УДК 517.9

ГЛОБАЛЬНИЙ АТРАКТОР ІМПУЛЬСНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ, ПОРОДЖЕНОЇ ХВИЛЬОВИМ РІВНЯННЯМ

О. В. Капустян, І. В. Романюк

Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка
просп. Акад. Глушкова, 4, Київ, 03680, Україна

We prove existence and invariance of a global attractor for a discontinuous system generated by a wave equation such that solutions of the system undergo an impulsive perturbation as they reach a fixed set of the phase space.

Доказаны существование и инвариантность глобального аттрактора для разрывной системы, порождаемой волновым уравнением, решения которого подвержены импульсному воздействию при достижении фиксированного подмножества фазового пространства.

Вступ. Теорія імпульсних диференціальних рівнянь [1, 2] є зручним математичним апаратом для опису еволюційних процесів з миттєвими збуреннями. Важливим класом систем з імпульсним збуренням є розривні (або імпульсні) динамічні системи, які характеризуються тим, що їх траєкторії зазнають імпульсного впливу при досягненні фіксованої підмножини фазового простору. Різним аспектам якісної теорії таких систем у скінченновимірному випадку присвячено роботи [3, 6]. Для нескінченновимірних дисипативних систем однією з найважливіших характеристик якісної поведінки є глобальний атрактор [7]. Для систем без єдиності розв'язку задачі Коші теорію глобальних атракторів розвинено в роботах [8–11]. Дослідження глобальних атракторів для різних класів розподілених систем з імпульсними збуреннями у фіксовані моменти часу проведено у [12, 13]. Для імпульсних динамічних систем (імпульсних ДС) деякі аспекти теорії глобальних атракторів розвинено в [14–16] із застосуванням до скінченновимірних та параболічних систем. У даній роботі досліджується глобальний атрактор імпульсної ДС, що породжується еволюційним рівнянням другого порядку,

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\beta\,\frac{\partial y}{\partial t} + Ay = 0,\\ y(0) = y_0 \in V,\\ y_t(0) = y_1 \in H,\end{gathered} \tag{1}$$

розв'язки якого

$$z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y_t(t) \end{pmatrix}$$

у фазовому просторі $E = V \times H$ зазнають імпульсних збурень вигляду

$$\Delta z|_{z\in M} = Iz - z, \tag{2}$$

де $M \subset E$ — задана імпульсна множина, $I\colon M \to M'$ — задане імпульсне відображення, $M' \subset E$ — фіксована множина. Для ліній рівня повної енергії [17] $M = \{z \mid \|z\|_E = a\}$ доведено неіснування глобального атрактора у найпростішому випадку $Iz = (1+\mu)z$. Натомість для множини вигляду $M = \{z \mid l_p(z) = a\}$, де $l_p(\cdot)$ — деяка напівнорма в E, до того ж $l_p(z) \to \|z\|_E$, $p \to \infty$, $\forall z \in E$ для широких класів імпульсних відображень, включаючи багатозначні, доведено існування глобального атрактора та досліджено його інваріантність.

Побудова імпульсної ДС з багатозначним збуренням. Нехай E — банахів простір, $P(E)$ $(\beta(E))$ — сукупність усіх непорожніх (непорожніх обмежених) підмножин E.

Означення 1 [8]. *Відображення $G\colon R_+ \times E \to P(E)$ називається багатозначним напівпотоком (м-напівпотоком), якщо:*

1) $\forall x \in E\colon G(0,x) = x$;

2) $\forall x \in E\ \forall t, s \geq 0\colon G(t+s,x) \subset G(t, G(s,x))$.

Якщо в умові 2 має місце рівність, то м-напівпотік G називається строгим.

Означення 2 [8]. *М-напівпотік G називається дисипативним, якщо*

$$\exists B_0 \in \beta(X) \quad \forall B \in \beta(X) \quad \exists T = T(B) > 0 \quad \forall t \geq T\colon G(t,B) \subset B_0.$$

Оскільки в імпульсних задачах ω-гранична множина дисипативного напівпотоку може не бути інваріантною [14, 15], будемо використовувати наступне означення глобального атрактора.

