УДК 517.929.8

ОБЩАЯ СХЕМА УСРЕДНЕНИЯ СИСТЕМ ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

О. Д. Кичмаренко, М. Л. Карпычева

Одес. нац. ун-т им. И. И. Мечникова
ул. Дворянская, 2, Одесса, 65026, Украина

We consider a system of discrete equations containing a variable delay, and use an averaging method for finding a solution. We propose methods to account for a given variable delay when solving an averaged system. We prove that solutions of the averaged and the initial systems are close.

Розглядається система дискретних рівнянь, що містять змінне запізнення. Для знаходження розв'язку використано метод усереднення. Запропоновано варіанти обліку заданого змінного запізнення при розв'язуванні усередненої системи. Доведено близкість розв'язків заданої та відповідної усередненої систем.

Введение. Изучение различных технических систем, таких, например, как системы автоматического регулирования, системы с импульсным воздействием, иные дискретные динамические системы, а также применение современных цифровых технологий приводит к необходимости использования дискретных уравнений в качестве модели [1, 2].

Реакция изучаемой системы на некоторые воздействия может иметь запаздывающий характер. Для описания таких процессов используются системы дискретных уравнений с запаздыванием.

Применение метода усреднения к системам дискретных уравнений известно давно. Так, в работе [3] доказана первая теорема Н. Н. Боголюбова для конечно-разностных уравнений, а в работе [4] — вторая теорема Н. Н. Боголюбова для систем разностных уравнений. Однако в этих работах содержится требование непрерывности функций, находящихся в правых частях уравнений. Более общая схема усреднения систем дискретных уравнений стандартного вида и соответствующих задач управления и оптимального управления приведена в работе [5]. Применение метода усреднения к системам дискретных уравнений с постоянным запаздыванием и соответствующих задач управления и оптимального управления обосновано в работах [6, 7]. В работе [8] метод усреднения применен к дискретным системам уравнений с переменным запаздыванием в случае периодической правой части.

Основные результаты. Данная работа посвящена применению метода усреднения для исследования систем дискретных уравнений с переменным запаздыванием общего вида

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon\, f(i, x_i, x_{s(i)}), \quad x_0 = x^0, \tag{1}$$

где $x_i \in D \subset R^n$ — текущее состояние системы, индекс i определяет текущий момент дискретного времени, причем $i \in I = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, $N = E(L\varepsilon^{-1})$, $L = \mathrm{const}$, $E(a)$ — целая часть числа a, D — замкнутое множество в пространстве R^n, $f(\cdot,\cdot,\cdot)\colon I \times D \times D \to$ $\to R^n$ — заданная функция, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, заданная функция $s(i) \in I_s =$

$= \{0, 1, 2, \ldots, i\}$ определяет момент дискретного времени влияния переменного запаздывания на текущее i-е состояние системы.

Определение. *Решением системы дискретных уравнений (1) назовем $x = \{x_i, i \in \in I\}$ — множество значений $x_i \in D$, полученных по рекуррентной формуле (1) в каждой точке дискретного времени $i \in I = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$.*

Поскольку момент запаздывания $s(i) \leq i$ для любого $i \in I$, решение $x = \{x_i, i \in \in I\}$ системы дискретных уравнений (1) существует, если заданная функция $f(i, x_i, x_{s(i)})$ определена для любого $x_i \in D$ и $i \in I$.

Пусть в системе (1) для функции $f(i, w^1, w^2)$ существует предел

$$f_0\left(w^1, w^2\right) = \lim_{h\to\infty} \frac{1}{h} \sum_{j=q}^{q+h-1} f\left(j, w^1, w^2\right) \tag{2}$$

равномерно относительно целочисленного $q \geq 0$ и $w^1, w^2 \in D$.

Системе (1) поставим в соответствие усредненную задачу вида

$$y_{i+1} = y_i + \varepsilon\, f_0(y_i, y_{s(i)}), \quad y_0 = x^0. \tag{3}$$

Исследуем вопрос о близости решений $x = \{x_i, i \in I\}$ системы (1) и $y = \{y_i, i \in I\}$ системы (3) на конечном асимптотически большом промежутке дискретного времени $i \in I = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, $N = E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$.

Теорема 1. *Пусть в области $Q = \{i \in I; x_i \in D\}$ выполнены следующие условия:*

1) функция $f(i, w^1, w^2)$ равномерно ограничена константой M и удовлетворяет условию Липшица по w^1, w^2 с постоянной λ;

2) равномерно относительно целочисленного $q \geq 0$ и w^1, $w^2 \in D$ существует предел (2);

3) функция $s(i)$ принимает целочисленные значения из $I_s = \{0, 1, 2, \ldots, i\}$ для любого $i \in I$ и удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ_s;

4) решение $y = \{y_i, i \in I\}$ усредненной системы (3) при $y_0 = x^0 \in D' \subset D$ вместе со своей ρ-окрестностью принадлежит области D.

