varphi_{TQ}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_{TQ,k} e^{iu_k t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi_{Q,k}} e^{-iu_k t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi_{Q,k}} e^{iu_{-k} t} =$$

$$= \sum_{-(-k)=-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi_{Q,-(-k)}} e^{iu_{-k} t} = \sum_{-k=-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi_{Q,-k}} e^{iu_k t} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi_{Q,-k}} e^{iu_k t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_{TQ,k} e^{iu_k t} \Leftrightarrow \overline{\varphi_{Q,k}} = \varphi_{TQ,-k}, \quad k \in Z.$$

Поэтому

$$\overline{v_Q(0)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_{TQ,-k}}{(\Lambda, TQ) - iu_k} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_{TQ,-k}}{(\Lambda, TQ) + iu_{-k}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_{TQ,k}}{(\Lambda, TQ) + iu_k} = v_{TQ}(0),$$

т. е. условие вещественности выполняется.

Для $|Q| = 4$ из формы коэффициентов полиномов $V_3(t)x^3$, $F_2(t)x^2$ и $F_3(t)x^3$ можно заключить, что $\varphi_Q(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_{Q,k,j} e^{i(u_k+u_j)t}$ и этот ряд сходится абсолютно. Поэтому если вектор $Q \neq 2(e_j + e_{m+j})$, $j = \overline{1, m}$, и $Q \neq e_k + e_{m+k} + e_l + e_{m+l}$, $1 \leq k < l \leq$ $\leq m$, где $e_j$ — единичный орт пространства $R^{2m}$, то $(\Lambda, Q) + i(u_k + u_j) \neq 0$ и из (8) получаем

$$v_Q(t) = e^{-(\Lambda,Q)t} \left( v_Q(0) - \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_{Q,k,j}}{(\Lambda, Q) + i(u_k + u_j)} \right) + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_{Q,k,j} e^{i(u_k+u_j)t}}{(\Lambda, Q) + i(u_k + u_j)}.$$

Пусть $v_Q(0) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \dfrac{\varphi_{Q,k,j}}{(\Lambda, Q) + i(u_k + u_j)}$. Проверим выполнение условия вещественности полинома $V_4(t)x^4$. Справедливо тождество

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi_{Q,k,j}} e^{-i(u_k+u_j)t} = \overline{\varphi_Q(t)} \equiv \varphi_{TQ}(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_{TQ,k,j} e^{i(u_k+u_j)t} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi_{Q,k,j}} e^{i(u_{-k}+u_{-j})t} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi_{Q,-k,-j}} e^{i(u_k+u_j)t} =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi_{TQ,k,j} e^{i(u_k+u_j)t} \Leftrightarrow \overline{\varphi_{Q,k,j}} = \varphi_{TQ,-k,-j} \quad \forall \{k,j\} \subset Z,$$

поэтому

$$\overline{v_Q(0)} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_{TQ,-k,-j}}{(\Lambda, TQ) - i(u_k+u_j)} =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_{TQ,-k,-j}}{(\Lambda, TQ) + i(u_{-k}+u_{-j})} =$$

$$= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_{TQ,k,j}}{(\Lambda, TQ) + i(u_k+u_j)} = v_{TQ}(0).$$

Условие вещественности для таких $Q$ выполняется.

Если вектор $Q = 2(e_j + e_{m+j})$, $j = \overline{1,m}$, или $Q = e_k + e_{m+k} + e_l + e_{m+l}$, $1 \leq k < l \leq m$, то $(\Lambda, Q) = 0$, $TQ = Q$ и $\overline{\varphi_Q(t)} \equiv \varphi_{TQ}(t) = \varphi_Q(t)$. Уравнение $\dfrac{dv_Q(t)}{dt} = \varphi_Q(t)$ может не иметь ограниченных решений, но с помощью ограниченного коэффициента $v_Q(t)$ можно обнулить следующую часть функции справа: $\varphi_Q(t) - \lim_{b\to+\infty} \dfrac{1}{b}\displaystyle\int_0^b \varphi_Q(s)ds$. Таким образом, в полиноме 4-й степени в (4) остались слагаемые $h_Q e_Q(x) = h_Q \left(S^{-1}x\right)^Q$, где $h_Q = -\lim_{b\to+\infty} \dfrac{1}{b}\displaystyle\int_0^b \varphi_Q(s)ds$:

$$\sum_{Q=2(e_j+e_{m+j}),\ j=\overline{1,m}} h_Q e_Q(x) + \sum_{Q=e_k+e_{m+k}+e_l+e_{m+l},\ 1\leq k<l\leq m} h_Q e_Q(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \left|\left(S^{-1}x\right)_j\right|^4 +$$

$$+ \sum_{1\leq k<l\leq m} c_{k,l} \left|\left(S^{-1}x\right)_k\right|^2 \left|\left(S^{-1}x\right)_l\right|^2 \stackrel{\text{df}}{=} g(x),$$

где $c_j = h_Q, Q = 2(e_j+e_{m+j}), j = \overline{1,m}$; $c_{k,l} = h_Q, Q = e_k+e_{m+k}+e_l+e_{m+l}, 1 \leq k < l \leq m$; $\left(S^{-1}x\right)_j$ — $j$-я координата вектора $S^{-1}x$. Последняя сумма — это вещественная квадратичная форма от аргументов $\left|\left(S^{-1}x\right)_k\right|^2$, $k = \overline{1,m}$. Если выполняется условие (7), то ее отрицательная или положительная определенность влечет асимптотическую устойчивость или неустойчивость нулевого решения системы (1) соответственно. В то же время $g(x)$ — однородный полином четвертой степени, поэтому могут быть другие достаточные условия для выполнения неравенств $g(x) \leq -\gamma\|x\|^4$ или $g(x) \geq \gamma\|x\|^4$, $\gamma > 0$.

Если $g(x) \equiv 0$, то этот алгоритм можно продолжить до остаточного однородного полинома 6-й степени с постоянными вещественными коэффициентами — полинома 3-й степени от $\left|\left(S^{-1}x\right)_k\right|^2$, $k = \overline{1,m}$, в однородном многочлене 6-й степени в (4) и т. д.

Автор выражает благодарность профессору Парасюку И. О. за постановку задачи и основные идеи ее решения.

1. *Молчанов А. М.* Устойчивость в случае нейтральности линейного приближения // Докл. АН СССР. — 1961. — **141**, № 1. — С. 24–27.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
3. *Хапаев М. М.* Проблемы устойчивости в системах обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. — 1980. — **35**, вып. 1. — С. 127–170.
4. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 304 с.


*Получено 27.05.14*