Означення 3 [15]. *Компактна множина $\Theta \subset E$ називається глобальним атрактором м-напівпотоку G, якщо:*

1) Θ є рівномірно притягуючою, тобто

$$\forall B \in \beta(X)\colon \operatorname{dist}(G(t,B),\Theta) \to 0, \quad t \to \infty;$$

2) Θ є мінімальною в класі замкнених множин, що задовольняють умову 1.

Зауважимо, що якщо для м-напівпотоку G існує глобальний атрактор у класичному сенсі [8], тобто існує компактна множина $\Theta_1 \subset E$, що задовольняє умову 1 і $\Theta_1 \subset G(t,\Theta_1)$ $\forall t \geq 0$, то $\Theta = \Theta_1$.

У класі дисипативних м-напівпотоків критерієм існування глобального атрактора в сенсі означення 3 є виконання умови асимптотичної компактності [15]

$$\forall t_n \nearrow \infty \ \forall B \in \beta(E) \ \forall \xi_n \in G(t_n,B) \ \text{послідовність} \ \{\xi_n\} \ \text{є передкомпактною в} \ E.$$

Для еволюційних задач із багатозначними імпульсними збуреннями м-напівпотік G породжується неперервною напівгрупою $V\colon R_+ \times E \to E$, траєкторії якої при зустрічі з імпульсною множиною $M \subset E$ мають стрибок у множину $M' \subset E$, що задається компактнозначним імпульсним відображенням $I\colon M \to P(M')$. Для коректного визначення відповідного м-напівпотоку будемо вважати виконаними такі умови [15]:

$$M \cap I(M) = \varnothing, \tag{3}$$

$$\forall x \in M \quad \exists \tau = \tau(x) \quad \forall t \in (0,\tau)\colon V(t,x) \notin M. \tag{4}$$

Увівши позначення

$$M^+(x) = \left(\bigcup_{t>0} V(t,x) \right) \cap M,$$

можна стверджувати, що за виконання умов (3), (4), якщо $M^+(x) \neq \varnothing$, існує момент часу $s := s(x)$ такий, що

$$V(t,x) \notin M \quad \forall t \in (0,s), \quad V(s,x) \in M.$$

Тоді імпульсна траєкторія $\varphi\colon R_+ \to E$, що стартує з точки $x \in E$, будується таким чином:

якщо $M^+(x) = \varnothing$, то $\varphi(t) = V(t,x)\ \forall t \geq 0$;

якщо $M^+(x) \neq \varnothing$, то для $s_0 = s(x) > 0$, $x_1 = V(s_0, x) \in M$ і довільного $x_1^+ \in Ix_1$ визначаємо φ на $[0, s_0]$ за правилом

$$\varphi(t) = \begin{cases} V(t,x), & t \in [0, s_0), \\ x_1^+, & t = s_0; \end{cases}$$

якщо $M^+\left(x_1^+\right) = \varnothing$, то $\varphi(t) = V\left(t - s_0, x_1^+\right) \forall t \geq s_0$;

якщо $M^+\left(x_1^+\right) \neq \varnothing$, то для $s_1 = s(x_1^+) > 0$, $x_2 = V(s_1, x_1^+) \in M$ і довільного $x_2^+ \in Ix_2$ визначаємо φ на $[s_0, s_0 + s_1]$ за правилом

$$\varphi(t) = \begin{cases} V\left(t - s_0, x_1^+\right), & t \in [s_0, s_0 + s_1), \\ x_2^+, & t = s_0 + s_1. \end{cases}$$

Продовжуючи цей процес, отримуємо імпульсну траєкторію зі скінченною або нескінченною кількістю імпульсних точок $\{x_n^+\}_{n\geq 1} \subset E$ та відповідних їм моментів часу $\{s_n\}_{n\geq 0} \subset (0, +\infty)$.