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ существует такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $i \in I = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$, $N = E\left(L\varepsilon^{-1}\right)$, выполняется

$$\|x_i - y_i\| \leq \eta, \tag{4}$$

где $x = \{x_i, i \in I\}$ и $y = \{y_i, i \in I\}$ — решения систем уравнений (1) и (3) соответственно.

Доказательство. Пусть $x = \{x_i, i \in I\}$ — решение исходной системы (1), а $y = \{y_i, i \in \in I\}$ — решение усредненной системы (3) при $x_0 = y_0 = x^0 \in D' \subset D$. Из условия 4 теоремы следует, что решение усредненной системы вместе с ρ-окрестностью лежит в области D.

Выберем произвольное $\eta > 0$, $\eta \leq \rho$, и зафиксируем его. Систему (1) и усредненную систему (3) представим в виде

$$x_{i+1} = x^0 + \varepsilon \sum_{j=0}^{i} f(j, x_j, x_{s(j)}), \quad y_{i+1} = x^0 + \varepsilon \sum_{j=0}^{i} f_0(y_j, y_{s(j)})$$

и оценим разность между соответствующими значениями

$$\|x_{i+1}-y_{i+1}\| = \left\|\varepsilon\sum_{j=0}^{i} f(j,x_j,x_{s(j)}) - \varepsilon\sum_{j=0}^{i} f_0(y_j,y_{s(j)})\right\| \le$$

$$\le \varepsilon\sum_{j=0}^{i}\left\|f(j,x_j,x_{s(j)}) - f(j,y_j,y_{s(j)})\right\| +$$

$$+\,\varepsilon\left\|\sum_{j=0}^{i}\left[f(j,y_j,y_{s(j)}) - f_0(y_j,y_{s(j)})\right]\right\|.$$

С учетом выполнения условия 1 теоремы неравенство принимает вид

$$\|x_{i+1}-y_{i+1}\| \le \varepsilon\lambda\sum_{j=0}^{i}(\|x_j-y_j\| + \|x_{s(j)}-y_{s(j)}\|) +$$

$$+\,\varepsilon\left\|\sum_{j=0}^{i}[f(j,y_j,y_{s(j)}) - f_0(y_j,y_{s(j)})]\right\| \le$$

$$\le 2\varepsilon\lambda\sum_{j=0}^{i}\delta_j + \varepsilon\left\|\sum_{j=0}^{i}[f(j,y_j,y_{s(j)}) - f_0(y_j,y_{s(j)})]\right\|, \tag{5}$$

где

$$\delta_j = \max_{0\le l\le j}\|x_l - y_l\|. \tag{6}$$

Неравенство (5) выполняется для любого $i \in \{0,1,2,\ldots,N-1\}$, тогда

$$\delta_N \le 2\varepsilon\lambda\sum_{j=0}^{N-1}\delta_j + \varepsilon\max_{i\in I}\left\|\sum_{j=0}^{i}[f(j,y_j,y_{s(j)}) - f_0(y_j,y_{s(j)})]\right\|. \tag{7}$$

Для оценки второго слагаемого в неравенстве (7) выберем целочисленное значение $h(\varepsilon)$, имеющее свойства

$$\lim_{\varepsilon\to 0} h(\varepsilon) = +\infty, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\, h(\varepsilon) = 0. \tag{8}$$

На множестве $I = \{0,1,2,\ldots,N\}$ зафиксируем точки kh, отстоящие одна от другой на расстоянии $h(\varepsilon)$, при этом получим медленно меняющееся время

$$k \in I_k = \{0,1,2,\ldots,N_k\}, \quad N_k = E\left(\frac{L}{\varepsilon h}\right). \tag{9}$$

Для произвольного момента времени $i \in I$ определим соответствующее значение медленного времени $k \in I_k$ такое, что $i \in [kh, (k+1)\,h)$. Для оценки второго слагаемого в (7) выделим отдельно сумму на k-м промежутке

$$\left\| \sum_{j=0}^{i} [f(j, y_j, y_{s(j)}) - f_0(y_j, y_{s(j)})] \right\| \le \left\| \sum_{j=0}^{kh-1} [f(j, y_j, y_{s(j)}) - f_0(y_j, y_{s(j)})] \right\| + \\ + \left\| \sum_{j=kh}^{i} [f(j, y_j, y_{s(j)}) - f_0(y_j, y_{s(j)})] \right\|. \tag{10}$$

В неравенстве (10) оценим сначала второе слагаемое. Учитывая условие 1 теоремы, при $i \in [kh, (k+1)h)$ получаем

$$\left\| \sum_{j=kh}^{i} [f(j, y_j, y_{s(j)}) - f_0(y_j, y_{s(j)})] \right\| \le \sum_{j=kh}^{i} \| f(j, y_j, y_{s(j)}) \| + \\ + \sum_{j=kh}^{i} \| f_0(y_j, y_{s(j)}) \| \le 2hM. \tag{11}$$

