УДК 517.929

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЛИНЕЙНО ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

Г. П. Пелюх, Д. В. Бельский

Ин-т математики НАН Украины
ул. Терещенковская, 3, Киев, 01601, Украина

We find new properties of solutions of the functional-differential equation with a linearly transformed argument.

Встановлено нові властивості розв'язків диференціально-функціонального рівняння з лінійно перетвореним аргументом.

В данной статье исследуется уравнение

$$x'(t) = ax(t) + bx(qt) + cx'(qt), \tag{1}$$

где $\{a, b, c\} \subset \mathrm{C},\ 0 < q < 1,$ частные случаи которого изучались многими математиками. Так, в [1] исследованы асимптотические свойства решений уравнения $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x),$ в [2] установлены новые свойства решений уравнения $y'(x) = ay(\lambda x),$ в [3] получены условия существования аналитических почти периодических решений уравнения $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x),$ в [4] построено представление общего решения уравнения (1) при $|c| > 1,$ в [5] получен ряд новых результатов о существовании ограниченных и финитных решений уравнений с линейно преобразованным аргументом, в [6] исследовано поведение решений уравнения (1) в окрестности точки $t = 0,$ в [7] доказано существование решений уравнения $x'(t) = F\left(x(2t)\right)$ с периодическим модулем, в [9] исследовано уравнение (1) при $a = 0,$ в [10] — при $a < 0.$ Такие уравнения находят широкие приложения в различных областях науки и техники ([8] и цитированная в ней литература). Будет дано еще одно доказательство результата работы [6], основанное на методах, изложеных в [11], также будет получена некоторая асимптотическая формула для нелинейного уравнения (7).

В дальнейшем нам понадобятся следующие частные решения.

Пример 1. Если $c \neq q^{-n},\ n = 0, 1, 2, \ldots,$ то решением уравнения (1) будет функция $x_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n t^n,$ где α_0 — произвольное комплексное число и

$$\alpha_{n+1} = \frac{a + bq^n}{(1 - cq^n)\,(n + 1)}\,\alpha_n, \quad n \geq 0.$$

В развернутой форме

$$x_1(t) = \alpha_0 + \frac{a + b}{1 - c}\,\alpha_0 t + \frac{(a + b)(a + bq)}{(1 - c)(1 - cq)2!}\,\alpha_0 t^2 + \frac{(a + b)(a + bq)\left(a + bq^2\right)}{(1 - c)(1 - cq)\left(1 - cq^2\right)3!}\,\alpha_0 t^3 + \ldots.$$

Пример 2. В [6] найдено следующее частное решение. Если $c = q^{-m+1},\ m = 0, 1, 2, \ldots,$

то при $m \geq 1$ решением уравнения (1) будет функция

$$x_2(t) = \sum_{n=0}^{m-1} \alpha_n t^n + t^{m+1} \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n t^n + t^m \ln t \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{m+n} t^n,$$

где α_0 — произвольная постоянная,

$$\alpha_n = \frac{a + bq^{n-1}}{n\,(1 - cq^{n-1})}\,\alpha_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, m-1, m+1, \ldots,$$

$$\alpha_m = -\frac{a + bq^{m-1}}{m \ln q}\alpha_{m-1},$$

$$\beta_n = \frac{1}{(m+n+1)\,(1 - cq^{m+n})}\Big\{\alpha_{m+n} bq^{m+n} \ln q + \alpha_{m+n+1} \times$$
$$\times \left[cq^{m+n} - 1 + (m+n+1) cq^{m+n} \ln q\right]$$
$$+ \beta_{n-1}\left(a + bq^{m+n}\right)\Big\}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \beta_{-1} = 0.$$

Случай $m = 0$ выпишем отдельно:

$$x_2(t) = t \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n t^n + \ln t \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n t^n.$$

Ряд $\sum_{n=m}^{+\infty} \alpha_n t^n$ тоже будет решением уравнения (1), которое однако в дальнейшем не понадобится.

Доказательство сходимости рядов в решении $x_2(t)$ повторим из [6]. Формулы коэффициентов α_n и β_n означают линейную зависимость $\alpha_n = \alpha_0 \xi_n(a, b, c, q)$, $\beta_n = \alpha_0 \eta_n(a, b, c, q)$. Для некоторого числа ε выполняется неравенство $|\xi_n| \leq \dfrac{\varepsilon^n}{n!}$. Используя оценку ξ_n и увеличивая при необходимости ε, получаем

$$|\eta_n| \leq \frac{1}{m+n+1}\left(\varepsilon\,|\eta_{n-1}| + \delta_n\right),$$

где $\delta_n = \dfrac{\varepsilon^{n+m}}{(n+m)!}$. Тогда $|\eta_n| - \delta_n \leq \dfrac{\varepsilon}{m+n+1}\,(|\eta_{n-1}| - \delta_{n-1})$. Отсюда следует сходимость ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} |\eta_n|\, t^n$ при всех t.

Пример 3. Если $c = q^{m+2}$, $m \in \mathrm{N} \bigcup \{0\}$, то решением уравнения (1) будет функция

$$x_3(t) = \alpha_{-m-1} t^{-m-1} + \ldots + \alpha_{-1} t^{-1} + \ln t \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n + t \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n t^n,$$

где α_{-m-1} произвольное число;

$$\alpha_{-j+1} = \frac{a + bq^{-j}}{(j-1)\,(cq^{-j} - 1)}\alpha_{-j}, \quad j = m+1, m, \ldots, 2;$$

$$\alpha_0 = \frac{a + bq^{-1}}{1 - cq^{-1}}\,\alpha_{-1}; \qquad \alpha_{n+1} = \frac{a + bq^n}{(n+1)\,(1 - cq^n)}\,\alpha_n, \quad n \geq 0;$$

$$\beta_n = \frac{1}{(n+1)\,(1 - cq^n)}\Big(\alpha_n b\,(\ln q)\,q^n +$$

$$+\,\alpha_{n+1}\big\{cq^n - 1 + (\ln q)\,(n+1)cq^n\big\} + \beta_{n-1}(a + bq^n)\Big), \quad n \geq 0, \quad \beta_{-1} = 0.$$

Доказательство сходимости рядов такое же, как и в предыдущем примере.

Пример 4. В [6] также найдено следующее частное решение. Если $c \neq q^{m+2}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ и $c \neq 0$, то решением уравнения (1) будет функция

$$x_4(t) = g_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)t^v + g_1\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)t^{v+1} + g_2\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)t^{v+2} + g_3\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)t^{v+3} + \ldots,$$

где v удовлетворяет уравнению $cq^{v-1} = 1,\ g_0 \in C^1(\mathrm{R}),\ g_0(s+1) \equiv g_0(s)$,

$$g_{n+1}(u) = \frac{\ln q^{-1}}{1 - q^{v+n+1}}\,\frac{a + bq^{v+n}}{1 - cq^{v+n}}\int\limits_{-1}^{0} e^{(v+n+1)(\ln q^{-1})s} g_n\,(s+u)\,ds, \quad n \geq 0,$$

или

$$g_{n+1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) = \frac{1}{1 - q^{v+n+1}}\,\frac{a + bq^{v+n}}{1 - cq^{v+n}}\,t^{-(v+n+1)}\int\limits_{qt}^{t} s^{v+n} g_n\left(\frac{\ln s}{\ln q^{-1}}\right)ds, \quad n \geq 0,$$

$$g_n(u) = (\ln q^{-1})^n \prod_{j=1}^{n}\frac{1}{1 - q^{v+j}}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{a + bq^{v+k}}{1 - cq^{v+k}}\int\limits_{-1}^{0}\int\limits_{-1}^{0}\ldots\int\limits_{-1}^{0} e^{\sum_{h=1}^{n}(v+m-h+1)(\ln q^{-1})s_h}\times$$

$$\times\, g_0\,(s_n + \ldots + s_1 + u)\,ds_n \ldots ds_2 ds_1, \quad n \geq 1.$$

Для доказательства сходимости ряда оценим

$$\sup_{s\in\mathrm{R}}|g_n(s)| \leq \frac{M_1^n}{n!}\,\sup_{s\in\mathrm{R}}|g_0(s)|\,,$$

где $M_1 \geq 0$ — некоторая постоянная. В дальнейшем все M_j — неотрицательные числа. Из равенства

$$\frac{d}{dt}\left\{g_{n+1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)t^{v+n+1}\right\} = \frac{a + bq^{v+n}}{1 - cq^{v+n}}\,t^{v+n} g_n\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)$$

получаем дифференцируемость ряда и подтверждение того, что $x_4(t)$ — решение уравнения (1).

Пример 5. Если $c = q^{m+2},\ m = 0, 1, 2, \ldots,$ то решением уравнения (1) будет функция

$$x_5(t) = g_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)t^v + g_1\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)t^{v+1} + g_2\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)t^{v+2} + g_3\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)t^{v+3} + \ldots,$$

где v удовлетворяет уравнению $cq^{v-1} = 1,$ можно выбрать

$$v = -m - 1; \qquad g_0 \in C^1(\mathrm{R}), \qquad g_0(s+1) \equiv g_0(s), \qquad \int\limits_{-1}^{0} g_0(s)ds = 0;$$

$$g_{n+1}(u) = \frac{\ln q^{-1}}{1 - q^{v+n+1}}\,\frac{a + bq^{v+n}}{1 - cq^{v+n}}\int\limits_{-1}^{0} e^{(v+n+1)(\ln q^{-1})s}\times$$

$$\times\, g_n\left(s + u\right)ds, \quad n = 0, \ldots, m-1, m+1, \ldots;$$

$$g_{m+1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) = \frac{1}{\ln q^{-1}}\,\frac{a + bq^{v+m}}{1 - cq^{v+m}}\,t^{-(v+m+1)}\int\limits_{qt}^{t} s^{v+m}\left(\ln s\right)g_m\left(\frac{\ln s}{\ln q^{-1}}\right)ds$$

или

$$g_{m+1}(u) = (\ln q^{-1})\frac{a + bq^{v+m}}{1 - cq^{v+m}}\int\limits_{-1}^{0} e^{(\ln q^{-1})(v+m+1)s} s g_m\left(s + u\right)ds +$$

$$+\, u(\ln q^{-1})\frac{a + bq^{v+m}}{1 - cq^{v+m}}\int\limits_{-1}^{0} g_m(s)ds,$$

равенство

$$\int\limits_{-1}^{0} g_m(u)du = \int\limits_{-1}^{0} g_0(u)du\prod_{j=0}^{m-1}\frac{a + bq^{v+j}}{\left(1 - cq^{v+j}\right)\left(v + j + 1\right)} = 0$$

обеспечивает периодичность функции $g_{m+1}(u),$ тождество

$$\frac{d}{dt}\left\{g_{m+1}\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)t^{v+m+1}\right\} = \frac{a + bq^{v+m}}{1 - cq^{v+m}}g_m\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)t^{v+m}$$

также сохраняется.

Теорема 1. *Для любого непрерывно дифференцируемого решения* $x(t)$ *уравнения (1) при* $c \neq 0$ *выполняется равенство*

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) + x_4(t), & c \neq q^m, \quad m \in \mathrm{Z}, \\ x_1(t) + x_3(t) + x_5(t), & c = q^{m+2}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \\ x_2(t) + x_4(t), & c = q^{-m+1}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Доказательство. Сделаем в уравнении (1) замену переменных $x(t) = y\left(\dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right)$:

$$y'(s) = e^{(\ln q^{-1})s}(\ln q^{-1})\left\{ay(s) + by(s-1)\right\} + cq^{-1}y'(s-1),$$

введем новую независимую переменную $s = -u$:

$$\frac{d}{du}\left\{y(-u)\right\} = -e^{-(\ln q^{-1})u}(\ln q^{-1})\left\{ay\left(-u\right) + by\left(-(u+1)\right)\right\} + cq^{-1}\left[\frac{d}{du}\,\left\{y\left(-(u+1)\right)\right\}\right].$$

Определив $y(-u) \overset{\mathrm{df}}{=} y_1(u)$, получаем

$$y_1'(u) = -e^{-(\ln q^{-1})u}(\ln q^{-1})\left\{ay_1(u) + by_1(u+1)\right\} + cq^{-1}y_1'(u+1).$$

Сделаем замену $y_1(u) = e^{lu}y_2(u)$:

$$y_2'(u) + ly_2(u) = -e^{-(\ln q^{-1})u}(\ln q^{-1})\Big\{ay_2(u) + be^l y_2(u+1)\Big\} +$$
$$+ cq^{-1}e^l\left\{y_2'(u+1) + ly_2(u+1)\right\}.$$

Выберем l таким, чтобы выполнялось равенство $cq^{-1}e^l = 1$, и наложим условие

$$\mathrm{Re}l = \ln\left(\frac{q}{|c|}\right) > 0.$$

Тогда

$$\frac{d}{du}\left\{e^{lu}(y_2(u+1) - y_2(u))\right\} = e^{lu}e^{-(\ln q^{-1})u}(\ln q^{-1})\left\{ay_2(u) + bc^{-1}qy_2(u+1)\right\}.$$

Проинтегрируем это равенство на отрезке $[s_0, s]$:

$$y_2(s+1) = e^{-l(s-s_0)}\left(y_2(s_0+1) - y_2(s_0)\right) +$$
$$+ y_2(s) + e^{-ls}\int\limits_{s_0}^{s} e^{\left(l-\ln q^{-1}\right)u}(\ln q^{-1})\left\{ay_2(u) + bc^{-1}qy_2(u+1)\right\}du. \qquad (2)$$

Связь между решениями следующая $x\left(e^{-s\ln q^{-1}}\right) = y(-s) = y_1(s) = e^{ls}y_2(s)$.

