УДК 517.929.2

ПРО ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ ЗІ СТРИБКОМ ОПЕРАТОРНОГО КОЕФІЦІЄНТА

М. Ф. Городній, І. В. Гончар

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
вул. Володимирська, 64, Київ, 01033, Україна

We study the problem of existence of a unique bounded solution of a difference equation with variable operator coefficient in a finite-dimensional Banach space.

Исследуется вопрос о существовании единственного ограниченного решения одного разностного уравнения с переменным операторным коэффициентом в конечномерном банаховом пространстве.

Нехай X — скінченновимірний комплексний банахів простір із нормою $\|\cdot\|$ і нульовим елементом $\bar{0}$; A, B — лінійні оператори в X, для яких існують обернені оператори A^{-1}, B^{-1}; I — одиничний оператор в X.

Розглянемо різницеве рівняння

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= Ax_n + y_n, \quad n \geq 1, \\ x_{n+1} &= Bx_n + y_n, \quad n \leq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

в якому $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — задана, а $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ — шукана послідовність елементів простору X.

Мета цієї статті — отримати необхідні і достатні умови на оператори A, B, при виконанні яких справджується наступна умова.

Умова 1. Для довільної обмеженої в X послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (1) має єдиний обмежений розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ у просторі X.

Аналогічне питання досліджувалося, зокрема, в [1–3] для різницевого рівняння зі сталими і в [2, 4–6] зі змінними операторними коефіцієнтами. У роботі [6, с. 250] доведено, що для різницевого рівняння

$$x_{n+1} = T_n x_n + y_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

умова існування єдиного обмеженого розв'язку еквівалентна умові дискретної дихотомії для послідовності операторів $\{T_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Останню умову важко перевіряти. Інший підхід до дослідження питання про існування єдиного обмеженого розв'язку рівняння (2) запропоновано в [2, с. 25]. Цей підхід розвивається і використовується в даній роботі.

У випадку, коли відповідне рівнянню (2) однорідне рівняння $x_{n+1} = T_n x_n$, $n \in \mathbb{Z}$, є експоненціально дихотомічним на півосях $\mathbb{Z}_-$, $\mathbb{Z}_+$ з проекторами Q, P відповідно і оператор $D = P - (I - Q)$ є нормально розв'язним, питання про існування обмежених розв'язків різницевого рівняння (2), відповідних заданій обмеженій послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$, розглядалось у роботах [7–10].

Допоміжні твердження. Покладемо

$$Q_- = \left\{ z \in X \mid \sup_{k \geq 1} \left\| A^k z \right\| < \infty \right\},$$

$$Q_-^{-n} = \left\{ z \in X \mid \sup_{k \geq 1} \left\| A^k B^n z \right\| < \infty \right\}, \quad n \geq 1,$$

$$Q_+ = \left\{ z \in X \mid \sup_{k \geq 1} \left\| B^{-k} z \right\| < \infty \right\},$$

$$Q_+^n = \left\{ z \in X \mid \sup_{k \geq 1} \left\| B^{-k} A^{-n} z \right\| < \infty \right\}, \quad n \geq 1.$$

Усі ці множини лінійні, а отже, є підпросторами скінченновимірного простору X.

У подальшому використовуються наступні леми.

Лема 1. *Якщо виконується умова 1, то* $X = Q_- \dot{+} Q_+$, *тобто* X *є прямою сумою* Q_- *та* Q_+.

Доведення. Зафіксуємо $u \in X$ і доведемо, що знайдуться такі $\alpha \in Q_-$, $\beta \in Q_+$, що $u = \alpha + \beta$. Розглянемо рівняння

$$u_{n+1} = Au_n, \quad n \geq 1,$$

$$u_1 = Bu_0 + u,$$

$$u_{n+1} = Bu_n, \quad n \leq -1.$$

За умовою 1 воно має єдиний розв'язок $\{u_n, n \in \mathbb{Z}\}$. Тоді u_0 належить Q_+, оскільки $u_{-k} = B^{-k} u_0$, $k \geq 1$. Із того, що $u_0 \in Q_+$, випливає, що $Bu_0 \in Q_+$. Також u_1 належить Q_-, оскільки $u_{k+1} = A^k u_1$, $k \geq 1$. Отже, $u = \alpha + \beta$, де $\alpha = u_1$, $\beta = -Bu_0$.