Первое слагаемое в (10) преобразуем следующим образом:

$$\left\| \sum_{j=0}^{kh-1} [f(j, y_j, y_{s(j)}) - f_0(y_j, y_{s(j)})] \right\| \le \\ \le \sum_{l=0}^{k-1} \left\| \sum_{j=lh}^{(l+1)h-1} [f\left(j, y_j, y_{s(j)}\right) - f_0(y_j, y_{s(j)})] \right\| \le \\ \le \sum_{l=0}^{k-1} \left\| \sum_{j=lh}^{(l+1)h-1} [f(j, y_j, y_{s(j)}) - f(j, y_{lh}, y_{s(lh)})] \right\| + \\ + \sum_{l=0}^{k-1} \left\| \sum_{j=lh}^{(l+1)h-1} [f(j, y_{lh}, y_{s(lh)}) - f_0(y_{lh}, y_{s(lh)})] \right\| + \\ + \sum_{l=0}^{k-1} \left\| \sum_{j=lh}^{(l+1)h-1} [f_0(y_{lh}, y_{s(lh)}) - f_0(y_j, y_{s(j)})] \right\| \le \\ \le \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{j=lh}^{(l+1)h-1} \left\| f(j, y_j, y_{s(j)}) - f(j, y_{lh}, y_{s(lh)}) \right\| +$$

$$+\sum_{l=0}^{k-1}\left\|\sum_{j=lh}^{(l+1)h-1} f(j,y_{lh},y_{s(lh)})-h\,f_0(y_{lh},y_{s(lh)})\right\|+$$

$$+\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{j=lh}^{(l+1)h-1}\left\|f_0(y_{lh},y_{s(lh)})-f_0(y_j,y_{s(j)})\right\|\leq$$

$$\leq 2\lambda\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{j=lh}^{(l+1)h-1}\left(\|y_j-y_{lh}\|+\|y_{s(j)}-y_{s(lh)}\|\right)+$$

$$+\,h\sum_{l=0}^{k-1}\left\|\frac{1}{h}\sum_{j=lh}^{(l+1)h-1} f(j,y_{lh},y_{s(lh)})-f_0(y_{lh},y_{s(lh)})\right\|. \tag{12}$$

Учитывая условия 1, 3 теоремы, а также то, что $j\in(lh,(l+1)\,h]$, оцениваем составляющие первого слагаемого в (12):

$$\|y_j-y_{lh}\|=\varepsilon\left\|\sum_{t=lh}^{j-1} f_0(y_t,y_{s(t)})\right\|\leq\varepsilon hM, \tag{13}$$

$$\|y_{s(j)}-y_{s(lh)}\|\leq\varepsilon\left\|\sum_{\min(s(j),s(lh))\leq t<\max(s(j),s(lh))} f_0(y_t,y_{s(t)})\right\|\leq$$

$$\leq\varepsilon M\|s(j)-s(lh)\|=\varepsilon M\lambda_s\|j-lh\|\leq\varepsilon hM\lambda_s. \tag{14}$$

При выполнении условия 2 теоремы можно указать такую монотонно убывающую функцию $\psi(h)$, удовлетворяющую соотношению $\lim_{h\to\infty}\psi(h)=0$, что для второго слагаемого в (12) при любом $l\in I_k$ получаем

$$\left\|\frac{1}{h}\sum_{j=lh}^{(l+1)h-1} f(j,y_{lh},y_{s(lh)})-f_0(y_{lh},y_{s(lh)})\right\|\leq\psi(h). \tag{15}$$

Из неравенства (12) с учетом оценок (13) – (15) следует, что

$$\left\|\sum_{j=0}^{kh-1}\left[f(j,y_j,y_{s(j)})-f_0(y_j,y_{s(j)})\right]\right\|\leq 2\lambda kh\,(\varepsilon hM+\varepsilon hM\lambda_s)+hk\,\psi(h)\leq$$

$$\leq 2h\lambda\,\varepsilon kh\,M\,(1+\lambda_s)+kh\,\psi(h)\leq$$

$$\leq 2h\lambda LM(1+\lambda_s)+kh\,\psi(h). \tag{16}$$

При этом из неравенства (10) с учетом (16), (11) получаем оценку

$$\left\|\sum_{j=0}^{i}\left[f(j,y_j,y_{s(j)})-f_0(y_j,y_{s(j)})\right]\right\|\leq 2h\lambda LM(1+\lambda_s)+kh\,\psi(h)+2hM,$$