Покладемо

$$t_0 := 0, \quad t_{n+1} := \sum_{k=0}^{n} s_k, \quad n \geq 0.$$

Якщо φ має нескінченну кількість імпульсів, то для будь-яких $n \geq 0$ і $t \in [t_n, t_{n+1}]$ маємо формулу

$$\varphi(t) = \begin{cases} V\left(t - t_n, x_n^+\right), & t \in [t_n, t_{n+1}), \\ x_{n+1}^+, & t = t_{n+1}. \end{cases}$$

Позначимо через K_x множину всіх імпульсних траєкторій, що стартують із точки x. Будемо також вважати виконаною таку умову:

$$\forall x \in E \quad \text{кожна} \quad \varphi \in K_x \quad \text{визначена на} \quad [0, +\infty), \tag{5}$$

тобто для будь-якої імпульсної траєкторії або кількість імпульсів не більш як скінченна, або

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k = \infty.$$

За виконання умов (3) – (5) коректно задано відображення $G\colon R_+ \times E \to P(E)$,

$$\forall t \geq 0 \quad \forall x \in E\colon G(t,x) = \{\varphi(t) \mid \varphi \in K_x\}. \tag{6}$$

Легко перевірити [6], що формула (6) визначає строгий м-напівпотік, який будемо називати імпульсною багатозначною ДС (імпульсною БДС). Будемо казати, що імпульсна задача (1), (2) породжує імпульсну БДС, якщо виконуються умови (3) – (5).

Імпульсна БДС, породжена задачею (1), (2). Розглянемо триплет гільбертових просторів $V \subset H \subset V^*$ з компактним та щільним вкладенням, $\|\cdot\|$ та $(\cdot,\cdot)$ — норма та скалярний добуток в H, $A\colon V \to V^*$ — лінійний, неперервний, самоспряжений, коерцитивний оператор. Тому функція $\langle Au, u\rangle^{\frac{1}{2}}$ визначає норму в V, яку будемо позначати $\|u\|_V$.

Розглядається еволюційна задача ($\beta > 0$):

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\beta \frac{\partial y}{\partial t} + Ay = 0,\\ y|_{t=0} = y_0 \in V,\\ y_t|_{t=0} = y_1 \in H.\end{gathered} \tag{7}$$

Задача (7) у фазовому просторі $E = V \times H$ породжує неперервну напівгрупу $V\colon R_+ \times E \to$ $\to E$, де

$$V(t,z_0) = z(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y_t(t) \end{pmatrix} \quad \text{для} \quad z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in E.$$

Норма в E задається рівністю

$$\|z\|_E = \|y\|_V + \|w\| \quad \text{для} \quad z = \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} \in E.$$

Імпульсну ДС, породжену траєкторіями задачі (7), уперше було досліджено в роботі [17], де в якості імпульсної множини розглядалась множина рівня повної енергії

$$M = \{z \in E \mid \|z\|_E = a\}.$$

Покажемо, що вже для найпростішого імпульсного відображення $Iz = (1+\mu)z$, $\mu > 0$, така імпульсна ДС не має глобального атрактора. Аналогічну ситуацію в параболічному випадку було розглянуто в [15].

Для $a > 0$, $\mu > 0$ розглядаємо імпульсні параметри

$$M = \{z \in E \mid \|z\|_E = a\}, \quad Iz = (1+\mu)z. \tag{8}$$

Лема. *Для будь-яких $a > 0$, $\mu > 0$ задача (7), (8) породжує імпульсну ДС, яка є дисипативною, проте не має глобального атрактора.*

Доведення. Перевіримо умови (3) – (5). Умова (3) випливає з (8). Для доведення (4) зауважимо, що для $z(t) = V(t,z_0)$ маємо рівність

$$\|z(t)\|_E^2 = \|z_0\|_E^2 - 4\beta \int_0^t \|y_t(s)\|^2\, ds \quad \forall t \geq 0, \tag{9}$$

яка гарантує, що для $z_0 \neq 0$ функція $t \to \|z(t)\|_E$ є строго спадною на $[0, +\infty)$.