Доведемо єдиність розкладу. Припустимо, що $u = \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$. Тоді $\alpha_1 - \alpha_2 = \beta_2 - \beta_1$, причому $\alpha_1 - \alpha_2 \in Q_-$, $\beta_2 - \beta_1 \in Q_+$. З іншого боку, якщо існує $u \neq \bar{0}$, $u \in Q_- \cap Q_+$, то однорідне рівняння

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad n \geq 1,$$

$$x_{n+1} = Bx_n, \quad n \leq 0,$$

має окрім нульового ненульовий обмежений розв'язок

$$\left\{ \ldots, B^{-2}u, B^{-1}u, \underbrace{u}_{1}, Au, A^2u, \ldots \right\}.$$

Прийшли до суперечності.

Лему 1 доведено.

Лема 2. *Якщо* $X = Q_-\dot{+}Q_+$, *то* $X = Q_-\dot{+}Q_+^n = Q_-^{-n}\dot{+}Q_+$ *для довільного* $n \geq 1$.

Доведення. Зафіксуємо $n \geq 1$ і доведемо, що $X = Q_-^{-n}\dot{+}Q_+$. Припустимо, що існує $u \neq \bar{0}$, $u \in Q_-^{-n}\dot{+}Q_+$. Тоді $B^n u \neq \bar{0}, B^n u \in Q_- \cap Q_+$. Суперечність.

Також для кожного $u \in X$ існує зображення $u = u_{-n}^- + u_{-n}^+$, де $u_{-n}^- \in Q_-^{-n}$, $u_{-n}^+ \in \in Q_+$. Дійсно, оскільки $X = Q_-\dot{+}Q_+$, то знайдуться такі $w^- \in Q_-$, $w^+ \in Q_+$, що $B^n u = = w^- + w^+$. Покладемо $u_{-n}^- = B^{-n}w^-$. Тоді $u_{-n}^- \in Q_-^{-n}$, а також $(u - u_{-n}^-) \in Q_+$, оскільки $B^n(u - u_{-n}^-) = w^+ \in Q_+$.

Лему 2 доведено.

Лема 3. *Якщо виконується умова 1, то спектри* $\sigma(A), \sigma(B)$ *операторів* A, B *не перетинаються з одиничним колом* $S = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\lambda| = 1\right\}$.

Доведення. Припустимо, від супротивного, що існує $\lambda \in S \cap \sigma(A)$. Зафіксуємо базис $e_1, e_2, \ldots, e_m$ в X, у якому A має жорданову нормальну форму. Нехай простір X є m-вимірним, а числу λ відповідає клітина Жордана розміру $k \times k$. Базис в X вибираємо так, щоб у ньому оператору A відповідала матриця

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & | & \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0 & | & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & | & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1 & | & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda & | & \\ - & - & - & - & - & - & - & - \\ & & & & & & | & M \end{pmatrix}.$$

Тут M — квадратна матриця розмірності $(m-k) \times (m-k)$ (відсутня при $m = k$) і на незаповнених місцях розташовано нулі. Розглянемо послідовність

$$y_n = \lambda^n e_1, \quad n \geq 1; \qquad y_n = \bar{0}, \quad n \leq 0. \tag{3}$$

За умовою 1 їй відповідає єдиний розв'язок $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ рівняння (1). З (1), (3) випливає, що для всіх $n \geq 1$

$$x_{n+1} = A^n x_1 + n\lambda^n e_1. \tag{4}$$

Нехай $x_1 = \sum_{j=1}^m t_j e_j$. Оскільки

$$A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & C_n^1 \lambda^{n-1} & \ldots & C_n^{k-1}\lambda^{n-k+1} & | & \\ 0 & \lambda^n & \ldots & C_n^{k-2}\lambda^{n-k+2} & | & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & | & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda^n & | & \\ - & - & - & - & - & - \\ & & & & | & M^n \end{pmatrix}, \quad n \geq 1,$$

то внаслідок (4) перша координата $(x_{n+1})_1$ вектора x_{n+1} набирає вигляду $(x_{n+1})_1 = \lambda^n t_1 + +n\lambda^n$. Це суперечить обмеженості послідовності $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Таким чином, $S \cap \sigma(A) = \varnothing$.