Оценим решение

$$|y_2(s+1)| \le |y_2(s_0+1) - y_2(s_0)| + \sup_{s_0\le u\le s}|y_2(u)| +$$
$$+ e^{-(\mathrm{Re}l)s}\int\limits_{s_0}^{s} e^{\left(\mathrm{Re}l-\ln q^{-1}\right)u}du\,\ln q^{-1}|a|\left(\sup_{s_0\le u\le s}|y_2(u)|\right) +$$

$$+ e^{-(\mathrm{Re}l)s} \int\limits_{s_0}^{s} e^{\left(\mathrm{Re}l - \ln q^{-1}\right)u} du \ln q^{-1} \left|bc^{-1}\right| q \left(\sup_{s_0 \le u \le s} |y_2(u+1)| \right).$$

Если $\mathrm{Re}l - \ln q^{-1} = 0,$ то из условия $\mathrm{Re}l > 0$ следует, что

$$e^{-(\mathrm{Re}l)s}(s - s_0) \le e^{-(\mathrm{Re}l)s} s \le \sup_{s \ge s_0} \left(e^{-(\mathrm{Re}l)s} s\right) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \varepsilon(s_0) \quad \forall s \ge s_0,$$

$\varepsilon(s_0) > 0$ и $\varepsilon(s_0) \to 0,\ s_0 \to +\infty$; если $\mathrm{Re}l - \ln q^{-1} \ne 0,$ то

$$e^{-(\mathrm{Re}l)s} \int\limits_{s_0}^{s} e^{\left(\mathrm{Re}l - \ln q^{-1}\right)u} du = e^{-(\ln q^{-1})s_0} \frac{e^{-(\ln q^{-1})(s-s_0)} - e^{-(\mathrm{Re}l)(s-s_0)}}{\mathrm{Re}l - \ln q^{-1}} \le$$

$$\le e^{-(\ln q^{-1})s_0} \frac{2}{|\mathrm{Re}l - \ln q^{-1}|} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \varepsilon(s_0).$$

Оценку $|y_2(s+1)|$ можно продолжить:

$$|y_2(s+1)| \le |y_2(s_0+1) - y_2(s_0)| +$$

$$+ \sup_{s_0 \le u \le s} |y_2(u)| + \varepsilon(s_0)(\ln q^{-1})\,|a| \left(\sup_{s_0 \le u \le s} |y_2(u)| \right) +$$

$$+ \varepsilon(s_0)(\ln q^{-1}) \left|bc^{-1}\right| q \left(\sup_{s_0 \le u \le s} |y_2(u+1)| \right).$$

Для произвольной точки s_1 из отрезка $s_0 \le s_1 \le s$ аналогично получаем неравенство

$$|y_2(s_1+1)| \le |y_2\,(s_0+1) - y_2(s_0)| +$$

$$+ \sup_{s_0 \le u \le s_1} |y_2(u)| + \varepsilon(s_0)(\ln q^{-1})\,|a| \left(\sup_{s_0 \le u \le s_1} |y_2(u)| \right) +$$

$$+ \varepsilon(s_0)(\ln q^{-1}) \left|bc^{-1}\right| q \left(\sup_{s_0 \le u \le s_1} |y_2(u+1)| \right).$$

Расширяя у верхних границ $(\sup)$ отрезок изменения u до множества $s_0 \le u \le s,$ увеличиваем их и получаем неравенство

$$|y_2\,(s_1+1)| \le |y_2\,(s_0+1) - y_2(s_0)| +$$

$$+ \sup_{s_0 \le u \le s} |y_2(u)| + \varepsilon(s_0)(\ln q^{-1})\,|a| \left(\sup_{s_0 \le u \le s} |y_2(u)| \right) +$$

$$+ \varepsilon(s_0)(\ln q^{-1}) \left|bc^{-1}\right| q \left(\sup_{s_0 \le u \le s} |y_2(u+1)| \right).$$

Поэтому

$$\sup_{s_0\le s_1\le s}|y_2(s_1+1)| \le |y_2(s_0+1)-y_2(s_0)| + \sup_{s_0\le u\le s}|y_2(u)| +$$

$$+\varepsilon(s_0)(\ln q^{-1})\,|a|\left(\sup_{s_0\le u\le s}|y_2(u)|\right)+$$

$$+\varepsilon(s_0)(\ln q^{-1})\left|bc^{-1}\right|q\left(\sup_{s_0\le u\le s}|y_2(u+1)|\right).$$

Перепишем и оценим

$$\sup_{s_0\le u\le s}|y_2(u+1)| = \sup_{s_0+1\le u\le s+1}|y_2(u)| \le \sup_{s_0\le u\le s+1}|y_2(u)|,$$

тогда

$$\sup_{s_0+1\le u\le s+1}|y_2(u)| \le |y_2(s_0+1)-y_2(s_0)| +$$

$$+\sup_{s_0\le u\le s}|y_2(u)| + \varepsilon(s_0)(\ln q^{-1})\,|a|\left(\sup_{s_0\le u\le s}|y_2(u)|\right)+$$

$$+\varepsilon(s_0)(\ln q^{-1})\left|bc^{-1}\right|q\left(\sup_{s_0\le u\le s+1}|y_2(u)|\right).$$

Отсюда

$$\sup_{s_0\le u\le s+1}|y_2(u)| \le \sup_{s_0\le u\le s_0+1}|y_2(u)| + \sup_{s_0+1\le u\le s+1}|y_2(u)| \le$$

$$\le \sup_{s_0\le u\le s_0+1}|y_2(u)| + |y_2(s_0+1)-y_2(s_0)| +$$

$$+\sup_{s_0\le u\le s}|y_2(u)| + \varepsilon(s_0)(\ln q^{-1})\,|a|\left(\sup_{s_0\le u\le s}|y_2(u)|\right)+$$

$$+\varepsilon(s_0)(\ln q^{-1})\left|bc^{-1}\right|q\left(\sup_{s_0\le u\le s+1}|y_2(u)|\right).$$

Полагая s_0 достаточно большим и $\varepsilon(s_0)$, соответственно, достаточно малым, получаем

$$\sup_{s_0\le u\le s+1}|y_2(u)| \le \frac{\sup\limits_{s_0\le u\le s_0+1}|y_2(u)| + |y_2(s_0+1)-y_2(s_0)|}{1-\varepsilon(s_0)(\ln q^{-1})\,|bc^{-1}|\,q}+$$

$$+\frac{1+\varepsilon(s_0)(\ln q^{-1})\,|a|}{1-\varepsilon(s_0)(\ln q^{-1})\,|bc^{-1}|\,q}\sup_{s_0\le u\le s}|y_2(u)|.$$

Для сокращения записи определим

$$\sup_{s_0\le u\le s}|y_2(u)| \overset{\mathrm{df}}{=} g(s),$$

$$\frac{\sup_{s_0\leq u\leq s_0+1}|y_2(u)|+|y_2\left(s_0+1\right)-y_2(s_0)|}{1-\varepsilon(s_0)(\ln q^{-1})\left|bc^{-1}\right|q}\stackrel{\text{df}}{=}M_2$$

и

$$\frac{1+\varepsilon(s_0)(\ln q^{-1})\,|a|}{1-\varepsilon(s_0)(\ln q^{-1})\left|bc^{-1}\right|q}\stackrel{\text{df}}{=}M_3$$

в новых обозначениях

$$g(s+1)\leq M_3g(s)+M_2.$$

Коэффициент $M_3=M_3(s_0)\to 1,\ s_0\to+\infty\ (\varepsilon(s_0)\to 0)$, поэтому существует $\delta(s_0)>0$ такое, что $\delta(s_0)\to 0,\ s_0\to+\infty$ и $M_3(s_0)<1+\delta(s_0)$. Следовательно,

$$g(s+1)\leq\left(1+\delta(s_0)\right)g(s)+M_2.$$

Отсюда имеем

$$g(s+1)-\gamma\leq\left(1+\delta(s_0)\right)\left(g(s)-\gamma\right),$$

где $\gamma=-\dfrac{M_2}{\delta(s_0)}$. Тогда

$$\frac{g(s+1)-\gamma}{e^{(s+1)\ln(1+\delta(s_0))}}\leq\frac{\left(1+\delta(s_0)\right)\left(g(s)-\gamma\right)}{e^{(s+1)\ln(1+\delta(s_0))}}=\frac{g(s)-\gamma}{e^{s\ln(1+\delta(s_0))}}.$$

Далее получаем

$$\frac{g(s)-\gamma}{e^{s\ln(1+\delta(s_0))}}\leq\max_{s_0\leq\tau\leq s_0+1}\frac{g(\tau)-\gamma}{e^{\tau\ln(1+\delta(s_0))}}$$

для всех $s\geq s_0$ или

$$|y_2(s)|\leq\sup_{s_0\leq u\leq s}|y_2(u)|=g(s)\leq$$

$$\leq\left(\max_{s_0\leq\tau\leq s_0+1}\frac{g(\tau)-\gamma}{e^{\tau\ln(1+\delta(s_0))}}\right)e^{s\ln(1+\delta(s_0))}+\gamma\leq M_4e^{s\ln(1+\delta(s_0))},\quad s\geq s_0.$$

В интегральном уравнении

$$y_2(s+1)-y_2(s)=e^{-l(s-s_0)}\left(y_2\left(s_0+1\right)-y_2(s_0)\right)+$$

$$+\,e^{-ls}\int\limits_{s_0}^{s}e^{\left(l-\ln q^{-1}\right)u}\ln q^{-1}\left\{ay_2(u)+bc^{-1}qy_2(u+1)\right\}du$$

оценим левую часть, учитывая экспоненциальную оценку для $|y_2(s)|$:

$$|y_2(s+1)-y_2(s)|\leq e^{-(\mathrm{Re}l)s}\left|e^{ls_0}\left(y_2\left(s_0+1\right)-y_2(s_0)\right)\right|+$$

$$+\,e^{-(\mathrm{Re}l)s}\int\limits_{s_0}^{s}e^{\left(\mathrm{Re}l-\ln q^{-1}\right)u}(\ln q^{-1})\left\{|a|\,|y_2(u)|+\left|bc^{-1}\right|q\,|y_2(u+1)|\right\}du\leq$$

$$\leq e^{-(\mathrm{Rel})s}\left|e^{ls_0}\left(y_2\left(s_0+1\right)-y_2(s_0)\right)\right|+e^{-(\mathrm{Rel})s}\int\limits_{s_0}^{s}e^{\left(\mathrm{Rel}-\ln q^{-1}\right)u}\ln q^{-1}\times$$

$$\times\left\{|a|\,M_4e^{u\ln(1+\delta(s_0))}+\left|bc^{-1}\right|qM_4e^{(u+1)\ln(1+\delta(s_0))}\right\}du.$$

Выбирая подходящее значение $\delta(s_0)>0$, сумируем $\mathrm{Rel}-\ln q^{-1}+\ln\left(1+\delta(s_0)\right)\neq 0$ и продолжаем оценку

$$|y_2(s+1)-y_2(s)|\leq e^{-(\mathrm{Rel})s}\left|e^{ls_0}\left(y_2\left(s_0+1\right)-y_2(s_0)\right)\right|+$$

$$+\frac{e^{-\left(\ln q^{-1}-\ln(1+\delta(s_0))\right)s}}{\left|\mathrm{Rel}-\ln q^{-1}+\ln\left(1+\delta(s_0)\right)\right|}(\ln q^{-1})\left\{|a|+\left|bc^{-1}\right|q\left(1+\delta(s_0)\right)\right\}M_4+$$

$$+e^{-(\mathrm{Rel})s}\frac{e^{\left(\mathrm{Rel}-\ln q^{-1}+\ln(1+\delta(s_0))\right)s_0}}{\left|\mathrm{Rel}-\ln q^{-1}+\ln\left(1+\delta(s_0)\right)\right|}(\ln q^{-1})\left\{|a|+\left|bc^{-1}\right|q(1+\delta(s_0))\right\}M_4. \quad (3)$$

Полагая $\ln q^{-1}-\ln\left(1+\delta(s_0)\right)>0$, определяем

$$l_1\overset{\mathrm{df}}{=}\min\left\{\ln q^{-1}-\ln\left(1+\delta(s_0)\right),\ \mathrm{Rel}\right\}.$$

Тогда $|y_2(s+1)-y_2(s)|\leq M_5e^{-l_1s},\ s\geq s_0$.

Отсюда при $n\geq 0$ и $m\geq 0$ получаем оценку

$$|y_2(s+n+m)-y_2(s+n)|\leq|y_2(s+n+m)-y_2(s+n+m-1)|+$$

$$+|y_2(s+n+m-1)-y_2(s+n+m-2)|+\ldots$$

$$\ldots+|y_2(s+n+2)-y_2(s+n+1)|+$$

$$+|y_2(s+n+1)-y_2(s+n)|\leq$$

$$\leq M_5e^{-l_1(s+n+m-1)}+M_5e^{-l_1(s+n+m-2)}+\ldots$$

$$\ldots+M_5e^{-l_1(s+n+1)}+M_5e^{-l_1(s+n)}\leq$$

$$\leq M_5e^{-l_1(s+n)}\,\frac{1}{1-e^{-l_1}}.$$

Фундаментальность последовательности $y_2(s+n)$ означает существование предела

$$\lim_{n\to\infty}y_2(s+n)\overset{\mathrm{df}}{=}w(s)$$

с периодом $w(s)\equiv w(s+1)$. Устремляя в последнем неравенстве $m\to\infty$, получаем оценку

$$|w(s)-y_2(s+n)|\leq M_5e^{-l_1(s+n)}\frac{1}{1-e^{-l_1}},\quad s\geq s_0.$$

Отсюда следует равномерная сходимость на полуоси $s \geq s_0$ непрерывных функций $y_2(s+n)$ к предельной функции $w(s)$, которая, следовательно, тоже непрерывна.