Доведемо (5). Нехай $z_0 \in M' = \{\|z\|_E = a(1+\mu)\}$ і для деякого $\bar{t} = \bar{t}(z_0) > 0$ $z(\bar{t}) \in \in M$. Тоді згідно з (9)

$$a^2 = a^2(1+\mu)^2 - 4\beta \int\limits_0^{\bar{t}} \|y_t(s)\|^2 \, ds.$$

Оскільки $\|y_t(t)\|^2 \leq \|z(t)\|_E^2 \leq a^2(1+\mu)^2$ $\forall t \geq 0$, то

$$a^2 \left[(1+\mu)^2 - 1\right] = 4\beta \int\limits_0^{\bar{t}} \|y_t(s)\|^2 \, ds \leq 4\beta \bar{t} a^2 (1+\mu)^2.$$

Отже,

$$\bar{t} \geq \frac{(1+\mu)^2 - 1}{4\beta(1+\mu)^2} = \frac{1}{4\beta}\left[1 - \frac{1}{(1+\mu)^2}\right]. \tag{10}$$

З (10) випливає виконання умови (5), отже, задача (7), (8) породжує імпульсну ДС. Позначимо її через $\hat{V}$. Оскільки згідно з результатами [7] існують $c > 0$, $\eta > 0$ такі, що для $z(t) = V(t, z_0)$, $z_0 \in E$, справджується оцінка

$$\|z(t)\|_E \leq c\|z_0\|_E e^{-\eta t} \quad \forall t \geq 0, \tag{11}$$

то співвідношення (9) – (11) гарантують дисипативність $\hat{V}$.

Крім того, будь-яка траєкторія ДС $\hat{V}$, яка потрапила на множину M', буде мати нескінченну кількість імпульсних збурень, проміжки між якими оцінюються правою частиною (10).

Тепер нехай $\{\lambda_i\}$, $\{\psi_i\}$ — розв'язки спектральної задачі

$$A\psi_i = \lambda_i \psi_i, \quad i \geq 1, \tag{12}$$

до того ж $\{\psi_i\} \subset V$ — ортонормований базис в H, $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots, \lambda_i \to \infty, i \to \infty$.

Розглянемо послідовність

$$z_0^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ a(1+\mu)\psi_n \end{pmatrix}, \quad n \geq 1.$$

Тоді $z_0^{(n)}$ належить M' і існує $\bar{t}_n := \bar{t}(z_0^{(n)})$ таке, що $V\left(\bar{t}_n, z_0^{(n)}\right)$ належить M. Далі $z_1^{(n)} = = (1+\mu)\, V\left(\bar{t}_n, z_0^{(n)}\right) = \hat{V}\left(\bar{t}_n, z_0^{(n)}\right) \in M'$ і т. д. На n-му кроці одержуємо

$$\xi_n := z_n^{(n)} = \hat{V}\left(n \cdot \bar{t}_n, z_0^{(n)}\right) \in M'.$$

При цьому $\{z_0^{(n)}\}$ є обмеженою в E, згідно з (10) $n \cdot \bar{t}_n \nearrow \infty$ і з урахуванням лінійності (7)

$$\xi_n = \begin{pmatrix} c_n \\ d_n \end{pmatrix} \psi_n.$$

Отже, якщо $\{\xi_n\}$ має граничну точку в E, то це точка 0, але $\|\xi_n\|_E^2 = a(1+\mu)$, тому $\{\xi_n\}$ не передкомпактна, а отже, імпульсна ДС $\hat{V}$ не має глобального атрактора.

Лему доведено.

Для фіксованого $p \geq 1$ розглянемо функцію $l_p \colon E \to R$,

$$l_p(z) = \left(\sum_{i=1}^{p} \left\{ \lambda_i (y, \psi_i)^2 + (w, \psi_i)^2 \right\} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{для} \quad z = \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} \in E,$$

де $\{\lambda_i\}$, $\{\psi_i\}$ — розв'язки задачі (12).

Згідно з рівністю Парсеваля

$$\forall z \in E \colon l_p(z) \to \|z\|_E, \quad p \to \infty.$$

Розглянемо такі імпульсні параметри для $p \geq 1$, $a > 0$, $\mu > 0$:

$$\begin{aligned} M &= \{z \in E |\ l_p(z) = a\}, \\ M' &= \{z \in E |\ l_p(z) = a(1+\mu)\}, \end{aligned} \tag{13}$$

$I \colon M \to P(M')$ компактнозначне, і для $z = \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \in M$

$$I(z) \subseteq I_0(z) = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} c_i' \\ d_i' \end{pmatrix} \psi_i + \sum_{i=p+1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} \left\{ \lambda_i \left(c_i' \right)^2 + \left(d_i' \right)^2 \right\} = a^2 (1+\mu)^2 \right\}. \tag{14}$$

Наприклад, відображення I може збільшувати в $1+\mu$ разів перші p координат:

$$I \left(\sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \right) = (1+\mu) \sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i + \sum_{i=p+1}^{\infty} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i.$$

Основним результатом роботи є така теорема.