Аналогічно перевіряється, що $S \cap \sigma(B) = \varnothing$.

Лему 3 доведено.

Нехай $\sigma_-(A), \sigma_-(B)$ — частини спектрів операторів A, B, які лежать всередині, а $\sigma_+(A)$, $\sigma_+(B)$ — зовні кола S. Вважатимемо, що множини $\sigma_\pm(A)$, $\sigma_\pm(B)$ непорожні. Зауважимо, що всі отримані нижче результати залишаються справедливими і у випадку, коли серед цих множин є порожні, з очевидними змінами в отриманих формулах.

Внаслідок леми 3 при виконанні умови 1 простір X розкладається в пряму суму інваріантних відносно A підпросторів $X = X_+(A)\dot{+}X_-(A)$ таким чином, що звуження A_-, A_+ оператора A на $X_-(A)$, $X_+(A)$ мають спектри $\sigma_-(A)$ $\sigma_+(A)$. Також $X = X_+(B)\dot{+}X_-(B)$ і звуження B_-, B_+ оператора B на $X_-(B)$, $X_+(B)$ мають такі ж властивості. Зазначимо, що при цьому ряди

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|A_+^{-n}\right\|,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left\|A_-^{n}\right\|,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left\|B_+^{-n}\right\|,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left\|B_-^{n}\right\|. \tag{5}$$

збігаються.

Лема 4. *Якщо* $S\cap\sigma(A)=\varnothing, S\cap\sigma(B)=\varnothing$, *то* $Q_-=X_-(A), Q_+=X_+(B)$.

Доведення. Внаслідок збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left\|A_-^n\right\|$ послідовність $\{\|A^n z\|, n\ge 1\}$ обмежена для кожного $z\in X_-(A)$: $\sup_{n\ge1}\|A^n z\| = \sup_{n\ge1}\left\|A_-^n z\right\| < \infty$, а отже, $X_-(A)\subset Q_-$.

Також при $z\in X_+(A)\cap Q_-$

$$\|z\| = \left\|A_+^{-n}A_+^n z\right\| \le \left\|A_+^{-n}\right\|\sup_{k\ge1}\left\|A_+^k z\right\| \to 0,\quad n\to\infty,$$

оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left\|A_+^{-n}\right\|$ збігається.

Таким чином, $z = \bar{0}$ і $Q_- = X_-(A)$. Аналогічно встановлюємо, що $Q_+ = X_+(B)$.

Лему 4 доведено.

Основні результати. Нехай $X = Q_-\dot{+}Q_+$. Зафіксуємо обмежену послідовність $\bar{y} = \{y_n, n\in\mathbb{Z}\}$ і покладемо $\|\bar{y}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}}\|y_n\|$. Внаслідок леми 2 елементи цієї послідовності єдиним чином зображуються у вигляді

$$y_0 = y_0^- + y_0^+,\quad y_0^-\in Q_-,\quad y_0^+\in Q_+;$$

якщо $n\ge 1$, то $y_n = y_n^- + y_n^+$, $y_n^-\in Q_-$, $y_n^+\in Q_+^n$; якщо ж $n\le -1$, то $y_n = y_n^- + y_n^+$, $y_n^-\in Q_-^{-n}$, $y_n^+\in Q_+$.

Покладемо

$$x_1 = y_0^- + \sum_{\nu=-\infty}^{-1} B^{|\nu|}y_\nu^- - \sum_{\nu=1}^{\infty}A^{-\nu}y_\nu^+, \tag{6}$$

$$x_n = y_{n-1}^- + \sum_{k=0}^{n-2}A^{n-1-k}y_k^- + \sum_{\nu=-\infty}^{-1}A^{n-1}B^{|\nu|}y_\nu^- - \sum_{\nu=n}^{\infty}A^{n-1-\nu}y_\nu^+\quad \forall n\ge 2, \tag{7}$$

$$x_n = y_{n-1}^- + \sum_{\nu=-\infty}^{n-2}B^{|\nu|+n-1}y_\nu^- - \sum_{\nu=n}^{0}B^{n-1-\nu}y_\nu^+ - \sum_{\nu=1}^{\infty}B^{n-1}A^{-\nu}y_\nu^+\quad \forall n\le 0. \tag{8}$$