Для доказательства непрерывной дифференцируемости предельной периодической функции $w(s)$ запишем интегральные равенства

$$y_2(s+1) - y_2(s) = e^{-ls} e^{ls_0} \left(y_2\left(s_0+1\right) - y_2(s_0)\right) + \\ + e^{-ls} \int_{s_0}^{s} e^{\left(l - \ln q^{-1}\right)u} \ln q^{-1} \left\{ a y_2(u) + b c^{-1} q y_2(u+1) \right\} du,$$

. . . .

$$y_2(s+n+1) - y_2(s+n) = e^{-l(s+n)} e^{ls_0} \left(y_2(s_0+1) - y_2(s_0)\right) + \\ + e^{-l(s+n)} \int\limits_{s_0}^{s+n} e^{\left(l - \ln q^{-1}\right)u} \ln q^{-1} \left\{ a y_2(u) + b c^{-1} q y_2(u+1) \right\} du.$$

Суммируя их, получаем

$$y_2(s+n+1) - y_2(s) = \sum_{j=0}^{n} \Bigg[e^{-l(s+j)} e^{ls_0} \left(y_2(s_0+1) - y_2(s_0)\right) + \\ + e^{-l(s+j)} \int\limits_{s_0}^{s+j} e^{\left(l - \ln q^{-1}\right)u} \ln q^{-1} \left\{ a y_2(u) + b c^{-1} q y_2(u+1) \right\} du \Bigg].$$

Устремляя $n \to +\infty$ и учитывая равенство $e^{-l} = cq^{-1}$, в пределе находим

$$w(s) = y_2(s) + e^{-ls} e^{ls_0} \left(y_2\left(s_0+1\right) - y_2(s_0)\right) \frac{1}{1 - cq^{-1}} + \\ + \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-l(s+j)} \int\limits_{s_0}^{s+j} e^{\left(l - \ln q^{-1}\right)u} \ln q^{-1} \left\{ a y_2(u) + b c^{-1} q y_2(u+1) \right\} du.$$

Из тождества $y_2(s) = w(s) + O\left(e^{-l_1 s}\right)$, $s \to +\infty$, следует неравенство $|y_2(s)| \leq M_6$, $s \geq s_0$. При выводе (3) было, в частности, получено неравенство

$$\left| e^{-ls} \int\limits_{s_0}^{s} e^{\left(l - \ln q^{-1}\right)u} \ln q^{-1} \left\{ a y_2(u) + b c^{-1} q y_2(u+1) \right\} du \right| \leq M_5 e^{-l_1 s}, \quad s \geq s_0. \tag{4}$$

Формальное дифференцирование дает формулу

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} e^{-l(s+j)} \int\limits_{s_0}^{s+j} e^{\left(l - \ln q^{-1}\right)u} \ln q^{-1} \left\{ a y_2(u) + b c^{-1} q y_2(u+1) \right\} du \right) =$$

$$= -l \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-l(s+j)} \int\limits_{s_0}^{s+j} e^{\left(l-\ln q^{-1}\right)u} \ln q^{-1} \left\{ay_2(u) + bc^{-1}qy_2(u+1)\right\} du +$$

$$+ \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-(\ln q^{-1})(s+j)} \ln q^{-1} \left\{ay_2(s+j) + bc^{-1}qy_2(s+j+1)\right\}.$$

Из оценки (4) и ограниченности решения $y_2(s)$ получаем абсолютную и равномерную сходимость на полуоси $s \geq s_0$ первого и второго ряда в последнем тождестве соответственно. И функция $w(s)$ непрерывно дифференцируема.

Если $c \neq q^{m+2},\ m = 0, 1, 2, \ldots,$ то решением уравнения (1) будет функция

$$x_4(t) = g_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) t^v + g_1\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) t^{v+1} + g_2\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) t^{v+2} + g_3\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) t^{v+3} + \ldots =$$

$$= t^v \left\{g_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + O(t)\right\}, \quad t \to 0+.$$

где v удовлетворяет уравнению $cq^{v-1} = 1,\ g_0(-s) \equiv w(s)$. Можно выбрать $v = l/\ln q$. Используем связь между решениями

$$e^{ls}\tilde{y}_2(s) \stackrel{\mathrm{df}}{=} x_4\left(e^{-s\ln q^{-1}}\right) = e^{-sv\ln q^{-1}} \left\{g_0(-s) + O\left(e^{-s\ln q^{-1}}\right)\right\} = e^{ls}\left\{w(s) + O\left(e^{-s\ln q^{-1}}\right)\right\},$$

$$\tilde{y}_2(s) = w(s) + O\left(e^{-s\ln q^{-1}}\right), \quad s \to +\infty.$$

Если $c = q^{m+2},\ m = 0, 1, 2, \ldots,$ то решением уравнения (1) будет функция

$$x_5(t) = g_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) t^v + g_1\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) t^{v+1} + g_2\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) t^{v+2} + g_3\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) t^{v+3} + \ldots,$$

где v удовлетворяет уравнению $cq^{v-1} = 1$. Можно выбрать $l = -(m+1)\ln q$ и $v = l/\ln q = -m-1$; для функции $g_0(s) \equiv w(-s) - \int_{-1}^{0} w(-u)du$ выполняется условие $\int_{-1}^{0} g_0(s)ds = 0$. Еще одним решением уравнения (1) будет функция

$$x_3(t) = \alpha_{-m-1}t^{-m-1} + \ldots + \alpha_{-1}t^{-1} + \ln t \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n + t\sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n t^n,$$

где $\alpha_{-m-1} = \int_{-1}^{0} w(-u)du$. Асимптотическая формула суммы этих решений имеет вид

$$x_3(t) + x_5(t) = t^{-m-1}\left\{\alpha_{-m-1} + g_0\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + O\Big(t\,|\ln t|^{\max\{1-m,0\}}\Big)\right\}, \quad t \to 0+.$$

Снова используем связь между решениями

$$e^{ls}\tilde{y}_2(s) \stackrel{\mathrm{df}}{=} x_3\left(e^{-s\ln q^{-1}}\right) + x_5\left(e^{-s\ln q^{-1}}\right) = e^{ls}\left\{w(s) + O\left(e^{-s\ln q^{-1}} s^{\max\{1-m,0\}}\right)\right\},$$

$$\tilde{y}_2(s) = w(s) + O\bigl(e^{-s\ln q^{-1}} s^{\max\{1-m,0\}}\bigr), \quad s \to +\infty.$$

В обоих случаях разность $y_{2,1}(s) \stackrel{\mathrm{df}}{=} y_2(s) - \tilde{y}_2(s) = O\bigl(e^{-l_1 s}\bigr)$, $s \to +\infty$.

В интегральном уравнении

$$y_{2,1}(s+1) - y_{2,1}(s) = e^{-l(s-s_0)}\left(y_{2,1}\left(s_0+1\right) - y_{2,1}(s_0)\right) + \\ + e^{-ls}\int\limits_{s_0}^{s} e^{\left(l-\ln q^{-1}\right)u} \ln q^{-1}\left\{a y_{2,1}(u) + bc^{-1} q y_{2,1}(u+1)\right\} du \qquad (5)$$

оценим левую часть, учитывая экспоненциальную оценку для $y_{2,1}(s)$:

$$|y_{2,1}(s+1) - y_{2,1}(s)| \le e^{-(\mathrm{Re} l)s}\left|e^{ls_0}\left(y_{2,1}(s_0+1) - y_{2,1}(s_0)\right)\right| + \\ + e^{-(\mathrm{Re} l)s}\int\limits_{s_0}^{s} e^{\left(\mathrm{Re} l-\ln q^{-1}\right)u}(\ln q^{-1})\left\{|a|\,|y_{2,1}(u)| + \left|bc^{-1}\right| q\,|y_{2,1}(u+1)|\right\} du \le \\ \le e^{-(\mathrm{Re} l)s}\left|e^{ls_0}\left(y_{2,1}\left(s_0+1\right) - y_{2,1}(s_0)\right)\right| + \\ + e^{-(\mathrm{Re} l)s}\int\limits_{s_0}^{s} e^{\left(\mathrm{Re} l-\ln q^{-1}-l_1\right)u}(\ln q^{-1})\left\{|a| + \left|bc^{-1}\right| q e^{-l_1}\right\} M_7\, du.$$

Если $\ln q^{-1} < \mathrm{Re} l$, то

$$l_1 = \min\left\{\ln q^{-1} - \ln\left(1+\delta(s_0)\right), \mathrm{Re} l\right\} = \ln q^{-1} - \ln\left(1+\delta(s_0)\right)$$

и

$$\mathrm{Re} l - \ln q^{-1} - l_1 = \mathrm{Re} l - 2\ln q^{-1} + \ln\left(1+\delta(s_0)\right) \neq 0.$$

Последнее неравенство достигается подходящим выбором $\delta(s_0) > 0$. Продолжим оценку

$$|y_{2,1}(s+1) - y_{2,1}(s)| \le e^{-(\mathrm{Re} l)s}\left|e^{ls_0}\left(y_{2,1}\left(s_0+1\right) - y_{2,1}(s_0)\right)\right| + \\ + \frac{e^{-\left(2\ln q^{-1} - \ln(1+\delta(s_0))\right)s}}{\left|\mathrm{Re} l - 2\ln q^{-1} + \ln\left(1+\delta(s_0)\right)\right|}(\ln q^{-1})\left\{|a| + \left|bc^{-1}\right| q e^{-l_1}\right\} M_7 + \\ + e^{-(\mathrm{Re} l)s}\frac{e^{\left(\mathrm{Re} l - 2\ln q^{-1} + \ln(1+\delta(s_0))\right)s_0}}{\left|\mathrm{Re} l - 2\ln q^{-1} + \ln\left(1+\delta(s_0)\right)\right|}\times \\ \times(\ln q^{-1})\left\{|a| + \left|bc^{-1}\right| q e^{-l_1}\right\} M_7$$

и определим $l_2 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \min\left\{2\ln q^{-1} - \ln\left(1+\delta(s_0)\right), \mathrm{Re} l\right\}$. Тогда

$$|y_{2,1}(s+1) - y_{2,1}(s)| \le M_8 e^{-l_2 s}, \quad s \ge s_0.$$

Отсюда имеем $y_{2,1}(s) = w_1(s) + O\left(e^{-l_2 s}\right),\ s \to +\infty$, где $w_1(s) = \lim\limits_{n\to+\infty} y_{2,1}(s+n) \equiv 0$, т. е. $|y_{2,1}(s)| \le M_9 e^{-l_2 s},\ s \ge s_0$. Действуя таким образом несколько раз, приходим к неравенству

$$|y_{2,1}(s)| \le M_{10} e^{-l_j s}, \quad s \ge s_0,$$

где $l_j = \min\left\{j \ln q^{-1} - \ln\left(1+\delta(s_0)\right),\ \mathrm{Re} l\right\} = \mathrm{Re} l$, т. е. $|y_{2,1}(s)| \le M_{10} e^{-(\mathrm{Re} l)s},\ s \ge s_0$.

В уравнении (5) из последней оценки для $|y_{2,1}(s)|$ получаем существование интеграла

$$\int\limits_{s_0}^{+\infty} e^{\left(l - \ln q^{-1}\right)u} \ln q^{-1} \left\{a y_{2,1}(u) + b c^{-1} q y_{2,1}(u+1)\right\} du$$

и, следовательно, существование

$$\lim_{s\to+\infty} e^{ls}\left(y_{2,1}(s+1) - y_{2,1}(s)\right) \stackrel{\mathrm{df}}{=} Y \in \mathrm{C}.$$

Для аналитического решения запишем равенство

$$e^{ls}\bar{y}_2(s) \stackrel{\mathrm{df}}{=} x_1\left(e^{-s\ln q^{-1}}\right) = \alpha_0\left(1 + \frac{a+b}{1-c} e^{-s\ln q^{-1}} + \frac{(a+b)(a+bq)}{(1-c)(1-cq)2!} e^{-2s\ln q^{-1}} + \ldots\right),$$

т. е. $e^{ls}\bar{y}_2(s) \to \alpha_0,\ s \to +\infty$. Кроме того, $|\bar{y}_2(s)| \le M_{11} e^{-(\mathrm{Re} l)s},\ s \ge s_0$. Имеем

$$e^{ls}\left(\bar{y}_2(s+1) - \bar{y}_2(s)\right) = \frac{c}{q} e^{l(s+1)} \bar{y}_2(s+1) - e^{ls}\bar{y}_2(s) \to \left(\frac{c}{q} - 1\right)\alpha_0, \quad s \to +\infty.$$

Выбирая $\alpha_0 = \left(\dfrac{c}{q} - 1\right)^{-1} Y$, для решения $y_{2,2}(s) \stackrel{\mathrm{df}}{=} y_{2,1}(s) - \bar{y}_2(s)$ получаем предел

$$\lim_{s\to+\infty} e^{ls}\left(y_{2,2}(s+1) - y_{2,2}(s)\right) = 0$$

и оценку $|y_{2,2}(s)| \le M_{12} e^{-(\mathrm{Re} l)s},\ s \ge s_0$.