а неравенство (7) принимает вид

$$\delta_N \le 2\varepsilon\lambda \sum_{j=0}^{N-1} \delta_j + 2\varepsilon h\lambda LM(1+\lambda_s) + L\psi(h) + 2\varepsilon hM. \tag{17}$$

Применяя к соотношению (17) дискретный аналог леммы Гроноулла – Беллмана [9], имеем

$$\delta_N \le (2\varepsilon h\lambda LM(1+\lambda_s) + L\psi(h) + 2\varepsilon hM)\, e^{2\lambda L}. \tag{18}$$

Из определения функции $\psi(h)$ и соотношений (8) следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (2\varepsilon h\lambda LM(1+\lambda_s) + L\psi(h) + 2\varepsilon hM) = 0.$$

Это значит, что для произвольно выбранных $\eta > 0$ и $L > 0$ найдется такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $i \in I = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ из неравенства (18) следует искомая оценка (4).

Теорема 1 доказана.

Известно [3], что применение метода усреднения для систем дискретных уравнений в стандартном виде позволяет находить численное решение усредненной системы с шагом, который существенно больше, чем шаг нахождения решения исходной системы. Для усредненной системы уравнений (3) этот шаг $h(\varepsilon)$ можно взять равным величине, удовлетворяющей условиям (8). Поэтому наряду с усредненной системой (3) рассмотрим усредненную систему в медленном времени вида

$$\xi_{k+1} = \xi_k + \varepsilon h\, f_0(\xi_k, \xi_{m(k)}), \quad \xi_0 = x^0, \tag{19}$$

где $\xi_k \in D \subset R^n$ — текущее состояние системы в медленном времени $k \in I_k = \{0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, N_k\}$, $N_k = E\left(\dfrac{L}{\varepsilon h}\right)$, а целочисленная функция

$$m(k) = E\left(\frac{s(kh)}{h}\right) \tag{20}$$

определяет моменты времени влияния запаздывания на текущее состояние системы для усредненной задачи в медленном времени, причем $m(k) \le k$ для любого $k \in I_k$, а это значит, что $m(k) \in I_m = \{0, 1, 2, \ldots, k\}$.

Для синхронизации времени при получении оценки близости решений $x = \{x_i, i \in I\}$ исходной системы (1) и $\xi = \{\xi_k, k \in I_k\}$ усредненной системы (19) определим промежуточные значения для решения усредненной системы с помощью кусочно-линейной интерполяции по формуле

$$\gamma_i = \xi_k + \frac{(i - kh)(\xi_{k+1} - \xi_k)}{h}, \tag{21}$$

где $i \in [kh, (k+1)h)$ — текущее дискретное время задачи (1), находящееся между соответствующими моментами дискретного времени усредненной задачи (19).

Докажем, что решение $\xi = \{\xi_k, k \in I_k\}$ усредненной системы в медленном времени (19) близко к решению $x = \{x_i, i \in I\}$ исходной системы (1) в соответствующие моменты времени.

Теорема 2. *Пусть в области $Q = \{i \in I; x_i \in D\}$ выполнены три первых условия теоремы 1. Кроме того,*

4) решение $\xi = \{\xi_k, k \in I_k\}$ усредненной задачи (19) при $\xi_0 = x^0 \in D' \subset D$ вместе со своей ρ-окрестностью принадлежит области D.

Тогда для любых $\eta > 0$ и $L > 0$ существует такое $\varepsilon_0(\eta, L) > 0$, что для любых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $i \in I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$, $N = E(L\varepsilon^{-1})$, выполняется

$$\|x_i - \gamma_i\| \le \eta, \tag{22}$$

а для всех $k \in I_k = \{0, 1, 2, \dots, N_k\}$, $N_k = E\left(\dfrac{L}{\varepsilon h}\right)$ и $i \in [kh, (k+1)h)$

$$\|x_i - \xi_k\| \le \eta, \tag{23}$$

где $x = \{x_i, i \in I\}$ — решение задачи (1), $\xi = \{\xi_k k \in I_k\}$ — решение задачи (19), $\gamma = \{\gamma_i i \in I\}$ — интерполяция решения $\{\xi_k\}_{k \in I_k}$ на множество I, если $x_0 = \xi_0 = \gamma_0 = x^0 \in D' \subset D$.

Доказательство. Пусть $x = \{x_i, i \in I\}$ — решение заданной системы (1), $\xi = \{\xi_k, k \in I_k\}$ — решение усредненной системы (19) в медленном времени. Из условий теоремы следует, что решение $\gamma = \{\gamma_i, i \in I\}$ системы (21) при $\gamma_0 = x_0 = \xi_0 = x^0 \in D' \subset D$ вместе со своей ρ-окрестностью лежит в области D.