Теорема. *Задача (7), (13), (14) породжує дисипативну імпульсну БДС G, що має глобальний атрактор Θ, причому якщо відображення I є напівнеперервним зверху [8], то*

$$\Theta \setminus M = G(\tau, \Theta \setminus M) \quad \forall \tau \geq 0. \tag{15}$$

Доведення. Для будь-якого $z_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \in E$

$$z(t) = V(t, z_0) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y_t(t) \end{pmatrix}$$

і для будь-якого $i \geq 1$ функції

$$u_i(t) = (y(t), \psi_i), \quad v_i(t) = u_i^{'}(t) = (y_t(t), \psi_i)$$

задовольняють задачу Коші:

$$\begin{gathered} u_i^{''}(t) + 2\beta u_i^{'} + \lambda_i u_i(t) = 0, \\ u_i(0) = (y_0, \psi_i), \quad u_i^{'}(0) = (y_1, \psi_i). \end{gathered} \tag{16}$$

Крім того, для будь-якого $t \geq 0$ справджується рівність

$$\lambda_i u_i^2(t) + v_i^2(t) = \lambda_i u_i^2(0) + v_i^2(0) - 4\beta \int\limits_0^t v_i^2(s)\, ds. \tag{17}$$

З (16), (17) виводимо, що для $l_p(z_0) \neq 0$ функція

$$t \to l_p^2(z(t)) = \sum_{i=1}^{p} \left\{ \lambda_i u_i^2(t) + v_i^2(t) \right\}$$

строго спадає на $[0, +\infty)$, зокрема виконується умова (4). З (16) також отримуємо

$$\begin{gathered} \exists c > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall i \geq 1 \ \forall t \geq 0 : \\ \lambda_i u_i^2(t) + v_i^2(t) \leq c^2 \left(\lambda_i u_i^2(0) + v_i^2(0) \right) e^{-2\eta t}. \end{gathered} \tag{18}$$

Нехай z_0 належить IM. Згідно з (17), (18) існує $\bar{t} > 0$ таке, що $z(\bar{t})$ належить M. Отже,

$$a^2 = a^2(1+\mu)^2 - 4\beta \int\limits_0^{\bar{t}} \sum_{i=1}^{p} v_i^2(s)\, ds. \tag{19}$$

З (17) отримуємо

$$\sum_{i=1}^{p} v_i^2(t) \leq a^2(1+\mu)^2 \quad \forall t \geq 0. \tag{20}$$

Тоді з (19), (20) маємо

$$\bar{t} \geq \frac{1}{4\beta} \left(1 - \frac{1}{(1+\mu)^2} \right).$$

З (21) одержуємо (5), тобто задача (7), (13), (14) породжує імпульсну БДС G за формулою (6).

Оскільки імпульсного збурення зазнають лише перші p координат фазового вектора z, то з (17), (18) виводимо

$$\forall z_0 \in E \ \forall t \geq 0 \ \forall z(\cdot) \in K_{z_0} \colon \|z(t)\|_E^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\lambda_i u_i^2(t) + v_i^2(t)\right) \leq c^2 \|z_0\|_E^2 e^{-2\eta t} + a^2(1+\mu)^2,$$

що й означає дисипативність G.