Основними результатами статті є наступні теореми.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються такі умови:*

i) $\sigma(A) \cap S = \varnothing, \sigma(B) \cap S = \varnothing,$

ii) $X = X_-(A) \dot{+} X_+(B).$

Тоді ряди з (6) – (8) абсолютно збігаються за нормою і задають відповідний послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$ *обмежений розв'язок* $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ *рівняння (1). Цей розв'язок єдиний у класі всіх обмежених в* X *послідовностей.*

Доведення. Покажемо, що ряди з (6) абсолютно збігаються за нормою. Із умов i), ii) і леми 4 випливає, що $X = Q_- \dot{+} Q_+$. Позначимо через P_-, P_+ проектори в X на підпростори Q_-, Q_+, що відповідають зображенню $X = Q_- \dot{+} Q_+$. При фіксованому $n \geq 1$ внаслідок леми 2 кожен елемент $w \in X$ єдиним чином зображується у вигляді $w = w_-(n) + w_+(n)$, де $w_-(n) \in Q_-$, $w_+(n) \in Q_+^n$. При цьому $A^{-n} w_-(n) \in Q_-$, $A^{-n} w_+(n) \in Q_+$ і $A^{-n} w = A^{-n} w_-(n) + A^{-n} w_+(n)$, а отже, $P_+ A^{-n} w = A^{-n} w_+(n)$. Звідси

$$w_+(n) = A^n P_+ A^{-n} w. \tag{9}$$

Аналогічно встановлюємо, що $w = w_-(-n) + w_+(-n)$, де $w_-(n) \in Q_-^{-n}$, $w_+(n) \in Q_+$, причому

$$w_-(-n) = B^{-n} P_- B^n w. \tag{10}$$

Внаслідок (6), (9), (10)

$$x_1 = P_- y_0 + \sum_{\nu=-\infty}^{-1} P_- B^{|\nu|} y_\nu - \sum_{\nu=1}^{\infty} P_+ A^{-\nu} y_\nu. \tag{11}$$

Нехай P_-^A, P_+^A — проектори в X на $X_-(A), X_+(A)$, що відповідають зображенню $X = X_-(A) \dot{+} X_+(A)$, а P_-^B, P_+^B — проектори в X на $X_-(B), X_+(B)$, що відповідають зображенню $X = X_-(B) \dot{+} X_+(B)$. Тоді $P_+^B y_\nu \in X_+(B) = Q_+$ для кожного $\nu \leq -1$, звідки

$$P_- B^{|\nu|} y_\nu = P_- B^{|\nu|} P_-^B y_\nu + P_- B^{|\nu|} P_+^B y_\nu = P_- B_-^{|\nu|} P_-^B y_\nu. \tag{12}$$

Аналогічно для кожного $\nu \geq 1$

$$P_+ A^{-\nu} y_\nu = P_+ A_+^{-\nu} P_+^A y_\nu. \tag{13}$$

Тому з урахуванням збіжності рядів (5) та зображення (11) ряди з (6) абсолютно збігаються за нормою, а також

$$\|x_1\| \leq \|\bar{y}\|_\infty \left(\|P_-\| \, \|P_-^B\| \sum_{n=0}^{\infty} \|B_-^n\| + \|P_+\| \, \|P_+^A\| \sum_{n=1}^{\infty} \|A_+^{-n}\| \right). \tag{14}$$

Доведемо, що при фіксованому $n \geq 2$ ряди з (7) абсолютно збігаються за нормою. Зафіксуємо $w \in X$ і такі натуральні числа q, m, що $1 \leq q < m$. За лемою 2 елемент $w \in X$ єдиним чином зображується у вигляді $w = w_-(m) + w_+(m)$, де $w_-(m) \in Q_-$, $w_+(m) \in Q_+^m$. Тому

$$A^{q-m} w = A^{q-m} w_-(m) + A^{q-m} w_+(m), \tag{15}$$

причому $A^{q-m}w_-(m) \in Q_-$, $A^{q-m}w_+(m) \in Q_+^q$.