Устремим в равенстве

$$e^{ls}\left(y_{2,2}(s+1) - y_{2,2}(s)\right) - e^{ls_0}\left(y_{2,2}\left(s_0+1\right) - y_{2,2}(s_0)\right) =$$

$$= \int\limits_{s_0}^{s} e^{\left(l - \ln q^{-1}\right)u} (\ln q^{-1}) \left\{a y_{2,2}(u) + b c^{-1} q y_{2,2}(u+1)\right\} du$$

переменную $s \to +\infty$. В пределе, заменив s_0 снова переменной s, получим

$$y_{2,2}\left(s+1\right) - y_{2,2}(s) = -e^{-ls} \int\limits_{s}^{+\infty} e^{\left(l - \ln q^{-1}\right)u} (\ln q^{-1}) \left\{a y_{2,2}(u) + b c^{-1} q y_{2,2}(u+1)\right\} du.$$

Оценим модуль разности

$$|y_{2,2}(s+1) - y_{2,2}(s)| \le$$

$$\le e^{-(\mathrm{Re}l)s} \int\limits_{s}^{+\infty} e^{\left(\mathrm{Re}l - \ln q^{-1}\right)u} (\ln q^{-1}) \left\{ |a|\, |y_{2,2}(u)| + \left|bc^{-1}\right| q\, |y_{2,2}(u+1)| \right\} du \le$$

$$\le e^{-(\mathrm{Re}l)s} \int\limits_{s}^{+\infty} e^{\left(\mathrm{Re}l - \ln q^{-1}\right)u} (\ln q^{-1}) \left\{ |a|\, M_{12} e^{-(\mathrm{Re}l)u} + \left|bc^{-1}\right| q M_{12} e^{-(\mathrm{Re}l)(u+1)} \right\} du =$$

$$= M_{13} e^{-\left(\mathrm{Re}l + \ln q^{-1}\right)s}, \quad s \ge s_0.$$

Суммируя равенства

$$y_{2,2}(s+n+1) - y_{2,2}(s+n) =$$

$$= -e^{-l(s+n)} \int\limits_{s+n}^{+\infty} e^{\left(l - \ln q^{-1}\right)u} (\ln q^{-1}) \left\{ a y_{2,2}(u) + bc^{-1} q y_{2,2}(u+1) \right\} du,$$

. . . .

$$y_{2,2}\,(s+1) - y_{2,2}(s) = -e^{-ls} \int\limits_{s}^{+\infty} e^{\left(l - \ln q^{-1}\right)u} (\ln q^{-1}) \left\{ a y_{2,2}(u) + bc^{-1} q y_{2,2}(u+1) \right\} du,$$

получаем

$$y_{2,2}\,(s+n+1) - y_{2,2}(s) =$$

$$= -\sum_{j=0}^{n} e^{-l(s+j)} \int\limits_{s+j}^{+\infty} e^{\left(l - \ln q^{-1}\right)u} (\ln q^{-1}) \left\{ a y_{2,2}(u) + bc^{-1} q y_{2,2}(u+1) \right\} du,$$

и, устремляя $n \to \infty$, в пределе находим

$$y_{2,2}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-l(s+j)} \int\limits_{s+j}^{+\infty} e^{\left(l - \ln q^{-1}\right)u} (\ln q^{-1}) \left\{ a y_{2,2}(u) + bc^{-1} q y_{2,2}(u+1) \right\} du.$$

Сделаем замену $y_{2,2}(s) = e^{-ls} y_{2,3}(s)$, функция $|y_{2,3}(s)| \le M_{12},\ s \ge s_0$,

$$y_{2,3}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-lj} \int\limits_{s+j}^{+\infty} e^{-(\ln q^{-1})u} (\ln q^{-1}) \{ a y_{2,3}(u) + b y_{2,3}(u+1) \} du.$$

Оценим левую часть

$$|y_{2,3}(s)| \leq \frac{|a|+|b|}{1-e^{-\mathrm{Re}l-\ln q^{-1}}} e^{-(\ln q^{-1})s} \sup_{u \geq s} |y_{2,3}(u)|,$$

для $s \leq s_1$ аналогично получаем

$$|y_{2,3}(s_1)| \leq \frac{|a|+|b|}{1-e^{-\mathrm{Re}l-\ln q^{-1}}} e^{-(\ln q^{-1})s_1} \sup_{u \geq s_1} |y_{2,3}(u)| \leq$$

$$\leq \frac{|a|+|b|}{1-e^{-\mathrm{Re}l-\ln q^{-1}}} e^{-(\ln q^{-1})s} \sup_{u \geq s} |y_{2,3}(u)|,$$

отсюда

$$\sup_{s_1 \geq s} |y_{2,3}(s_1)| \leq \frac{|a|+|b|}{1-e^{-\mathrm{Re}l-\ln q^{-1}}} e^{-(\ln q^{-1})s} \sup_{u \geq s} |y_{2,3}(u)|,$$

при большом s коэффициент $\dfrac{|a|+|b|}{1-e^{-\mathrm{Re}l-\ln q^{-1}}} e^{-(\ln q^{-1})s} < 1$, поэтому $y_{2,3}(u) \equiv 0$.

Итак,

$$0 \equiv y_{2,2}(s) = y_{2,1}(s) - \bar{y}_2(s) = y_2(s) - \tilde{y}_2(s) - \bar{y}_2(s)$$

и окончательно получаем

$$x\left(e^{-s\ln q^{-1}}\right) = e^{ls} y_2(s) = e^{ls}\bar{y}_2(s) + e^{ls}\tilde{y}_2(s) =$$

$$= \begin{cases} x_1\left(e^{-s\ln q^{-1}}\right) + x_4\left(e^{-s\ln q^{-1}}\right), & c \neq q^{m+2}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \\ x_1\left(e^{-s\ln q^{-1}}\right) + x_3\left(e^{-s\ln q^{-1}}\right) + x_5\left(e^{-s\ln q^{-1}}\right), & c = q^{m+2}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

или ($|c| < q$)

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) + x_4(t), & c \neq q^{m+2}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \\ x_1(t) + x_3(t) + x_5(t), & c = q^{m+2}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Теперь предположим, что $\mathrm{Re}l = \ln\left(\dfrac{q}{|c|}\right) < 0$. В интегральном уравнении

$$e^{l(s+1)} y_2(s+1) = \frac{q}{c} e^{ls_0} \left(y_2(s_0+1) - y_2(s_0)\right) +$$

$$+ \frac{q}{c} e^{ls} y_2(s) + e^l \int_{s_0}^{s} e^{-(\ln q^{-1})u} \ln q^{-1} \left\{ a e^{lu} y_2(u) + b e^{l(u+1)} y_2(u+1) \right\} du$$

оценим левую часть

$$\left| e^{l(s+1)} y_2(s+1) \right| \leq \left| \frac{q}{c} e^{ls_0} \left(y_2(s_0+1) - y_2(s_0)\right) \right| + \frac{q}{|c|} \left| e^{ls} y_2(s) \right| +$$

$$+\frac{q}{|c|}\int\limits_{s_0}^{s} e^{-(\ln q^{-1})u}(\ln q^{-1})\left\{|a|\left|e^{lu}y_2(u)\right|+|b|\left|e^{l(u+1)}y_2(u+1)\right|\right\}du\leq$$

$$\leq\left|\frac{q}{c}e^{ls_0}\left(y_2\left(s_0+1\right)-y_2(s_0)\right)\right|+\frac{q}{|c|}\left|e^{ls}y_2(s)\right|+\frac{q}{|c|}\int\limits_{s_0}^{s} e^{-(\ln q^{-1})u}(\ln q^{-1})\times$$

$$\times\left\{|a|\sup_{s_0\leq u\leq s}\left|e^{lu}y_2(u)\right|+|b|\sup_{s_0\leq u\leq s}\left|e^{l(u+1)}y_2(u+1)\right|\right\}du\leq$$

$$\leq\left|\frac{q}{c}e^{ls_0}\left(y_2\left(s_0+1\right)-y_2(s_0)\right)\right|+\frac{q}{|c|}\left|e^{ls}y_2(s)\right|+$$

$$+\frac{q}{|c|}e^{-(\ln q^{-1})s_0}\left\{|a|\sup_{s_0\leq u\leq s}\left|e^{lu}y_2(u)\right|+|b|\sup_{s_0+1\leq u\leq s+1}\left|e^{lu}y_2(u)\right|\right\}\leq$$

$$\leq\left|\frac{q}{c}e^{ls_0}\left(y_2\left(s_0+1\right)-y_2(s_0)\right)\right|+\frac{q}{|c|}\sup_{s_0\leq u\leq s}\left|e^{lu}y_2(u)\right|+$$

$$+\frac{q}{|c|}e^{-(\ln q^{-1})s_0}\left\{|a|\sup_{s_0\leq u\leq s}\left|e^{lu}y_2(u)\right|+|b|\sup_{s_0\leq u\leq s+1}\left|e^{lu}y_2(u)\right|\right\}.$$

Для точки $s_0\leq s_1\leq s$ аналогично имеем

$$\left|e^{l(s_1+1)}y_2\left(s_1+1\right)\right|\leq\left|\frac{q}{c}e^{ls_0}\left(y_2\left(s_0+1\right)-y_2(s_0)\right)\right|+\frac{q}{|c|}\sup_{s_0\leq u\leq s_1}\left|e^{lu}y_2(u)\right|+$$

$$+\frac{q}{|c|}e^{-(\ln q^{-1})s_0}\left\{|a|\sup_{s_0\leq u\leq s_1}\left|e^{lu}y_2(u)\right|+|b|\sup_{s_0\leq u\leq s_1+1}\left|e^{lu}y_2(u)\right|\right\}.$$

Заменяя в правой части s_1 на $s,$ увеличиваем верхние границы $(\sup)$ и получаем неравенство

$$\left|e^{l(s_1+1)}y_2\left(s_1+1\right)\right|\leq\left|\frac{q}{c}e^{ls_0}\left(y_2\left(s_0+1\right)-y_2(s_0)\right)\right|+\frac{q}{|c|}\sup_{s_0\leq u\leq s}\left|e^{lu}y_2(u)\right|+$$

$$+\frac{q}{|c|}e^{-(\ln q^{-1})s_0}\left\{|a|\sup_{s_0\leq u\leq s}\left|e^{lu}y_2(u)\right|+|b|\sup_{s_0\leq u\leq s+1}\left|e^{lu}y_2(u)\right|\right\}.$$

Точка s_1 произвольная из отрезка $s_0\leq s_1\leq s,$ поэтому

$$\sup_{s_0+1\leq u\leq s+1}\left|e^{lu}y_2(u)\right|=\sup_{s_0\leq s_1\leq s}\left|e^{l(s_1+1)}y_2\left(s_1+1\right)\right|\leq\left|\frac{q}{c}e^{ls_0}\left(y_2\left(s_0+1\right)-y_2(s_0)\right)\right|+$$

$$+\frac{q}{|c|}\sup_{s_0\leq u\leq s}\left|e^{lu}y_2(u)\right|+\frac{q}{|c|}e^{-(\ln q^{-1})s_0}\times$$

$$\times\left\{|a|\sup_{s_0\leq u\leq s}\left|e^{lu}y_2(u)\right|+|b|\sup_{s_0\leq u\leq s+1}\left|e^{lu}y_2(u)\right|\right\}.$$

Отсюда имеем

$$\sup_{s_0\le u\le s+1}\left|e^{lu}y_2(u)\right| \le \sup_{s_0\le u\le s_0+1}\left|e^{lu}y_2(u)\right| + \sup_{s_0+1\le u\le s+1}\left|e^{lu}y_2(u)\right| \le$$

$$\le \sup_{s_0\le u\le s_0+1}\left|e^{lu}y_2(u)\right| + \left|\frac{q}{c}e^{ls_0}\left(y_2\left(s_0+1\right)-y_2(s_0)\right)\right| +$$

$$+\frac{q}{|c|}\sup_{s_0\le u\le s}\left|e^{lu}y_2(u)\right| + \frac{q}{|c|}e^{-(\ln q^{-1})s_0}\times$$

$$\times\left\{|a|\sup_{s_0\le u\le s}\left|e^{lu}y_2(u)\right| + |b|\sup_{s_0\le u\le s+1}\left|e^{lu}y_2(u)\right|\right\},$$

$$\left\{1-|b|\,\frac{q}{|c|}e^{-(\ln q^{-1})s_0}\right\}\sup_{s_0\le u\le s+1}\left|e^{lu}y_2(u)\right| \le$$

$$\le \sup_{s_0\le u\le s_0+1}\left|e^{lu}y_2(u)\right| + \left|\frac{q}{c}e^{ls_0}\left(y_2\left(s_0+1\right)-y_2(s_0)\right)\right| +$$

$$+\frac{q}{|c|}\left\{1+|a|\,e^{-(\ln q^{-1})s_0}\right\}\sup_{s_0\le u\le s}\left|e^{lu}y_2(u)\right|.$$

Полагая s_0 достаточно большим, получаем

$$\sup_{s_0\le u\le s+1}\left|e^{lu}y_2(u)\right| \le \left\{1-\left|bc^{-1}\right|qe^{-(\ln q^{-1})s_0}\right\}^{-1}\times$$

$$\times\left(\sup_{s_0\le u\le s_0+1}\left|e^{lu}y_2(u)\right| + \left|\frac{q}{c}e^{ls_0}\left(y_2\left(s_0+1\right)-y_2(s_0)\right)\right|\right) +$$

$$+\frac{q}{|c|}\frac{1+|a|\,e^{-(\ln q^{-1})s_0}}{1-\left|bc^{-1}\right|qe^{-(\ln q^{-1})s_0}}\sup_{s_0\le u\le s}\left|e^{lu}y_2(u)\right|.$$

Сократим запись

$$\sup_{s_0\le u\le s}\left|e^{lu}y_2(u)\right| \overset{\mathrm{df}}{=} g(s), \qquad \frac{q}{|c|}\frac{1+|a|\,e^{-(\ln q^{-1})s_0}}{1-\left|bc^{-1}\right|qe^{-(\ln q^{-1})s_0}} \overset{\mathrm{df}}{=} M_{14},$$

$$\left\{1-\left|bc^{-1}\right|qe^{-(\ln q^{-1})s_0}\right\}^{-1}\left(\sup_{s_0\le u\le s_0+1}\left|e^{lu}y_2(u)\right| + \left|\frac{q}{c}e^{ls_0}\left(y_2\left(s_0+1\right)-y_2(s_0)\right)\right|\right) \overset{\mathrm{df}}{=} M_{15},$$

коэффициент $M_{14}=M_{14}(s_0)\to\dfrac{q}{|c|}<1,\ s_0\to+\infty$, т. е. при достаточно большом s_0 можем считать $M_{14}<1$. В новых обозначениях имеем

$$g(s+1)\le M_{14}g(s)+M_{15},$$

$$g(s+1)-h\le M_{14}\left(g(s)-h\right),$$

где $h = (1 - M_{14})^{-1} M_{15}$,

$$\frac{g(s+1)-h}{e^{(s+1)\ln M_{14}}} \leq \frac{M_{14}\left(g(s)-h\right)}{e^{(s+1)\ln M_{14}}} = \frac{g(s)-h}{e^{s\ln M_{14}}},$$

$$\frac{g(s)-h}{e^{s\ln M_{14}}} \leq \sup_{s_0\leq\tau\leq s_0+1} \frac{g(\tau)-h}{e^{\tau\ln M_{14}}},$$

$$\left|e^{ls}y_2(s)\right| \leq \sup_{s_0\leq u\leq s}\left|e^{lu}y_2(u)\right| = g(s) \leq \left(\sup_{s_0\leq\tau\leq s_0+1}\frac{g(\tau)-h}{e^{\tau\ln M_{14}}}\right)e^{s\ln M_{14}} + h, \quad s \geq s_0,$$

число $M_{14} < 1,$ поэтому $\ln M_{14} < 0,$ а следовательно, $\left|e^{ls}y_2(s)\right| \leq M_{16},\ s \geq s_0.$

Запишем интегральное уравнение в следующем виде:

$$e^{ls}\left(y_2(s+1) - y_2(s)\right) - e^{ls_0}\left(y_2(s_0+1) - y_2(s_0)\right) =$$

$$= \int\limits_{s_0}^{s} e^{-(\ln q^{-1})u}\ln q^{-1}\left\{ae^{lu}y_2(u) + be^{l(u+1)}y_2(u+1)\right\}du. \tag{6}$$