Доведемо асимптотичну компактність. Розглянемо $\xi_n \in G(t_n, z_n^0)$, де $\left\|z_n^0\right\|_E \leq r$, $t_n \nearrow \infty$. Тоді $\xi_n = z_n(t_n)$, де $z_n(\cdot) \in K_{z_n^0}$. Якщо для нескінченно багатьох $n \geq 1$ $z_n(\cdot)$ не зазнають імпульсних збурень, то $z_n(t_n) = V\left(t_n, z_n^0\right)$ і згідно з (11)

$$\xi_n \to 0 \quad \text{в} \quad E.$$

З іншого боку, якщо $\tau_n > 0$ — момент першого потрапляння $V\left(\cdot, z_n^0\right)$ на множину M, то з (11) отримуємо

$$a^2 \leq \left\|V\left(\tau_n, z_n^0\right)\right\|_E^2 \leq c^2 r^2 e^{-2\eta\tau_n}.$$

Звідси

$$\tau_n \leq \frac{1}{\eta} \ln \frac{cr}{a},$$

тобто за невід'ємного часу, який залежить лише від r, фазова точка опиняється в множині IM. Отже, можемо вважати, що $z_n^0 \in IM$, $\left\|z_n^0\right\|_E \leq r$. Тоді для $z_n(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} u_i^{(n)}(t) \\ v_i^{(n)}(t) \end{pmatrix} \psi_i$ $\forall i \geq p+1$ згідно з (18)

$$\lambda_i \left(u_i^{(n)}(t_n)^2\right) + \left(v_i^{(n)}(t_n)\right)^2 \leq c^2 \left(\lambda_i u_i^2(0)^2 + v_i^2(0)\right) e^{-2\eta t_n}.$$

З іншого боку, згідно з (17)

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\lambda_i \left(u_i^{(n)}(t_n)\right)^2 + \left(v_i^{(n)}(t_n)\right)^2\right) \in \left[a^2, a^2(1+\mu)^2\right].$$

Тоді по підпослідовності $u_i^{(n)}(t_n) \to c_i, v_i^{(n)}(t_n) \to d_i \, \forall i \in \overline{1,p}$, Отже, для $\xi = \sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i$

$$\|\xi_n - \xi\|_E^2 \leq \sum_{i=1}^{p} \left\{\lambda_i \left(u_i^{(n)}(t_n) - c_i\right)^2 + \left(v_i^{(n)}(t_n) - d_i\right)^2\right\} + c^2 e^{-2\eta t_n} r^2 \to 0, \ \ n \to \infty. \quad (21)$$

З (21) одержуємо передкомпактність ξ_n.

Таким чином, імпульсна БДС G має глобальний атрактор Θ, причому з [8]

$$\Theta = \left\{\xi \mid \xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n, \ \xi_n \in G(t_n, B), \ B \in \beta(E), \ t_n \nearrow \infty\right\}.$$

Тоді, враховуючи (11), (21), маємо

$$\Theta = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} \left\{ \lambda_i c_i^2 + d_i^2 \right\} \in \left[a^2, a^2(1+\mu)^2 \right] \right\} \cup \{0\}.$$

Доведемо рівність (15) за умови напівнеперервності зверху відображення I. Оскільки $Iz \; \forall z \in M$ — компакт, то напівнеперервність зверху відображення I еквівалентна такій властивості [8]:

$$\text{якщо} \quad z_n \in M, \quad z_n \to z, \quad \text{то}$$

$$\forall z_n^+ \in Iz_n \quad \exists z^+ \in Iz \quad \text{таке, що по підпослідовності} \quad z_n^+ \to z^+. \tag{22}$$

В однозначному випадку (22) зводиться до неперервності $I \colon M \to M'$. Серед багатозначних відображень властивість (22) задовольняє I_0, означене в (14).

Нехай $\xi \in \Theta \setminus M$, $\tau \in \left(0, \dfrac{1}{8\beta}\left(1 - \dfrac{1}{(1+\mu)^2}\right)\right)$. Якщо $\xi = 0$, то $0 = G(t, 0) \; \forall t \geq 0$. З іншого боку,

$$\xi = \sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \psi_i, \quad \text{де} \quad \sum_{i=1}^{p} \left\{ \lambda_i c_i^2 + d_i^2 \right\} \in \left(a^2, a^2(1+\mu)^2 \right].$$

Згідно з попередніми міркуваннями можемо вважати, що $\xi = \lim \xi_n$, де $\xi_n = \varphi_n(t_n)$, $t_n \nearrow \infty$, $\varphi_n \in K_{z_n^0}$, $\left\| z_n^0 \right\|_E \leq r$, і, крім того,

$$\forall n \geq 1 \quad \forall t \geq 0 \colon l_p^2(\varphi_n(t)) \in \left(a^2, a^2(1+\mu)^2 \right].$$