Выберем произвольное $\eta > 0$, $\eta \le \rho$, и зафиксируем его. Установим сначала оценку (23). Для любого $i \in [kh, (k+1)h)$, $k \in I_k = \{0, 1, 2, \dots, N_k\}$, $N_k = E\left(\dfrac{L}{\varepsilon h}\right)$, выполняется

$$\|x_i - \xi_k\| \le \|x_i - y_i\| + \|y_i - y_{kh}\| + \|y_{kh} - \xi_k\|, \tag{24}$$

где $y = \{y_i, i \in I\}$ — решение усредненной системы (3) при $y_0 = x^0 \in D' \subset D$.

Из теоремы 1 следует, что для любых $\eta_1 > 0$ и $L > 0$ найдется такое $\varepsilon_1(\eta_1, L) > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ и $i \in I = \{0, 1, 2, \dots, N\}$, $N = E(L\varepsilon^{-1})$, для первого слагаемого в (24) будет

$$\|x_i - y_i\| \le \eta_1. \tag{25}$$

Оценка второго слагаемого в (24) аналогична (13), т. е. для любого $i \in [kh, (k+1)h)$, $k \in I_k$, выполняется

$$\|y_i - y_{kh}\| \le \varepsilon h M. \tag{26}$$

Для оценки третьего слагаемого в (24) воспользуемся представлениями соответствующих систем в виде

$$y_{(k+1)h} = y_{kh} + \varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} f_0(y_j, y_{s(j)}),$$

$$\xi_{k+1} = \xi_k + \varepsilon h\, f_0(\xi_k, \xi_{m(k)}) = \xi_k + \varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} f_0(\xi_k, \xi_{m(k)}).$$

Тогда при выполнении условий теоремы получим

$$\|y_{(k+1)h} - \xi_{k+1}\| \le \|y_{kh} - \xi_k\| + \varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \|f_0(y_j, y_{s(j)}) - f_0(\xi_k, \xi_{m(k)})\| \le$$

$$\le \|y_{kh} - \xi_k\| + \varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \|f_0(y_j, y_{s(j)}) - f_0(y_{kh}, y_{s(kh)})\| +$$

$$+ \varepsilon \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} \|f_0(y_{kh}, y_{s(kh)}) - f_0(\xi_k, \xi_{m(k)})\| \le$$

$$\le \|y_{kh} - \xi_k\| + \varepsilon\lambda \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} (\|y_j - y_{kh}\| + \|y_{s(j)} - y_{s(kh)}\|) +$$

$$+ \varepsilon\lambda \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} (\|y_{kh} - \xi_k\| + \|y_{s(kh)} - \xi_{m(k)}\|). \tag{27}$$

Оценка второго слагаемого в (27) следует из (13), (14) и имеет вид

$$\varepsilon\lambda \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} (\|y_j - y_{kh}\| + \|y_{s(j)} - y_{s(kh)}\|) \le \varepsilon h \lambda \varepsilon h M (1 + \lambda_s). \tag{28}$$

Третье слагаемое в (27) преобразуем к виду

$$\varepsilon\lambda \sum_{j=kh}^{(k+1)h-1} (\|y_{kh} - \xi_k\| + \|y_{s(kh)} - \xi_{m(k)}\|) =$$

$$= \varepsilon h \lambda \|y_{kh} - \xi_k\| + \varepsilon h \lambda \|y_{s(kh)} - y_{m(k)h}\| + \varepsilon h \lambda \|y_{m(k)h} - \xi_{m(k)}\|. \tag{29}$$

Для оценки второго слагаемого в (29) с учетом введенной в рассмотрение функции запаздывания (20) получим

$$\|y_{s(kh)} - y_{m(k)h}\| \le \varepsilon \left\| \sum_{\min(s(kh),m(k)h)\le j<\max(s(kh),m(k)h)} f_0(y_j, y_{s(j)}) \right\| \le$$

$$\le \varepsilon M \|s(kh) - m(k)h\| = \varepsilon h M \left\| \frac{s(kh)}{h} - E\left(\frac{s(kh)}{h}\right) \right\| \le \varepsilon h M. \tag{30}$$

Неравенство (27) с учетом (28) – (30) примет вид

$$\|y_{(k+1)h} - \xi_{k+1}\| \le \|y_{kh} - \xi_k\| + \varepsilon h\lambda\varepsilon hM(1+\lambda_s) +$$

$$+ \varepsilon h\lambda \|y_{kh} - \xi_k\| + \varepsilon h\lambda\varepsilon hM + \varepsilon h\lambda \|y_{m(k)h} - \xi_{m(k)}\|. \tag{31}$$

Обозначим

$$\sigma_k = \max_{0\le j\le k} \|y_{jh} - \xi_j\|, \tag{32}$$

тогда из неравенства (31) следует соотношение

$$\|y_{(k+1)h} - \xi_{k+1}\| \le (1 + 2\varepsilon h\lambda)\sigma_k + (\varepsilon h)^2 \lambda M(2+\lambda_s),$$