Из ограниченности произведения $e^{ls}y_2(s)$ вытекает сходимость интеграла

$$\int\limits_{s_0}^{+\infty} e^{-(\ln q^{-1})u}\ln q^{-1}\left\{ae^{lu}y_2(u) + be^{l(u+1)}y_2(u+1)\right\}du,$$

поэтому существует предел

$$\lim_{s\to+\infty} e^{ls}\left(y_2(s+1) - y_2(s)\right) \overset{\text{df}}{=} Y \in \mathrm{C}.$$

Так как $|c| > q,$ то равенство $cq^{m-1} = 1,\ m \geq 0,$ может выполняться при $m = 1, 2, 3, \ldots,$ т. е. минимальная степень t перед логарифмом в решении $x_2(t)$ равна $m \geq 1.$ Поэтому оба возможных решения $x_{1,2}(t)$ стремятся к произвольной постоянной α_0 при $t \to 0+.$ Используя связь между решениями, получаем

$$e^{ls}\tilde{y}_2(s) \overset{\text{df}}{=} \begin{cases} x_1\left(e^{-s\ln q^{-1}}\right), & c \neq q^{-m+1}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \\ x_2\left(e^{-s\ln q^{-1}}\right), & c = q^{-m+1}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} = \alpha_0 + O\left(se^{-s\ln q^{-1}}\right), \quad s \to +\infty.$$

Тогда $\lim\limits_{s\to+\infty} e^{ls}\left(\tilde{y}_2(s+1) - \tilde{y}_2(s)\right) = \left(cq^{-1} - 1\right)\alpha_0.$ Выбирая $\alpha_0 = \left(cq^{-1} - 1\right)^{-1}Y,$ для разности $y_{2,0}(s) \overset{\text{df}}{=} y_2(s) - \tilde{y}_2(s)$ получаем равенство $\lim\limits_{s\to+\infty} e^{ls}\left(y_{2,0}(s+1) - y_{2,0}(s)\right) = 0.$

В интегральном уравнении

$$e^{ls}\left(y_{2,0}(s+1) - y_{2,0}(s)\right) - e^{ls_0}\left(y_{2,0}\left(s_0+1\right) - y_{2,0}(s_0)\right) =$$

$$= \int\limits_{s_0}^{s} e^{-(\ln q^{-1})u}\ln q^{-1}\left\{ae^{lu}y_{2,0}(u) + be^{l(u+1)}y_{2,0}(u+1)\right\}du$$

устремим $s \to +\infty$. В пределе, снова заменяя s_0 переменной s, получаем

$$e^{l(s+1)}y_{2,0}(s+1) = \frac{q}{c}e^{ls}y_{2,0}(s) - \frac{q}{c}\int\limits_s^{+\infty} e^{-(\ln q^{-1})u}\ln q^{-1}\left\{ae^{lu}y_{2,0}(u) + be^{l(u+1)}y_{2,0}(u+1)\right\}du.$$

Для любого решения и, в частности, для $y_{2,0}(s)$, произведение $e^{ls}y_{2,0}(s)$ ограничено. Поэтому

$$\left|e^{l(s+1)}y_{2,0}\left(s+1\right)\right| \le \left|\frac{q}{c}\right|\left|e^{ls}y_{2,0}(s)\right| + \left|\frac{q}{c}\right|\int\limits_s^{+\infty} e^{-(\ln q^{-1})u}(\ln q^{-1})\times$$

$$\times\left\{|a|\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right| + |b|\left|e^{l(u+1)}y_{2,0}(u+1)\right|\right\}du \le$$

$$\le \left|\frac{q}{c}\right|\sup_{u\ge s}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right| + \left|\frac{q}{c}\right|\int\limits_s^{+\infty} e^{-(\ln q^{-1})u}(\ln q^{-1})\times$$

$$\times\left\{|a|\sup_{u\ge s}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right| + |b|\sup_{u\ge s}\left|e^{l(u+1)}y_{2,0}(u+1)\right|\right\}du =$$

$$= \left|\frac{q}{c}\right|\sup_{u\ge s}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right| + |a|\left|\frac{q}{c}\right|e^{-(\ln q^{-1})s}\sup_{u\ge s}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right| +$$

$$+ |b|\left|\frac{q}{c}\right|e^{-(\ln q^{-1})s}\sup_{u\ge s+1}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right|.$$

Для точки $s_1 \ge s$ аналогично получаем

$$\left|e^{l(s_1+1)}y_{2,0}\left(s_1+1\right)\right| \le \left|\frac{q}{c}\right|\sup_{u\ge s_1}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right| + |a|\left|\frac{q}{c}\right|e^{-(\ln q^{-1})s_1}\times$$

$$\times\sup_{u\ge s_1}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right| + |b|\left|\frac{q}{c}\right|e^{-(\ln q^{-1})s_1}\sup_{u\ge s_1+1}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right| \le$$

$$\le \left|\frac{q}{c}\right|\sup_{u\ge s}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right| + |a|\left|\frac{q}{c}\right|e^{-(\ln q^{-1})s}\times$$

$$\times\sup_{u\ge s}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right| + |b|\left|\frac{q}{c}\right|e^{-(\ln q^{-1})s}\sup_{u\ge s+1}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right|.$$

Тогда

$$\sup_{u\ge s+1}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right| = \sup_{s_1\ge s}\left|e^{l(s_1+1)}y_{2,0}(s_1+1)\right| \le \left|\frac{q}{c}\right|\sup_{u\ge s}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right| +$$

$$+ |a|\left|\frac{q}{c}\right|e^{-(\ln q^{-1})s}\sup_{u\ge s}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right| + |b|\left|\frac{q}{c}\right|e^{-(\ln q^{-1})s}\sup_{u\ge s+1}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right|,$$

$$\left\{1 - |b|\left|\frac{q}{c}\right|e^{-(\ln q^{-1})s}\right\}\sup_{u\ge s+1}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right| \le \left|\frac{q}{c}\right|\left\{1 + |a|\,e^{-(\ln q^{-1})s}\right\}\sup_{u\ge s}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right|,$$

при больших s справедливо

$$\sup_{u\geq s+1}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right|\leq\left|\frac{q}{c}\right|\frac{1+|a|\,e^{-(\ln q^{-1})s}}{1-|b|\left|\frac{q}{c}\right|e^{-(\ln q^{-1})s}}\sup_{u\geq s}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right|.$$

Если $s\geq s_0,\ s-s_0=n+\tau,\ s=s_0+\tau+n,\ 0\leq\tau<1,\ n\geq 0$, то

$$\sup_{u\geq s}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right|\leq\left|\frac{q}{c}\right|\frac{1+|a|\,e^{-(\ln q^{-1})(s-1)}}{1-|b|\left|\frac{q}{c}\right|e^{-(\ln q^{-1})(s-1)}}\sup_{u\geq s-1}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right|\leq$$

$$\leq\left(\frac{q}{|c|}\right)^n\prod_{k=1}^{n}\frac{1+|a|\,e^{-(\ln q^{-1})(s-k)}}{1-|b|\left|\frac{q}{c}\right|e^{-(\ln q^{-1})(s-k)}}\sup_{u\geq s_0}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right|=$$

$$=\left(\frac{q}{|c|}\right)^n\prod_{j=0}^{n-1}\frac{1+|a|\,e^{-(\ln q^{-1})(s_0+\tau+j)}}{1-|b|\left|\frac{q}{c}\right|e^{-(\ln q^{-1})(s_0+\tau+j)}}\sup_{u\geq s_0}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right|\leq$$

$$\leq\left(\frac{q}{|c|}\right)^n\prod_{j=0}^{\infty}\frac{1+|a|\,e^{-(\ln q^{-1})(s_0+\tau+j)}}{1-|b|\left|\frac{q}{c}\right|e^{-(\ln q^{-1})(s_0+\tau+j)}}\sup_{u\geq s_0}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right|\leq$$

$$\leq\left(\frac{q}{|c|}\right)^n\sup_{s_0\leq u\leq s_0+1}\left\{\prod_{j=0}^{\infty}\frac{1+|a|\,e^{-(\ln q^{-1})(u+j)}}{1-|b|\left|\frac{q}{c}\right|e^{-(\ln q^{-1})(u+j)}}\right\}\sup_{u\geq s_0}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right|.$$

Число $n=s-s_0-\tau>s-s_0-1$ и $\dfrac{q}{|c|}<1$, поэтому

$$\left(\frac{q}{|c|}\right)^n<\left(\frac{q}{|c|}\right)^{s-s_0-1}$$

и

$$\left|e^{ls}y_{2,0}(s)\right|\leq\sup_{u\geq s}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right|$$

$$\leq\left(\frac{q}{|c|}\right)^{s-s_0-1}\sup_{s_0\leq u\leq s_0+1}\left\{\prod_{j=0}^{\infty}\frac{1+|a|\,e^{-(\ln q^{-1})(u+j)}}{1-|b|\left|\frac{q}{c}\right|e^{-(\ln q^{-1})(u+j)}}\right\}\times$$

$$\times\sup_{u\geq s_0}\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right|=e^{(\mathrm{Re}l)s}M_{17},\quad s\geq s_0.$$

Перепишем интегральное уравнение в виде

$$y_{2,0}\,(s+1)-y_{2,0}(s)=-e^{-ls}\int\limits_{s}^{+\infty}e^{-(\ln q^{-1})u}(\ln q^{-1})\left\{ae^{lu}y_{2,0}(u)+be^{l(u+1)}y_{2,0}(u+1)\right\}du$$

и оценим левую часть с учетом только что доказанной ограниченности решения $y_{2,0}(u)$:

$$\begin{aligned}\left|y_{2,0}\,(s+1)-y_{2,0}(s)\right| \le e^{-(\mathrm{Re}l)s}\int\limits_{s}^{+\infty} e^{-(\ln q^{-1})u}(\ln q^{-1})\times \\ \times\left\{|a|\left|e^{lu}y_{2,0}(u)\right|+|b|\left|e^{l(u+1)}y_{2,0}(u+1)\right|\right\}du \le \\ \le e^{-(\mathrm{Re}l)s}\int\limits_{s}^{+\infty} e^{-(\ln q^{-1})u}(\ln q^{-1})\times \\ \times\left\{|a|\,e^{(\mathrm{Re}l)u}M_{17}+|b|\,e^{(\mathrm{Re}l)(u+1)}M_{17}\right\}du = \\ = e^{-(\ln q^{-1})s}M_{18}.\end{aligned}$$

Отсюда следует $y_{2,0}(s)=w(s)+O\big(e^{-(\ln q^{-1})s}\big)$, $s\to+\infty$, где $w(s)$ — непрерывная 1-периодическая функция.

Суммируя равенства

$$y_{2,0}\,(s+1)-y_{2,0}(s)=-e^{-ls}\int\limits_{s}^{+\infty} e^{-(\ln q^{-1})u}\ln q^{-1}\left\{ae^{lu}y_{2,0}(u)+be^{l(u+1)}y_{2,0}(u+1)\right\}du,$$

. . . .

$$\begin{aligned}y_{2,0}(s+n+1)-y_{2,0}(s+n)=-e^{-l(s+n)}\int\limits_{s+n}^{+\infty} e^{-(\ln q^{-1})u}\ln q^{-1}\times \\ \times\left\{ae^{lu}y_{2,0}(u)+be^{l(u+1)}y_{2,0}(u+1)\right\}du,\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned}y_{2,0}\,(s+n+1)-y_{2,0}(s)=-\sum_{j=0}^{n}e^{-l(s+j)}\int\limits_{s+j}^{+\infty} e^{-(\ln q^{-1})u}\ln q^{-1}\times \\ \times\left\{ae^{lu}y_{2,0}(u)+be^{l(u+1)}y_{2,0}(u+1)\right\}du.\end{aligned}$$

Устремляя $n\to+\infty$, в пределе находим

$$w(s)=y_{2,0}(s)-\sum_{j=0}^{+\infty}e^{-l(s+j)}\int\limits_{s+j}^{+\infty} e^{-(\ln q^{-1})u}\ln q^{-1}\left\{ae^{lu}y_{2,0}(u)+be^{l(u+1)}y_{2,0}(u+1)\right\}du.$$

Из непрерывной дифференцируемости и ограниченности решения $y_{2,0}(s)$ следует непрерывная дифференцируемость функции $w(s)$.