Позначимо через P_-^q, P_+^q проектори в X, які відповідають зображенню $X = Q_- \dot{+} Q_+^q$. Тоді внаслідок (15) $P_+^q A^{q-m} w = A^{q-m} w_+(m)$, а отже,

$$w_+(m) = A^{m-q} P_+^q A^{q-m} w = A^{m-q} P_+^q \left(P_-^A A_-^{q-m} P_-^A w + P_+^A A_+^{q-m} P_+^A w \right) =$$
$$= A^{m-q} P_+^q A_+^{q-m} P_+^A w. \tag{16}$$

Згідно з (7), (10), (12), (16) при $n \ge 2$ маємо

$$x_n = P_-^{n-1} y_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} A_-^{n-1-k} P_-^k y_k + A_-^{n-1} P_- y_0 +$$
$$+ \sum_{\nu=-\infty}^{-1} A_-^{n-1} P_- B_-^{|\nu|} P_-^B y_\nu - \sum_{\nu=n}^{\infty} P_+^{n-1} A_+^{n-1-\nu} P_+^A y_\nu.$$

Тому внаслідок збіжності рядів (5) ряди з (7) абсолютно збігаються за нормою і для кожного $n \ge 2$

$$\|x_n\| \le \|\bar{y}\|_\infty \left(\sum_{k=0}^{n-1} \|A_-^{n-1-k}\| \, \|P_-^k\| + \|A_-^{n-1}\| \, \|P_-\| \, \|P_-^B\| \sum_{k=0}^{\infty} \|B_-^k\| + \right.$$
$$\left. + \|P_+^{n-1}\| \, \|P_+^A\| \sum_{k=1}^{\infty} \|A_+^{-k}\| \right). \tag{17}$$

Тут $P_-^0 = P_-$, $P_+^0 = P_+$.

Аналогічно до (16), (17) перевіряється, що коли при фіксованих $w \in X$, $1 \le q < m$ позначити через P_-^{-q}, P_+^{-q} проектори в X, що відповідають зображенню $X = Q_-^{-q} \dot{+} Q_+$, то w єдиним чином зображується у вигляді $w = w_-(-m) + w_+(-m)$, де $w_-(-m) \in Q_-^{-m}$, $w_+(-m) \in Q_+$, причому

$$w_-(-m) = B^{q-m} P_-^{-q} B_-^{m-q} P_-^B w, \tag{18}$$

а також для кожного фіксованого $n \le 0$ ряди з (8) абсолютно збігаються за нормою і

$$\|x_n\| \le \|\bar{y}\|_\infty \left(\|P_-^{n-1}\| \, \|P_-^B\| \sum_{k=0}^{\infty} \|B_-^k\| + \sum_{k=0}^{|n|} \|P_+^{-k}\| \, \|B_+^{-|n|-1+k}\| + \right.$$
$$\left. + \|P_+\| \, \|P_+^A\| \, \|B_+^{-|n|-1}\| \sum_{\nu=1}^{\infty} \|A_+^{-\nu}\| \right). \tag{19}$$

Внаслідок (14), (17), (19) для доведення обмеженості послідовності $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ досить переконатися, що є обмеженими послідовності $\left\{\|P_-^n\|, n \in \mathbb{Z}\right\}$ і $\left\{\|P_+^n\|, n \in \mathbb{Z}\right\}$. Оскільки

$P_-^k + P_+^k = I$ для кожного $k \in \mathbb{Z}$, то обмеженість вказаних послідовностей випливає з обмеженості послідовностей $\left\{\|P_-^{-k}\|, k \geq 1\right\}$ та $\left\{\|P_+^{-k}\| k \geq 1\right\}$.

Доведемо обмеженість послідовності $\left\{\|P_-^{-k}\|, k \geq 1\right\}$. Із (10) випливає, що $P_-^{-k} = B^{-k}P_-B^k = I - B^{-k}P_+B^k$ для кожного $k \geq 1$, а отже, досить перевірити обмеженість послідовності $\left\{\|B^{-k}P_+B^k\|, k \geq 1\right\}$. Зафіксуємо $k \geq 1$. Оскільки $X = X_-(B)\dot{+}X_+(B)$, то в X можна вибрати такий базис $g_1, g_2, \ldots, g_m$, що для деякого натурального r, $1 \leq r < m$, звуження оператора B на $X_-(B)$ має жорданову нормальну форму у базисі $g_1, g_2, \ldots, g_r$, а звуження B_+ на $X_+(B)$ — у базисі $g_{r+1}, g_{r+2}, \ldots, g_m$. Тоді для кожного $r+1 \leq j \leq m$

$$\|B^{-k}P_+B^k g_j\| = \|B^{-k}P_+B_+^k g_j\| = \|B^{-k}B_+^k g_j\| = \|g_j\|. \tag{20}$$