которое выполняется для любого $k \in \{0, 1, \ldots, N_k - 1\}$, поэтому

$$\sigma_{N_k} \le (1 + 2\varepsilon h\lambda)\sigma_{N_k-1} + (\varepsilon h)^2 \lambda M(2+\lambda_s). \tag{33}$$

Если обозначить

$$a = (1 + 2\varepsilon h\lambda), \quad b = (\varepsilon h)^2\lambda M(2+\lambda_s), \tag{34}$$

то неравенство (33) примет вид

$$\sigma_{N_k} \le a\sigma_{N_k-1} + b \le a(a\sigma_{N_k-2} + b) + b = a^2\sigma_{N_k-2} + b(a+1) \le$$

$$\le a^2(a\sigma_{N_k-3} + b) + b(a+1) = a^3\sigma_{N_k-3} + b(a^2+a+1) \le \ldots$$

$$\ldots \le a^{N_k}\sigma_0 + b(a^{N_k-1} + \ldots + a^2 + a + 1) \le a^{N_k}\sigma_0 + b\,\frac{a^{N_k-1}-1}{a-1},$$

откуда, учитывая, что $\sigma_0 = \|y_0 - \xi_0\| = 0$, в соответствии с (32) и в силу обозначений (34) получаем

$$\sigma_{N_k} \le (\varepsilon h)^2\lambda M(2+\lambda_s)\,\frac{(1+2\varepsilon h\lambda)^{N_k-1}-1}{(1+2\varepsilon h\lambda)-1} \le \varepsilon hM(1+0,5\lambda_s)\left[(1+2\varepsilon h\lambda)^{N_k-1}-1\right].$$

Последний множитель в полученном неравенстве содержит степень, в основании которой величина $2\varepsilon h\lambda \to 0$, а показатель степени $N_k = E\left(\dfrac{L}{\varepsilon h}\right) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$, поэтому

$$\sigma_{N_k} \leq \varepsilon hM(1+0,5\lambda_s)\left[\left[(1+2\varepsilon h\lambda)^{\frac{1}{2\varepsilon h\lambda}}\right]^{2\varepsilon h\lambda(N_k-1)-1}\right] \leq \varepsilon hM(1+0,5\lambda_s)(e^{2\lambda L}-1). \quad (35)$$

Из (24), учитывая (25), (26), (35), для всех $i \in [kh,(k+1)h)$, $k \in I_k$, находим

$$\|x_i - \xi_k\| \leq \eta_1 + \varepsilon hM + \varepsilon hM(1+0,5\lambda_s)(e^{2\lambda L}-1). \quad (36)$$

По произвольно выбранным $\eta_1 < \eta$ и $L > 0$ найдем $\varepsilon_0(\eta, L) \leq \varepsilon_1$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, всех $k \in I_k = \{0,1,2,\ldots,N_k\}$, $N_k = E\left(\dfrac{L}{\varepsilon h}\right)$, и $i \in [kh,(k+1)h)$ получим

$$\eta_1 + \varepsilon hM + \varepsilon hM(1+0,5\lambda_s)\left(e^{2\lambda L}-1\right) \leq \eta,$$

откуда следует оценка (23).

Установим оценку (22). Для любого $i \in [kh,(k+1)h)$, $k \in I_k = \{0,1,2,\ldots,N_k\}$, $N_k = E\left(\dfrac{L}{\varepsilon h}\right)$, выполняется неравенство

$$\|x_i - \gamma_i\| \leq \|x_i - \xi_k\| + \|\xi_k - \gamma_i\|, \quad (37)$$

второе слагаемое в котором

$$\|\xi_k - \gamma_i\| \leq \left\|\frac{(i-kh)(\xi_{k+1}-\xi_k)}{h}\right\| \leq \left\|\frac{(i-kh)\varepsilon h\, f_0(\xi_k,\xi_{m(k)})}{h}\right\| \leq \varepsilon hM.$$

Тогда из (36), (37) получим

$$\|x_i - \gamma_i\| \leq \eta_1 + \varepsilon hM + \varepsilon hM(1+0,5\lambda_s)(e^{2\lambda L}-1) + \varepsilon hM.$$

По произвольно выбранным $\eta_1 < \eta$ и $L > 0$ найдем $\varepsilon_0(\eta, L) \leq \varepsilon_1$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ и $i \in I = \{0,1,2,\ldots,N\}$, $N = E(L\varepsilon^{-1})$, выполняется неравенство

$$\eta_1 + 2\varepsilon hM + \varepsilon hM(1+0,5\lambda_s)(e^{2\lambda L}-1) \leq \eta,$$

откуда следует оценка (22).

Теорема 2 доказана.