Условие $|c|>q$ делает возможным построить решение $x_4(t)$ с периодической функцией $g_0(-s)\equiv w(s).$ Используем связь между решениями

$$e^{ls}\widehat{y}_2(s)\overset{\mathrm{df}}{=}x_4\big(e^{-s\ln q^{-1}}\big)=e^{ls}\Big\{w(s)+O\big(e^{-s\ln q^{-1}}\big)\Big\},$$

$$\widehat{y}_2(s)=w(s)+O\big(e^{-s\ln q^{-1}}\big),\quad s\to+\infty.$$

Для разности решений $\bar{y}_2(s)\overset{\mathrm{df}}{=}y_{2,0}(s)-\widehat{y}_2(s)=O\big(e^{-(\ln q^{-1})s}\big),\ s\to+\infty,$ сделаем в уравнении

$$\bar{y}_2\left(s+1\right)=\bar{y}_2(s)-e^{-ls}\int\limits_s^{+\infty}e^{-(\ln q^{-1})u}\ln q^{-1}\Big\{ae^{lu}\bar{y}_2(u)+be^{l(u+1)}\bar{y}_2(u+1)\Big\}\,du$$

замену $\bar{y}_2(s)=y_{2,1}(s)e^{-(\ln q^{-1})s},\ |y_{2,1}(s)|\le M_{19},\ s\ge s_0$:

$$y_{2,1}(s)=qy_{2,1}\left(s+1\right)+e^{(-l+\ln q^{-1})s}\int\limits_s^{+\infty}e^{\left(l-2\ln q^{-1}\right)u}(\ln q^{-1})\left\{ay_{2,1}(u)+bc^{-1}q^2y_{2,1}\left(u+1\right)\right\}du.$$

Оценим левую часть

$$|y_{2,1}(s)|\le q\,|y_{2,1}(s+1)|+e^{\left(-\mathrm{Re}l+\ln q^{-1}\right)s}\int\limits_s^{+\infty}e^{\left(\mathrm{Re}l-2\ln q^{-1}\right)u}(\ln q^{-1})\times$$

$$\times\left\{|a||y_{2,1}(u)|+\left|bc^{-1}\right|q^2\left|y_{2,1}\left(u+1\right)\right|\right\}du\le q\sup_{u\ge s+1}|y_{2,1}(u)|+$$

$$+e^{\left(-\mathrm{Re}l+\ln q^{-1}\right)s}\int\limits_s^{+\infty}e^{\left(\mathrm{Re}l-2\ln q^{-1}\right)u}(\ln q^{-1})\times$$

$$\times\left\{|a|\sup_{u\ge s}|y_{2,1}(u)|+\left|bc^{-1}\right|q^2\sup_{u\ge s}|y_{2,1}(u+1)|\right\}du=$$

$$=q\sup_{u\ge s+1}|y_{2,1}(u)|+|a|\left(\ln q^{-1}\right)\frac{e^{-(\ln q^{-1})s}}{-\mathrm{Re}l+2\ln q^{-1}}\sup_{u\ge s}|y_{2,1}(u)|+$$

$$+\left|bc^{-1}\right|q^2(\ln q^{-1})\frac{e^{-(\ln q^{-1})s}}{-\mathrm{Re}l+2\ln q^{-1}}\sup_{u\ge s+1}|y_{2,1}(u)|.$$

Для произвольной точки $s_1\ge s$ аналогично получаем

$$|y_{2,1}\left(s_1\right)|\le q\sup_{u\ge s_1+1}|y_{2,1}(u)|+|a|\left(\ln q^{-1}\right)\frac{e^{-(\ln q^{-1})s_1}}{-\mathrm{Re}l+2\ln q^{-1}}\sup_{u\ge s_1}|y_{2,1}(u)|+$$

$$+\left|bc^{-1}\right|q^2(\ln q^{-1})\frac{e^{-(\ln q^{-1})s_1}}{-\mathrm{Re}l+2\ln q^{-1}}\sup_{u\ge s_1+1}|y_{2,1}(u)|\le$$

$$\leq q \sup_{u\geq s+1} |y_{2,1}(u)| + |a| \left(\ln q^{-1}\right) \frac{e^{-(\ln q^{-1})s}}{-\mathrm{Re}l + 2\ln q^{-1}} \sup_{u\geq s} |y_{2,1}(u)| +$$

$$+ \left|bc^{-1}\right| q^2 (\ln q^{-1}) \frac{e^{-(\ln q^{-1})s}}{-\mathrm{Re}l + 2\ln q^{-1}} \sup_{u\geq s+1} |y_{2,1}(u)| .$$

Отсюда имеем

$$\sup_{s_1\geq s} |y_{2,1}(s_1)| \leq q \sup_{u\geq s+1} |y_{2,1}(u)| + |a| \left(\ln q^{-1}\right) \frac{e^{-(\ln q^{-1})s}}{-\mathrm{Re}l + 2\ln q^{-1}} \sup_{u\geq s} |y_{2,1}(u)| +$$

$$+ \left|bc^{-1}\right| q^2 (\ln q^{-1}) \frac{e^{-(\ln q^{-1})s}}{-\mathrm{Re}l + 2\ln q^{-1}} \sup_{u\geq s+1} |y_{2,1}(u)| ,$$

$$\left\{1 - |a| \left(\ln q^{-1}\right) \frac{e^{-(\ln q^{-1})s}}{-\mathrm{Re}l + 2\ln q^{-1}}\right\} \sup_{u\geq s} |y_{2,1}(u)| \leq$$

$$\leq q \left\{1 + \left|bc^{-1}\right| q (\ln q^{-1}) \frac{e^{-(\ln q^{-1})s}}{-\mathrm{Re}l + 2\ln q^{-1}}\right\} \sup_{u\geq s+1} |y_{2,1}(u)| .$$

При достаточно большом s получаем

$$\sup_{u\geq s} |y_{2,1}(u)| \leq q \frac{1 + \left|bc^{-1}\right| q (\ln q^{-1}) \dfrac{e^{-(\ln q^{-1})s}}{-\mathrm{Re}l + 2\ln q^{-1}}}{1 - |a| \left(\ln q^{-1}\right) \dfrac{e^{-(\ln q^{-1})s}}{-\mathrm{Re}l + 2\ln q^{-1}}} \sup_{u\geq s+1} |y_{2,1}(u)| \leq$$

$$\leq q \frac{1 + \left|bc^{-1}\right| q (\ln q^{-1}) \dfrac{e^{-(\ln q^{-1})s}}{-\mathrm{Re}l + 2\ln q^{-1}}}{1 - |a| \left(\ln q^{-1}\right) \dfrac{e^{-(\ln q^{-1})s}}{-\mathrm{Re}l + 2\ln q^{-1}}} \sup_{u\geq s} |y_{2,1}(u)| ,$$

при больших s коэффициент

$$q \, \frac{1 + \left|bc^{-1}\right| q (\ln q^{-1}) \dfrac{e^{-(\ln q^{-1})s}}{-\mathrm{Re}l + 2\ln q^{-1}}}{1 - |a| \left(\ln q^{-1}\right) \dfrac{e^{-(\ln q^{-1})s}}{-\mathrm{Re}l + 2\ln q^{-1}}} < 1,$$

поэтому $y_{2,1}(u) \equiv 0$, т. е.

$$0 \equiv \bar{y}_2(s) = y_{2,0}(s) - \widehat{y}_2(s) = y_2(s) - \tilde{y}_2(s) - \widehat{y}_2(s),$$

$$x\left(e^{-s\ln q^{-1}}\right) = e^{ls} y_2(s) = e^{ls} \tilde{y}_2(s) + e^{ls} \widehat{y}_2(s) =$$

$$= \begin{cases} x_1\left(e^{-s\ln q^{-1}}\right) + x_4\left(e^{-s\ln q^{-1}}\right), & c \neq q^{-m+1}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \\ x_2\left(e^{-s\ln q^{-1}}\right) + x_4\left(e^{-s\ln q^{-1}}\right), & c = q^{-m+1}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots . \end{cases}$$

или окончательно ($|c| > q$)

$$x\,(t) = \begin{cases} x_1(t) + x_4(t), & c \neq q^{-m+1}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots, \\ x_2(t) + x_4(t), & c = q^{-m+1}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Теперь предположим, что $|c| = q$ и $c \neq q$. В уравнении (2) оценим левую часть при $s \geq$ $\geq s_0$:

$$|y_2(s+1)| \leq |y_2\,(s_0+1) - y_2(s_0)| + |y_2(s)| + \int\limits_{s_0}^{s} e^{-(\ln q^{-1})u} (\ln q^{-1}) \times$$

$$\times \left\{|a|\,|y_2(u)| + |b|\,\left|c^{-1}\right| q\,|y_2(u+1)|\right\} du \leq$$

$$\leq |y_2(s_0+1) - y_2(s_0)| + \sup_{s_0 \leq u \leq s} |y_2(u)| + \int\limits_{s_0}^{s} e^{-(\ln q^{-1})u} (\ln q^{-1}) \times$$

$$\times \left\{|a| \sup_{s_0 \leq u \leq s} |y_2(u)| + |b| \sup_{s_0 \leq u \leq s} |y_2(u+1)|\right\} du \leq$$

$$\leq |y_2\,(s_0+1) - y_2(s_0)| + \sup_{s_0 \leq u \leq s} |y_2(u)| +$$

$$+ |a|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0} \sup_{s_0 \leq u \leq s} |y_2(u)| + |b|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0} \sup_{s_0+1 \leq u \leq s+1} |y_2(u)|\,.$$

Для точки s_1 из отрезка $s_0 \leq s_1 \leq s$ аналогично получаем

$$|y_2\,(s_1+1)| \leq |y_2\,(s_0+1) - y_2(s_0)| + \sup_{s_0 \leq u \leq s_1} |y_2(u)| +$$

$$+ |a|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0} \sup_{s_0 \leq u \leq s_1} |y_2(u)| + |b|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0} \sup_{s_0+1 \leq u \leq s_1+1} |y_2(u)| \leq$$

$$\leq |y_2\,(s_0+1) - y_2(s_0)| + \sup_{s_0 \leq u \leq s} |y_2(u)| +$$

$$+ |a|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0} \sup_{s_0 \leq u \leq s} |y_2(u)| + |b|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0} \sup_{s_0+1 \leq u \leq s+1} |y_2(u)|\,.$$

Поэтому выполняются соотношения

$$\sup_{s_0 \leq s_1 \leq s} |y_2\,(s_1+1)| \leq |y_2\,(s_0+1) - y_2(s_0)| + \sup_{s_0 \leq u \leq s} |y_2(u)| +$$

$$+ |a|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0} \sup_{s_0 \leq u \leq s} |y_2(u)| + |b|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0} \sup_{s_0+1 \leq u \leq s+1} |y_2(u)|\,,$$

$$\sup_{s_0+1 \leq u \leq s+1} |y_2(u)| = \sup_{s_0 \leq s_1 \leq s} |y_2\,(s_1+1)| \leq |y_2\,(s_0+1) - y_2(s_0)| + \sup_{s_0 \leq u \leq s} |y_2(u)| +$$

$$+ |a|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0} \sup_{s_0 \le u \le s} |y_2(u)| + |b|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0} \sup_{s_0 \le u \le s+1} |y_2(u)|\,,$$

$$\sup_{s_0 \le u \le s+1} |y_2(u)| \le \sup_{s_0 \le u \le s_0+1} |y_2(u)| + \sup_{s_0+1 \le u \le s+1} |y_2(u)| \le \sup_{s_0 \le u \le s_0+1} |y_2(u)| +$$

$$+ |y_2\,(s_0+1) - y_2(s_0)| + \sup_{s_0 \le u \le s} |y_2(u)| +$$

$$+ |a|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0} \sup_{s_0 \le u \le s} |y_2(u)| + |b|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0} \sup_{s_0 \le u \le s+1} |y_2(u)|\,,$$

$$\left\{1 - |b|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0}\right\} \sup_{s_0 \le u \le s+1} |y_2(u)| \le \sup_{s_0 \le u \le s_0+1} |y_2(u)| + |y_2\,(s_0+1) - y_2(s_0)| +$$

$$+ \left\{1 + |a|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0}\right\} \sup_{s_0 \le u \le s} |y_2(u)|\,.$$

При достаточно большом s_0 получаем

$$\sup_{s_0 \le u \le s+1} |y_2(u)| \le \frac{\sup\limits_{s_0 \le u \le s_0+1} |y_2(u)| + |y_2\,(s_0+1) - y_2\,(s_0)|}{1 - |b|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0}} +$$

$$+ \frac{1 + |a|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0}}{1 - |b|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0}} \sup_{s_0 \le u \le s} |y_2(u)|\,.$$

Дробь $\dfrac{1 + |a|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0}}{1 - |b|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0}} \to 1,\ s_0 \to +\infty,$ поэтому существует $\delta(s_0) > 0,\ \delta(s_0) \to 0,\ s_0 \to +\infty,$ такое, что $\dfrac{1 + |a|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0}}{1 - |b|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0}} \le 1 + \delta(s_0),$ и

$$\sup_{s_0 \le u \le s+1} |y_2(u)| \le \frac{\sup\limits_{s_0 \le u \le s_0+1} |y_2(u)| + |y_2\,(s_0+1) - y_2(s_0)|}{1 - |b|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0}} + \{1 + \delta(s_0)\} \sup_{s_0 \le u \le s} |y_2(u)|\,.$$

Для сокращения записи введем обозначения

$$\sup_{s_0 \le u \le s} |y_2(u)| \overset{\text{df}}{=} g(s), \qquad \frac{\sup\limits_{s_0 \le u \le s_0+1} |y_2(u)| + |y_2\,(s_0+1) - y_2(s_0)|}{1 - |b|\, e^{-(\ln q^{-1})s_0}} \overset{\text{df}}{=} M_{20}$$

и получим

$$g(s+1) \le \{1 + \delta(s_0)\}\, g(s) + M_{20},$$

$$g(s+1) - \gamma \le \{1 + \delta(s_0)\}\, (g(s) - \gamma),$$

где $\gamma = -\dfrac{M_{20}}{\delta(s_0)}$,

$$\frac{g(s+1) - \gamma}{e^{(s+1)\ln(1+\delta(s_0))}} \le \frac{\{1 + \delta(s_0)\}\,(g(s) - \gamma)}{e^{(s+1)\ln(1+\delta(s_0))}} = \frac{g(s) - \gamma}{e^{s\ln(1+\delta(s_0))}} \le \max_{s_0 \le u \le s_0+1} \left(\frac{g(u) - \gamma}{e^{u\ln(1+\delta(s_0))}}\right),$$

$$|y_2(s)| \le \sup_{s_0 \le u \le s} |y_2(u)| = g(s) \le M_{21} e^{s \ln(1+\delta(s_0))}, \quad s \ge s_0.$$

В уравнении (6) последняя экспоненциальная оценка для $y_2(s)$ делает определенным интеграл

$$\int_{s_0}^{+\infty} e^{lu} e^{-(\ln q^{-1})u} \ln q^{-1} \left\{ a y_2(u) + b c^{-1} q y_2(u+1) \right\} du,$$

т. е. существует предел $\lim\limits_{s \to +\infty} e^{ls}(y_2(s+1) - y_2(s)) \overset{\text{df}}{=} Y \in \mathrm{C}$. Как и ранее, для аналитического решения запишем равенство $e^{ls} \bar{y}_2(s) \overset{\text{df}}{=} x_1\big(e^{-s \ln q^{-1}}\big)$. Тогда $e^{ls} \bar{y}_2(s) \to \alpha_0,\ s \to +\infty$. Кроме того, $|\bar{y}_2(s)| \le M_{22},\ s \ge s_0$, и $e^{ls}\left(\bar{y}_2(s+1) - \bar{y}_2(s)\right) \to \left(\frac{c}{q} - 1\right) \alpha_0,\ s \to +\infty$. Выбирая $\alpha_0 = \left(\dfrac{c}{q} - 1\right)^{-1} Y$, для решения $y_{2,0}(s) \overset{\text{df}}{=} y_2(s) - \bar{y}_2(s)$ получаем предел

$$\lim_{s \to +\infty} e^{ls} \left(y_{2,0}(s+1) - y_{2,0}(s) \right) = 0$$

и оценку $|y_{2,0}(s)| \le M_{23} e^{s \ln(1+\delta(s_0))},\ s \ge s_0$. Устремляя в равенстве

$$e^{ls}\big(y_{2,0}(s+1) - y_{2,0}(s)\big) - e^{ls_0}\big(y_{2,0}(s_0+1) - y_{2,0}(s_0)\big) =$$

$$= \int_{s_0}^{s} e^{\left(l - \ln q^{-1}\right)u} \ln q^{-1} \left\{ a y_{2,0}(u) + b c^{-1} q y_{2,0}(u+1) \right\} du$$