Для досить великих $n \geq 1$ розглянемо

$$\psi_n(p) = \varphi_n(p + t_n - \tau), \quad p \geq 0.$$

Внаслідок асимптотичної компактності по підпослідовності

$$\eta_n := \varphi_n(t_n - \tau) \to \eta \in \Theta.$$

Таким чином, $\psi_n \in K_{\eta_n}$, $\eta_n \notin M$, $\eta_n \to \eta$, $\xi_n = \psi_n(\tau)$.

Нехай $\eta \notin M$. Тоді існує $\delta \in (0, \mu)$ таке, що для $\eta_n = \sum_{i=1}^{p} \begin{pmatrix} c_i^{(n)} \\ d_i^{(n)} \end{pmatrix} \psi_i$

$$l_p^2(\eta_n) \in \left[a^2(1+\delta)^2, a^2(1+\mu)^2 \right] \quad \forall n \geq 1.$$

Нехай $s_n > 0$ — момент першого імпульсного збурення для ψ_n. Тоді з (17), (18) по підпослідовності $s_n \to s \geq \dfrac{1}{4\beta} \dfrac{(1+\delta)^2 - 1}{(1+\mu)^2} > 0$.

Якщо $\tau < s$, то $\tau < s_n$, отже,

$$\psi_n(\tau) = \xi_n = V(\tau, \eta_n) \to V(\tau, \eta) = \xi = G(\tau, \eta) \in G(\tau, \Theta \setminus M).$$

Якщо $\tau > s$, то $\tau > s_n$, отже,

$$V(s_n, \eta_n) = z_n \to V(s, \eta) = z,$$

і для $\psi_n(s_n) = z_n^+ \in I(z_n)$ згідно з (22)

$$z_n^+ \to Z^+ \in I(z).$$

Тоді

$$\psi_n(\tau) = V\left(\tau - s_n, z_n^+\right) \to V\left(\tau - s, z^+\right) \in G(\tau, \eta) \subset G(\tau, \Theta \setminus M).$$

Якщо $\tau = s < s_n$, то

$$\xi_n = \psi_n(\tau) = V(\tau, \eta_n) \to V(\tau, \eta) = V(s, \eta) = \xi,$$

але $\xi \in \Theta \setminus M$, а $V(s, \eta) \in M$, отже ця ситуація є неможливою.

Якщо $\tau = s > s_n$, то

$$\psi_n(\tau) = V(\tau - s_n, z_n^+) \to z^+ \in G(\tau, \eta) \subset G(\tau, \Theta \setminus M).$$

Таким чином, якщо $\eta \notin M$, то $\xi \in G(\tau, \eta) \subset G(\tau, \Theta \setminus M)$.

Розглянемо випадок, коли $\eta \in M$. Оскільки $l_p^2(\eta_n) \in \left(a^2, a^2(1+\mu)^2\right]$ і $l_p(\eta_n) \to a$, то для s_n — моменту першого імпульсного збурення траєкторії ψ_n — з (17) маємо $s_n \to 0$. Тоді $z_n = V(s_n, \eta_n) \to \eta$, $\psi_n(s_n) = z_n^+ \in I(z_n)$, $z_n^+ \to z^+ \in I\eta$. Крім того, оскільки $z_n^+ = \psi_n(s_n) = \varphi_n(s_n + t_n - \tau)$, то $z^+ \in \Theta \setminus M$. Далі, згідно з вибором τ, $\xi_n = \psi_n(\tau) = V(\tau - s_n, z_n^+) \to \xi = V(\tau, z^+) \subset G(\tau, \Theta \setminus M)$.