Пример. Рассмотрим дискретное уравнение с переменным запаздыванием

$$x_{i+1} = x_i + \varepsilon\left[\left(-1+\frac{1}{1+i}\right)x_i + \left(-1+\frac{1}{1+i}\right)x_{s(i)}\right],$$

где x_i — текущее состояние системы в момент времени $i \in I = \{0, 1, 2, \ldots, \}$, $N = E(L\varepsilon^{-1})$, $L = \mathrm{const}$, функция запаздывания определяется по формуле

$$s(i) = i - E\left(\frac{i}{2}\right).$$

Усреднение в уравнении проведем по формуле (2):

$$\lim_{h\to\infty} \frac{1}{h} \sum_{j=q}^{q+h-1} \left[\left(-1 + \frac{1}{1+j}\right) w^1 + \left(-1 + \frac{1}{1+j}\right) w^2\right] = -w^1 - w^2.$$

Получим соответствующее усредненное дискретное уравнение

$$y_{i+1} = y_i + \varepsilon(-y_i - y_{s(i)})$$

и усредненное уравнение в медленном времени $k \in I_k = \{0, 1, 2, \ldots, N_k\}$, $N_k = E\left(\frac{L}{\varepsilon h}\right)$,

$$\xi_{k+1} = \xi_k + \varepsilon h(-\xi_k - \xi_{m(k)}),$$

где величина h удовлетворяет условиям (8), а новое запаздывание в медленном времени $k \in I_k$ определяется формулой

$$m(k) = E\left(\frac{s(kh)}{h}\right).$$

Промежуточные значения для усредненного уравнения в медленном времени найдем при $i \in [kh, (k+1)h)$ для всех $k \in I_k$ по формуле

$$\gamma_i = \xi_k + \frac{(i - kh)(\xi_{k+1} - \xi_k)}{h}.$$

Вычислим $x = \{x_i, i \in I\}$, $y = \{y_i, i \in I\}$, $\xi = \{\xi_k, k \in I_k\}$, $\gamma = \{\gamma_i, i \in I\}$ — решения соответствующих уравнений при $L = 5$, $x^0 = 1,5$ для различных значений малого параметра $\varepsilon > 0$ и построим графики соответствующих функций (см. рис. 1–3).

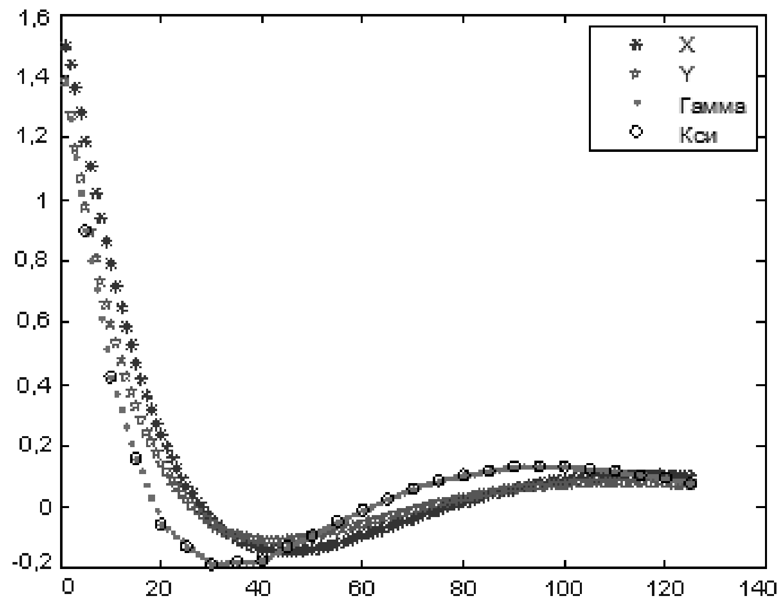

Рис. 1. Решения уравнений при $\varepsilon = 0,04$.

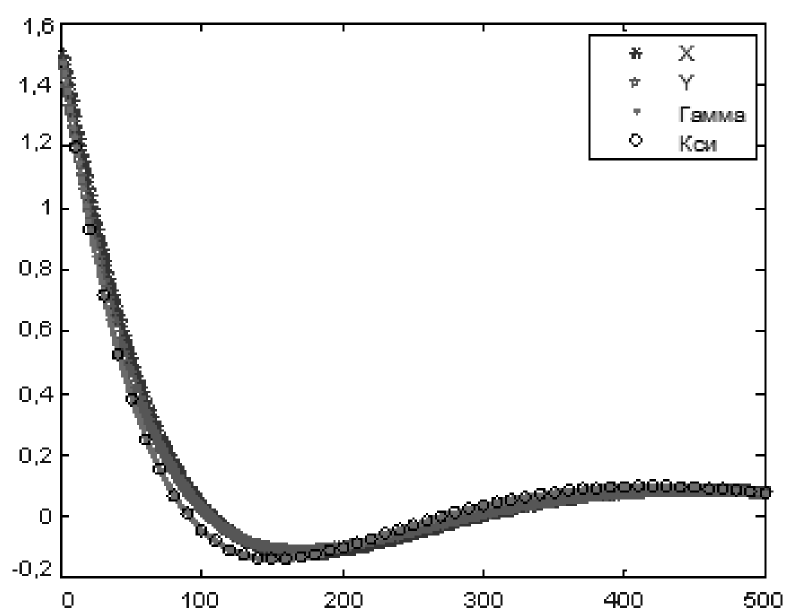

Рис. 2. Решения уравнений при $\varepsilon = 0,01$.