переменную $s \to +\infty$, в пределе, заменяя s_0 снова переменной s, получаем

$$y_{2,0}(s+1) - y_{2,0}(s) = -e^{-ls} \int_{s}^{+\infty} e^{\left(l - \ln q^{-1}\right)u} \ln q^{-1} \left\{ a y_{2,0}(u) + b c^{-1} q y_{2,0}(u+1) \right\} du.$$

Оценим модуль разности

$$|y_{2,0}(s+1) - y_{2,0}(s)| \le$$

$$\le \int_{s}^{+\infty} e^{-(\ln q^{-1})u} (\ln q^{-1}) \left\{ |a|\, |y_{2,0}(u)| + \left|b c^{-1}\right| q\, |y_{2,0}(u+1)| \right\} du \le$$

$$\le \int_{s}^{+\infty} e^{-(\ln q^{-1})u} (\ln q^{-1}) \left\{ |a|\, M_{23} e^{u \ln(1+\delta(s_0))} + \left|b c^{-1}\right| q M_{23} e^{(u+1)\ln(1+\delta(s_0))} \right\} du =$$

$$= \int_{s}^{+\infty} e^{-\ln\left(\frac{q^{-1}}{1+\delta(s_0)}\right)u} du (\ln q^{-1}) \left\{ |a| + \left|b c^{-1}\right| q \left(1 + \delta(s_0)\right) \right\} M_{23}.$$

Считаем $\delta(s_0)$ настолько достаточно малым, чтобы выполнялось неравенство $\dfrac{q^{-1}}{1+\delta(s_0)} >$ > 1. Для сокращения записи обозначаем $\lambda \overset{\mathrm{df}}{=} \ln\left(\dfrac{q^{-1}}{1+\delta(s_0)}\right) > 0$ и продолжаем оценку

$$|y_{2,0}\,(s+1) - y_{2,0}(s)| \le M_{24} e^{-\lambda s}, \quad s \ge s_0.$$

Отсюда с помощью предыдущих рассуждений получаем $y_{2,0}(s) = w(s) + O\big(e^{-\lambda s}\big)$, $s \to +\infty$, где $w(s)$ — 1-периодическая непрерывная функция.

Суммируя равенства

$$y_{2,0}(s+1) - y_{2,0}(s) = -e^{-ls} \int\limits_s^{+\infty} e^{\left(l-\ln q^{-1}\right)u} \ln q^{-1} \left\{ a y_{2,0}(u) + bc^{-1} q y_{2,0}(u+1) \right\} du,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{2,0}\,(s+n+1) - y_{2,0}\,(s+n) =$$

$$= -e^{-l(s+n)} \int\limits_{s+n}^{+\infty} e^{\left(l-\ln q^{-1}\right)u} \ln q^{-1} \left\{ a y_{2,0}(u) + bc^{-1} q y_{2,0}(u+1) \right\} du,$$

получаем

$$y_{2,0}\,(s+n+1) - y_{2,0}(s) =$$

$$= -\sum_{j=0}^{n} e^{-l(s+j)} \int\limits_{s+j}^{+\infty} e^{\left(l-\ln q^{-1}\right)u} \ln q^{-1} \left\{ a y_{2,0}(u) + bc^{-1} q y_{2,0}(u+1) \right\} du.$$

Устремляя $n \to +\infty$, в пределе находим

$$w(s) = y_{2,0}(s) - \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-l(s+j)} \int\limits_{s+j}^{+\infty} e^{\left(l-\ln q^{-1}\right)u} \ln q^{-1} \left\{ a y_{2,0}(u) + bc^{-1} q y_{2,0}(u+1) \right\} du.$$

Из непрерывной дифференцируемости и ограниченности решения $y_{2,0}(s)$ следует непрерывная дифференцируемость функции $w(s)$.

Условие $|c| = q$ делает возможным построить решение $x_4(t)$ с периодической функцией $g_0(-s) \equiv w(s)$. Используем связь между решениями

$$e^{ls} \widehat{y}_2(s) \overset{\mathrm{df}}{=} x_4\big(e^{-s\ln q^{-1}}\big) = e^{ls}\left\{ w(s) + O\big(e^{-s\ln q^{-1}}\big) \right\},$$

$$\widehat{y}_2(s) = w(s) + O\big(e^{-s\ln q^{-1}}\big), \quad s \to +\infty.$$

Для разности решений $\bar{y}_2(s) \overset{\mathrm{df}}{=} y_{2,0}(s) - \widehat{y}_2(s) = O\big(e^{-\lambda s}\big)$, $s \to +\infty$, в уравнении

$$\bar{y}_2(s) = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{-l(s+j)} \int\limits_{s+j}^{+\infty} e^{\left(l-\ln q^{-1}\right)u} \ln q^{-1} \left\{ a \bar{y}_2(u) + bc^{-1} q \bar{y}_2(u+1) \right\} du,$$

которое можно получить, повторив предыдущие рассуждения для решения $y_{2,0}(s)$, оценим левую часть:

$$|\bar{y}_2(s)| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \int\limits_{s+j}^{+\infty} e^{-(\ln q^{-1})u} (\ln q^{-1}) \left\{|a| \, |\bar{y}_2(u)| + \left|bc^{-1}\right| q \, |\bar{y}_2(u+1)|\right\} du \leq$$

$$\leq \sum_{j=0}^{+\infty} \int\limits_{s+j}^{+\infty} e^{-(\ln q^{-1})u} (\ln q^{-1}) \left\{|a| \sup_{u \geq s} |\bar{y}_2(u)| + \left|bc^{-1}\right| q \sup_{u \geq s} |\bar{y}_2(u+1)|\right\} du \leq$$

$$\leq (\ln q^{-1}) \left\{|a| + \left|bc^{-1}\right| q\right\} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \int\limits_{s+j}^{+\infty} e^{-(\ln q^{-1})u} du \right) \sup_{u \geq s} |\bar{y}_2(u)| =$$

$$= e^{-(\ln q^{-1})s} \frac{|a| + \left|bc^{-1}\right| q}{1-q} \sup_{u \geq s} |\bar{y}_2(u)| .$$

Для $s_1 \geq s$ аналогично получаем

$$|\bar{y}_2\left(s_1\right)| \leq e^{-(\ln q^{-1})s_1} \frac{|a| + \left|bc^{-1}\right| q}{1-q} \sup_{u \geq s_1} |\bar{y}_2(u)| \leq e^{-(\ln q^{-1})s} \frac{|a| + \left|bc^{-1}\right| q}{1-q} \sup_{u \geq s} |\bar{y}_2(u)| ,$$

поэтому

$$\sup_{s_1 \geq s} |\bar{y}_2\left(s_1\right)| \leq e^{-(\ln q^{-1})s} \frac{|a| + \left|bc^{-1}\right| q}{1-q} \sup_{u \geq s} |\bar{y}_2(u)| .$$

Так как при большом s произведение $e^{-(\ln q^{-1})s} \frac{|a| + \left|bc^{-1}\right| q}{1-q} < 1$, то

$$0 \equiv \bar{y}_2(s) = y_{2,0}(s) - \widehat{y}_2(s) = y_2(s) - \bar{y}_2(s) - \widehat{y}_2(s),$$

$$x\big(e^{-s \ln q^{-1}}\big) = e^{ls} y_2(s) = e^{ls} \bar{y}_2(s) + e^{ls} \widehat{y} y_2(s) = x_1\big(e^{-s \ln q^{-1}}\big) + x_4\big(e^{-s \ln q^{-1}}\big)$$

или, окончательно ($|c| = q$ и $c \neq q$),

$$x\left(t\right) = x_1\left(t\right) + x_4\left(t\right) .$$

В случае $c = q$ число $l = 0$. Так же, как и в случае $|c| = q, \ c \neq q$, получаем неравенство

$$|y_2(s)| \leq M_{25} e^{s \ln(1+\delta(s_0))}, \quad s \geq s_0.$$

Из уравнения

$$y_2(s+h+1) - y_2(s+h) - \left(y_2\left(s+1\right) - y_2(s)\right) =$$

$$= \int\limits_{s}^{s+h} e^{-(\ln q^{-1})u} \ln q^{-1} \left\{ a y_2(u) + bc^{-1} q y_2(u+1) \right\} du,$$

экспоненциальной оценки для $y_2(s)$ и принципа Коши следует существование предела $\lim\limits_{s\to+\infty}\{y_2(s+1)-y_2(s)\}\overset{\mathrm{df}}{=}Y\in\mathbb{C}$. Для решения $x_2(t)$ при $m=0$ выполняется равенство

$$x_2(t)=t\sum_{n=0}^{+\infty}\beta_n t^n+\ln t\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha_n t^n=\alpha_0\ln t+O\left(t\ln t\right),\quad t\to 0+.$$

Поэтому

$$\tilde{y}_2(s)\overset{\mathrm{df}}{=}x_2\big(e^{-s\ln q^{-1}}\big)=-\alpha_0(\ln q^{-1})s+O\big(se^{-s\ln q^{-1}}\big),\quad s\to+\infty,$$

и

$$\tilde{y}_2(s+1)-\tilde{y}_2(s)=-\alpha_0(\ln q^{-1})+O\big(se^{-s\ln q^{-1}}\big)\to-\alpha_0(\ln q^{-1}),\quad s\to+\infty.$$

Если выбрать $\alpha_0=Y/\ln q$, то для решения $y_{2,0}(s)\overset{\mathrm{df}}{=}y_2(s)-\tilde{y}_2(s)$ предел

$$\lim_{s\to+\infty}\{y_{2,0}(s+1)-y_{2,0}(s)\}=0.$$

Учитывая оценки $y_2(s)=O\big(e^{s\ln(1+\delta(s_0))}\big)$ и $\tilde{y}_2(s)=O(s)$, получаем равенство $y_{2,0}(s)==O\big(e^{s\ln(1+\delta(s_0))}\big)$, $s\to+\infty$. Поэтому в интегральном уравнении для $y_{2,0}(s)$

$$y_{2,0}(s+1)-y_{2,0}(s)-(y_{2,0}\left(s_0+1\right)-y_{2,0}(s_0))=$$

$$=\int\limits_{s_0}^{s}e^{-(\ln q^{-1})u}\ln q^{-1}\left\{ay_{2,0}(u)+bc^{-1}qy_{2,0}(u+1)\right\}du$$

интеграл сходится на полуоси $[s_0,+\infty)$. Устремляя в последнем уравнении $s\to+\infty$ и меняя s_0 на s, в пределе находим

$$y_{2,0}\left(s+1\right)-y_{2,0}(s)=-\int\limits_{s}^{+\infty}e^{-(\ln q^{-1})u}\ln q^{-1}\left\{ay_{2,0}(u)+bc^{-1}qy_{2,0}(u+1)\right\}du.$$

Оценим модуль разности

$$\left|y_{2,0}\left(s+1\right)-y_{2,0}(s)\right|\le\int\limits_{s}^{+\infty}e^{-(\ln q^{-1})u}(\ln q^{-1})\left\{|a|\left|y_{2,0}(u)\right|+\left|bc^{-1}\right|q\left|y_{2,0}(u+1)\right|\right\}du\le$$

$$\le\int\limits_{s}^{+\infty}e^{-(\ln q^{-1})u}(\ln q^{-1})\left\{|a|\,M_{26}e^{u\ln(1+\delta(s_0))}+\left|bc^{-1}\right|qM_{26}e^{(u+1)\ln(1+\delta(s_0))}\right\}du\le$$

$$\le M_{27}e^{-\lambda s},\quad s\ge s_0.$$

Отсюда $y_{2,0}(s)=w(s)+O\big(e^{-\lambda s}\big)$, $s\to+\infty$, где $w(s)$ — 1-периодическая непрерывная функция. Как и в предыдущих случаях, получаем формулу

$$w(s)=y_{2,0}(s)-\sum_{j=0}^{+\infty}\int\limits_{s+j}^{+\infty}e^{-(\ln q^{-1})u}\ln q^{-1}\left\{ay_{2,0}(u)+bc^{-1}qy_{2,0}(u+1)\right\}du.$$

Из непрерывной дифференцируемости и ограниченности решения $y_{2,0}(s)$ следует непрерывная дифференцируемость функции $w(s)$.

Условие $c = q$ делает возможным построить решение $x_4\,(t)$ с периодической функцией $g_0(-s) \equiv w(s)$. Используем связь между решениями

$$\widehat{y}_2(s) \overset{\mathrm{df}}{=} x_4\big(e^{-s\ln q^{-1}}\big) = w(s) + O\big(e^{-s\ln q^{-1}}\big), \quad s \to +\infty.$$

Для разности решений $\bar{y}_2(s) \overset{\mathrm{df}}{=} y_{2,0}(s) - \widehat{y}_2(s) = O\big(e^{-\lambda s}\big),\ s \to +\infty$, повторяя рассуждения предыдущего случая $|c| = q,\ c \neq q$, доказываем тождество

$$0 \equiv \bar{y}_2(s) = y_{2,0}(s) - \widehat{y}_2(s) = y_2(s) - \tilde{y}_2(s) - \widehat{y}_2(s),$$

$$x\big(e^{-s\ln q^{-1}}\big) = y_2(s) = \tilde{y}_2(s) + \widehat{y}_2(s) = x_2\big(e^{-s\ln q^{-1}}\big) + x_4\big(e^{-s\ln q^{-1}}\big)$$

или, окончательно ($c = q$),

$$x\,(t) = x_2\,(t) + x_4\,(t)\,.$$

Теорема 1 доказана.