Нехай, для визначеності, матриця оператора B_- у базисі $g_1, g_2, \ldots, g_r$ є клітиною Жордана розміру $r\times r$, що відповідає власному числу λ. Тоді при $k \geq r$ оператору B_-^k відповідає матриця

$$\begin{pmatrix} \lambda^k & C_k^1\lambda^{k-1} & \ldots & C_k^{r-1}\lambda^{k-r+1} \\ 0 & \lambda^k & \ldots & C_k^{r-2}\lambda^{k-r+2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda^k \end{pmatrix}.$$

Тому $B^{-k}P_+B^k g_1 = \lambda^k B_+^{-k}P_+g_1$ і для кожного $2 \leq j \leq r$

$$B^{-k}P_+B^k g_j = B_+^{-k}\Big(C_k^{j-1}\lambda^{k-j+1}P_+g_1 + C_k^{j-2}\lambda^{k-j+2}P_+g_2 + \ldots$$

$$\ldots + C_k^1\lambda^{k-1}P_+g_{j-1} + \lambda^k P_+g_j\Big).$$

Оскільки $|\lambda| < 1$ і ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\|B_+^{-k}\|$ збігається, то

$$\sup_{k\geq 1, 1\leq j\leq r}\|B^{-k}P_+B^k g_j\| < \infty. \tag{21}$$

Розглядаючи окремо кожну клітину Жордана матриці B_- у випадку, коли їх декілька, і враховуючи оцінки (20), (21), робимо висновок, що послідовність $\left\{\|B^{-k}P_+B^k\|, k \geq 1\right\}$ є обмеженою.

Обмеженість послідовності $\left\{\|P_+^k\|, k \geq 1\right\}$ перевіряється аналогічно.

Той факт, що $\{x_n, n \in \mathbb{Z}\}$ задає єдиний у класі обмежених послідовностей розв'язок різницевого рівняння (1), відповідний обмеженій послідовності $\{y_n, n \in \mathbb{Z}\}$, випливає з доведеної в [2, с. 26] теореми 7, якщо додатково скористатися лемою 2.

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *У скінченновимірному комплексному банаховому просторі X умова 1 виконується тоді і тільки тоді, коли виконуються умови i), ii) теореми 1.*

Теорема 2 є безпосереднім наслідком лем 1, 3 і теореми 1.

Література

1. *Городний М. Ф.* Ограниченные и периодические решения одного разностного уравнения и его стохастического аналога в банаховом пространстве // Укр. мат. журн. — 1991. — **43**, № 1. — С. 42–46.

2. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем. — Киев: Вища шк., 1992. — 319 с.

3. *Ким В.С.* Об условиях существования ограниченных решений разностного уравнения в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. — 1967. — **3**, № 12. — С. 2151 – 2160.

4. *Баскаков А. Г., Пастухов А. И.* Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами // Сиб. мат. журн. — 2001. — **42**, № 6. — С. 1231 – 1243.

5. *Слюсарчук В. Е.* Обратимость линейных неавтономных разностных операторов в пространстве ограниченных на $\mathbb{Z}$ функций // Мат. заметки. — 1985. — **37**, вып. 5. — С. 662 – 666.

6. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985. — 376 с.

7. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.

8. *Boichuk O. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and boundary-value problems. — Utrecht; Boston, 2004. — 323 p.

9. *Boichuk A. A.* Solutions of linear and nonlinear difference equations bounded on the whole line // Nonlinear Oscillations. — 2001. — **4**, № 1. — P. 16 – 27.

10. *Покутний О. О.* Розв'язки лінійних різницевих рівнянь у просторі Банаха на всій цілочисельній осі // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. — 2006. — № 1. — С. 182 – 188.

Одержано 31.10.15,
після доопрацювання — 02.06.16