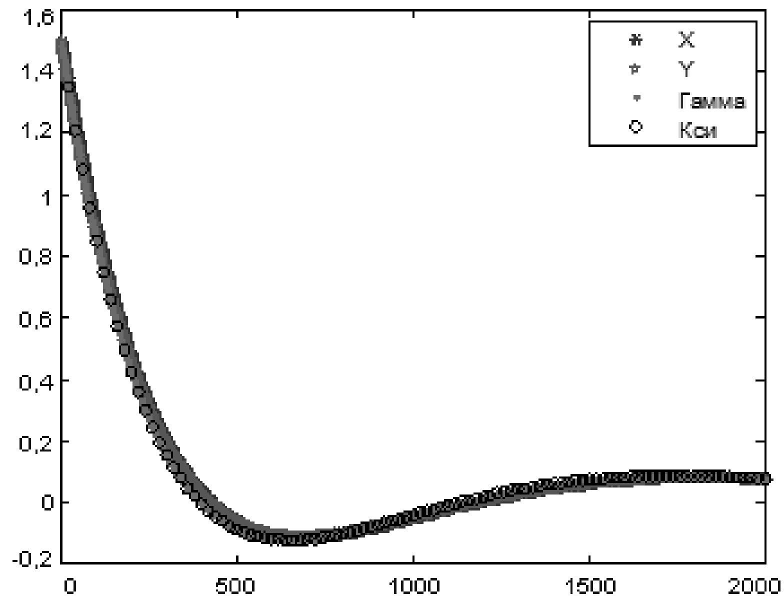

Рис. 3. Решения уравнений при $\varepsilon = 0,0025$.

Полученные результаты при различных значениях малого параметра $\varepsilon > 0$ представлены в таблице, при этом N — количество значений в решении исходного уравнения, N_k — количество значений в решении усредненного уравнения в медленном времени и соответствующие погрешности.

ε	N	N_k	$\max \|x_i - y_i\|$	$\max \|x_i - \gamma_i\|$
0,04	125	25	0,2181	0,3677
0,01	500	50	0,0796	0,1404
0,0025	2000	100	0,0273	0,0560
0,0004	12500	250	0,0061	0,0185
0,0001	50000	500	0,0019	0,0086

Полученные результаты подтверждают выводы доказанных теорем.

Литература

1. *Benjamin C. Kuo.* Digital control systems. — 2nd ed. — Oxford Univ. Press, 1995. — 784 p.
2. *D'Antona G., Ferrero A.* Digital signal processing for measurement systems: theory and applications. — Springer, 2006. — 268 p.
3. *Белан Е. Л.* О методе усреднения в теории конечно-разностных уравнений // Укр. мат. журн. — 1967. — **19**, № 3. — С. 85 – 90.
4. *Мартынюк Д. И., Данилов В. И., Паньков В. Г.* Вторая теорема Н. Н. Боголюбова для систем разностных уравнений // Укр. мат. журн. — 1996. — **48**, № 4. — С. 464 – 475.

5. *Plotnikov V. A., Plotnikova L. I., Yarovoi A. T.* Averaging method for discrete systems and its application to control problems // Nonlinear Oscillations. — 2004. — **7**, № 2. — P. 240 – 253.

6. *Кичмаренко О. Д., Карпычева М. Л.* Усреднение систем дискретных уравнений с постоянным запаздыванием // Научн. вестн. Ужгород. ун-та. Математика и информатика. — 2012. — Вып. 23, № 2. — С. 76 – 85.

7. *Кичмаренко О. Д., Карпычева М. Л.* Усреднение периодических управляемых систем с постоянным запаздыванием на дискретном времени // Вестн. Одес. нац. ун-та. Математика и механика. — 2012. — **17**, вып. 1 – 2. — С. 54 – 69.

8. *Кичмаренко О. Д., Карпычева М. Л.* Усреднение дискретных уравнений с переменным запаздыванием в задачах управления // XII Всерос. сов. по проблемам управления ВСПУ-2014: Труды [электрон. ресурс]. — М.: Ин-т пробл. управления РАН, 2014. — С. 1304 – 1316.

9. *Апарцин А. С.* Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. — Новосибирск: Наука, 1999. — 193 с.

Получено 26.02.15,
после доработки — 08.04.16