Таким чином, одержуємо

$$\Theta \setminus M \subset G(\tau, \Theta \setminus M) \quad \forall \tau \in \left(0, \frac{1}{8\beta}\left(1 - \frac{1}{(1+\mu)^2}\right)\right).$$

Тоді, оскільки G є строгим,

$$\Theta \setminus M \subset G(k \cdot \tau, \Theta \setminus M) \quad \forall k \geq 1.$$

Отже,

$$\Theta \setminus M \subset G(t, \Theta \setminus M) \quad \forall t \geq 0. \tag{23}$$

З іншого боку, оскільки Θ — глобальний атрактор, то

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists T = T(\Theta) \;\forall t \geq T\colon G(t, \Theta \setminus M) \subset O_\varepsilon(\Theta).$$

Тоді з (23) отримуємо

$$\forall s \geq 0 \ \forall t \geq T(\Theta) \colon G(s, \Theta \setminus M) \subset G(t+s, \Theta \setminus M) \subset O_\varepsilon(\Theta),$$

а це внаслідок довільності $\varepsilon > 0$ і компактності Θ означає, що

$$G(s, \Theta \setminus M) \subset \Theta \quad \forall s \geq 0.$$

Оскільки за побудовою імпульсної БДС

$$\forall s > 0 \ \forall x \in E \colon G(s, x) \notin M,$$

то остаточно одержуємо

$$G(s, \Theta \setminus M) \subset \Theta \setminus M \ \ \forall s \geq 0. \tag{24}$$

Із (23) і (24) одержуємо рівність (15).

Теорему доведено.

Література

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — Киев: Вища шк., 1987. — 287 с.
2. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equitations. — Singapore: World Sci., 1995. — 462 p.
3. *Kaul S. K.* Stability and asymptotic stability in impulsive semidynamical systems // J. Appl. Math. and Stochast. Anal. — 1994. — **7**, № 4. — P. 509–523.
4. *Pavlidis T.* Stability of a class of discontinuous dynamical systems // Inform. and Control. — 1996. — **9**. — P. 298–322.
5. *Ciesielski K.* On stability in impulsive dynamical systems // Bull. Pol. Acad. Sci. Math. — 2004. — **52**. — P. 81–91.
6. *Bonotto E. M.* Flows of characteristic 0+ in impulsive semidynamical systems // J. Math. Anal. and Appl. — 2007. — **332**. — P. 81–96.
7. *Temam R.* Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. — New York: Springer, 1988. — 500 p.
8. *Melnik V. S., Valero J.* On attractors of multivalued semi-flows and differential inclusions // Set-Valued Analysis. — 1998. — № 6. — P. 83–111.
9. *Melnik V. S., Kapustyan O. V.* On global attractors of multivalued semidynamic systems and their approximations // Dokl. Akad. Nauk. — 1998. — **366**, № 2. — P. 445–448.
10. *Kapustyan O. V., Shkundin D. V.* Global attractor of one nonlinear parabolic equation // Ukr. Math. J. — 2003. — **55**, № 4. — P. 446–455.
11. *Kapustyan O. V., Kasyanov P. O., Valero J.* Structure and regularity of the global attractor of a reaction-diffusion equation with non-smooth nonlinear term // Discrete and Contin. Dyn. Syst. — 2014. — **34**. — P. 4155–4182.
12. *Капустян О. В., Перестюк М. О.* Глобальний атрактор еволюційного включення з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, № 8. — С. 1283–1294.
13. *Kapustyan O. V., Valero J., Iovane G.* Asymptotic behavior of reaction-diffusion equations with non-damped impulsive effects // Nonlinear Anal. — 2008. — **68**. — P. 2516–2530.

14. *Bonotto E. M., Demuner D. P.* Attractors of impulsive dissipative semidynamical systems // Bull. Sci. Math. — 2013. — **137**. — P. 617 – 642.
15. *Perestyuk M. O., Kapustyan O. V.* Global attractors of impulsive infinite-dimensional systems // Ukr. Math. J. — 2016. — **68**, № 4. — P. 517 – 528.
16. *Романюк І.* Глобальний атрактор для однієї многозначної імпульсної динамічної системи // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Математика. Механіка. — 2016. — **35**. — С. 14 – 19.
17. *Myshkis A. D.* Vibrations of the string with energy dissipation and impulsive feedback support // Nonlinear Anal.: Theory, Methods and Appl. — 1996. — **26**, № 7. – P. 1271 – 1278.

Одержано 22.02.17