Исследуем уравнение

$$x'(t) = ax(t) + bx(qt) + cx'(qt) + f\big(x(t), x(qt)\big), \tag{7}$$

где $\{a, b, c\} \subset \mathrm{C},\ 0 < q < 1,\ f(0,0) = 0$, и существует неубывающая функция $h\colon [0, +\infty) \to \to [0, +\infty),\ h(0) = 0$, такая, что

$$\big|f\,(x_1, x_2) - f\,(y_1, y_2)\,\big| \leq h(r)\big(\,|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|\,\big)$$

для всех $|x_i| \leq r,\ |y_i| \leq r,\ i = \overline{1,2}$, в окрестности точки $t = 0$.

Теорема 2. *Если $|c| > q$, то для каждого непрерывно дифференцируемого решения уравнения (7) $x(t) = O\,(t^v)\,,\ t \to 0+$, где v определяется из условия $cq^{v-1} = 1$, выполняется равенство*

$$x(t) = t^v \left\{ g\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + O(t) \right\}, \quad t \to 0+, \tag{8}$$

где $g(s)$ — некоторая непрерывно дифференцируемая периодическая функция с периодом 1. И обратно, для каждой функции $g(s)$ существует единственное решение уравнения (7) с асимптотической формулой (8).

Доказательство. Как и в линейном случае, сделаем в уравнении (7) несколько замен переменных $x\big(e^{-s\ln q^{-1}}\big) = y\,(-s) = y_1(s) = e^{ls}y_2(s)$, где l определяется из равенства $cq^{-1}e^l = 1$, для того чтобы получить уравнение

$$\frac{d}{du}\left\{e^{lu}\left(y_2(u+1) - y_2(u)\right)\right\} = e^{lu}e^{-(\ln q^{-1})u}\Big[(\ln q^{-1})\left\{ay_2(u) + bc^{-1}qy_2(u+1)\right\} +$$

$$+ (\ln q^{-1})e^{-lu}f\left(e^{lu}y_2(u), c^{-1}qe^{lu}y_2(u+1)\right)\Big].$$

Предполагая ограниченность $y_2(u)$ и учитывая неравенство $\mathrm{Re}l = \ln\left(\dfrac{q}{|c|}\right) < 0$, проинтегрируем тождество на полуоси $[s, +\infty)$:

$$y_2(s+1) - y_2(s) = -e^{-ls} \int\limits_s^{+\infty} e^{lu} e^{-(\ln q^{-1})u} \Big[(\ln q^{-1}) \left\{ a y_2(u) + b c^{-1} q y_2(u+1) \right\} +$$

$$+ \ (\ln q^{-1}) e^{-lu} f\left(e^{lu} y_2(u), c^{-1} q e^{lu} y_2(u+1) \right) \Big] du.$$

Для сокращения записи определим функцию

$$g\left(u, x_1, x_2\right) \stackrel{\mathrm{df}}{=} (\ln q^{-1}) \left\{ a x_1 + b c^{-1} q x_2 \right\} + (\ln q^{-1}) e^{-lu} f\left(e^{lu} x_1, c^{-1} q e^{lu} x_2 \right),$$

имеющую свойства: $g\left(u, 0, 0\right) = 0$ и для $u \geq s_0 \geq 0$, $|x_1| \leq r$, $|x_2| \leq r$, $|y_1| \leq r$, $|y_2| \leq r$ выполняется неравенство

$$\left| g\left(u, x_1, x_2\right) - g\left(u, y_1, y_2\right) \right| \leq$$

$$\leq (\ln q^{-1}) \left(|a| + h(r) \right) |x_1 - y_1| + (\ln q^{-1}) \left(|b| + h(r) \right) \left| c^{-1} \right| q \left| x_2 - y_2 \right|,$$

где величина s_0 определяется из условия $\left| c^{-1} q e^{l s_0} \right| \leq 1$. Тогда

$$y_2(s+1) - y_2(s) = -e^{-ls} \int\limits_s^{+\infty} e^{lu} e^{-(\ln q^{-1})u} g\big(u, y_2(u), y_2(u+1)\big) du. \tag{9}$$

Из ограниченности решения $y_2(s)$, как и в линейном случае, получаем равенство $y_2(s) = w(s) + O\big(e^{-(\ln q^{-1})s}\big)$, $s \to +\infty$, где $w(s)$ — непрерывная 1-периодическая функция, и формулу

$$w(s) = y_2(s) - \sum_{m=0}^{\infty} e^{-l(s+m)} \int\limits_{s+m}^{+\infty} e^{lu} e^{-(\ln q^{-1})u} g\big(u, y_2(u), y_2(u+1)\big) du,$$

из которой следует непрерывная дифференцируемость $w(s)$.

Примем эту формулу как отправной пункт дальнейших рассуждений, т. е. будем полагать равенство

$$y_2(s) = w(s) + \sum_{m=0}^{\infty} e^{-l(s+m)} \int\limits_{s+m}^{+\infty} e^{lu} e^{-(\ln q^{-1})u} g\big(u, y_2(u), y_2(u+1)\big) du, \tag{10}$$

где $w(s)$ — непрерывно дифференцируемая 1-периодическая функция, интегральным уравнением для новой искомой функции $y_2(s)$.

Для непрерывной периодической функции выполняется оценка $\sup\limits_{s \in \mathrm{R}} |w(s)| \leq M_{28}$. Определим пространство функций

$$H \stackrel{\mathrm{df}}{=} \left\{ y(s) \middle| \, y(s) \in C\left[s_0, +\infty\right), \ \sup_{s \geq s_0} |y(s)| \leq M_{28} + 1 \right\}$$

и для $y_2(s) \in H$ — оператор

$$Ty_2(s) \stackrel{\mathrm{df}}{=} w(s) + \sum_{m=0}^{\infty} e^{-l(s+m)} \int\limits_{s+m}^{+\infty} e^{lu} e^{-(\ln q^{-1})u} g\big(u, y_2(u), y_2(u+1)\big) du.$$

Для $y_2(s) \in H$ оценим суперпозицию

$$|Ty_2(s)| \leq |w(s)| + \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(\mathrm{Re}l)(s+m)} \int\limits_{s+m}^{+\infty} e^{(\mathrm{Re}l)u} e^{-(\ln q^{-1})u} \big| g\left(u, y_2(u), y_2(u+1)\right) \big| du \leq$$

$$\leq M_{28} + \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(\mathrm{Re}l)(s+m)} \int\limits_{s+m}^{+\infty} e^{(\mathrm{Re}l)u} e^{-(\ln q^{-1})u} M_{29} du =$$

$$= M_{28} + e^{-(\ln q^{-1})s} \frac{M_{29}}{-\mathrm{Re}l + \ln q^{-1}} \frac{1}{1-q} \leq$$

$$\leq M_{28} + e^{-(\ln q^{-1})s_0} \frac{M_{29}}{-\mathrm{Re}l + \ln q^{-1}} \frac{1}{1-q}, \quad s \geq s_0,$$

где число M_{29} не зависит от $y_2(s)$. Из последнего неравенства получаем абсолютную и равномерную сходимость ряда на полуоси $s \geq s_0$, т. е. непрерывность функции $Ty_2(s)$, и если s_0 достаточно велико для выполнения неравенства

$$e^{-(\ln q^{-1})s_0} \frac{M_{29}}{-\mathrm{Re}l + \ln q^{-1}} \frac{1}{1-q} \leq 1,$$

то $|Ty_2(s)| \leq M_{28} + 1$ и $Ty_2(s) \in H$. Для $y_{2,1}(s) \in H$ и $y_{2,2}(s) \in H$ оценим разность

$$\big|Ty_{2,1}(s) - Ty_{2,2}(s)\big| \leq$$

$$\leq \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(\mathrm{Re}l)(s+m)} \int\limits_{s+m}^{+\infty} e^{\left(\mathrm{Re}l - \ln q^{-1}\right)u} \Big| g\left(u, y_{2,1}(u), y_{2,1}(u+1)\right) -$$

$$- g\left(u, y_{2,2}(u), y_{2,2}(u+1)\right) \Big| du \leq$$

$$\leq \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(\mathrm{Re}l)(s+m)} \int\limits_{s+m}^{+\infty} e^{\left(\mathrm{Re}l - \ln q^{-1}\right)u} \left\{ (\ln q^{-1}) \left(|a| + h\left(M_{28}+1\right)\right) |y_{2,1}(u) - y_{2,2}(u)| + \right.$$

$$\left. + (\ln q^{-1}) \left(|b| + h\left(M_{28}+1\right)\right) \left|c^{-1}\right| q \left|y_{2,1}(u+1) - y_{2,2}(u+1)\right| \right\} du \leq$$

$$\leq e^{-(\ln q^{-1})s} \frac{1}{-\mathrm{Re}l + \ln q^{-1}} \frac{1}{1-q} \times$$

$$\times (\ln q^{-1}) \left\{ \left(|a| + h\left(M_{28}+1\right)\right) + \left(|b| + h\left(M_{28}+1\right)\right) \left|c^{-1}\right| q \right\} \sup_{u \geq s_0} |y_{2,1}(u) - y_{2,2}(u)| \leq$$

$$\leq e^{-(\ln q^{-1})s_0} \frac{1}{-\mathrm{Rel} + \ln q^{-1}} \frac{1}{1-q} \times$$

$$\times (\ln q^{-1}) \left\{ (|a| + h(M_{28}+1)) + (|b| + h(M_{28}+1)) \left|c^{-1}\right| q \right\} \sup_{u \geq s_0} |y_{2,1}(u) - y_{2,2}(u)| .$$

Отсюда имеем

$$\sup_{s \geq s_0} |Ty_{2,1}(s) - Ty_{2,2}(s)| \leq e^{-(\ln q^{-1})s_0} \frac{1}{-\mathrm{Rel} + \ln q^{-1}} \frac{1}{1-q} (\ln q^{-1}) \times$$

$$\times \left\{ (|a| + h(M_{28}+1)) + (|b| + h(M_{28}+1)) \left|c^{-1}\right| q \right\}$$

$$\times \sup_{u \geq s_0} |y_{2,1}(u) - y_{2,2}(u)| .$$

Если s_0 достаточно велико для выполнения неравенства

$$e^{-(\ln q^{-1})s_0} \frac{1}{-\mathrm{Rel} + \ln q^{-1}} \frac{1}{1-q} (\ln q^{-1}) \left\{ (|a| + h(M_{28}+1)) + (|b| + h(M_{28}+1)) \left|c^{-1}\right| q \right\} < 1$$

то $T\colon H \to H$ — оператор сжатия относительно равномерной нормы.

Последовательность $y_{2,0}(s) = w(s),\ y_{2,n}(s) = T^n w(s),\ n \geq 0,$ фундаментальна и

$$\sup_{s \geq s_0} \left| y_{2,n}(s) - y_{2,\infty}(s) \right| \to 0, \quad n \to +\infty,$$

где $y_{2,\infty}(s) \in H$. Следовательно, $y_{2,\infty}(s)$ — решение уравнения (10).

Предположим, что существует еще одно ограниченное решение $\bar{y}_2(s)$ уравнения (10). Тогда

$$\sup_{s \geq s_0} |y_{2,\infty}(s)| + \sup_{s \geq s_0} |\bar{y}_2(s)| \leq M_{30}$$

и

$$\left| y_{2,\infty}(s) - \bar{y}_2(s) \right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(\mathrm{Rel})(s+m)} \times$$

$$\times \int\limits_{s+m}^{+\infty} e^{\left(\mathrm{Rel} - \ln q^{-1}\right)u} \left| g(u, y_{2,\infty}(u), y_{2,\infty}(u+1)) - g\big(u, \bar{y}_2(u), \bar{y}_2(u+1)\big) \right| du \leq$$

$$\leq e^{-(\ln q^{-1})s_0} \frac{1}{-\mathrm{Rel} + \ln q^{-1}} \frac{1}{1-q} \times$$

$$\times (\ln q^{-1}) \left\{ (|a| + h(M_{30})) + (|b| + h(M_{30})) \left|c^{-1}\right| q \right\} \sup_{u \geq s_0} |y_{2,\infty}(u) - \bar{y}_2(u)| ,$$

$$\sup_{s \geq s_0} |y_{2,\infty}(s) - \bar{y}_2(s)| \leq e^{-(\ln q^{-1})s_0} \frac{1}{-\mathrm{Rel} + \ln q^{-1}} \frac{1}{1-q} \times$$

$$\times (\ln q^{-1}) \left\{ (|a| + h(M_{30})) + (|b| + h(M_{30})) \left|c^{-1}\right| q \right\} \sup_{u \geq s_0} |y_{2,\infty}(u) - \bar{y}_2(u)| .$$

Если s_0 велико и

$$e^{-(\ln q^{-1})s_0}\frac{1}{-\mathrm{Re}l+\ln q^{-1}}\frac{1}{1-q}(\ln q^{-1})\Big\{\,(|a|+h\,(M_{30}))+(|b|+h\,(M_{30}))\left|c^{-1}\right|q\Big\}<1,$$

то $y_{2,\infty}(s)\equiv\bar{y}_2(s)$.

Из (10) следует непрерывная дифференцируемость решения $y_{2,\infty}(s)$. Если от тождества (10) перейти к равенству (9) и продифференцировать его, то можно убедиться, что формула $x\big(e^{-s\ln q^{-1}}\big)=e^{ls}y_{2,\infty}(s)$ определяет решение уравнения (7).

Теорема 2 доказана.

Литература

1. *Kato T., McLeod J. B.* The functional-differential equation $y'(x)=ay(\lambda x)+by(x)$ // Bull. Amer. Math. Soc. – 1971. – **77**. – P. 89 – 937.
2. *de Bruijn N. G.* The difference-differential equation $F'(x)=e^{\alpha x+\beta}F(x-1)$ I, II // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 56. Indag. Math. – 1953. – **15**. – P. 449 – 464.
3. *Frederickson P. O.* Series solutions for certain functional-differential equations // Lect. Notes. Math. – 1971. – **243**. – P. 249 – 254.
4. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1974. – 192 с.
5. *Дерфель Г. А.* Вероятностный метод исследования одного класса дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 10. – С. 1483 – 1491.
6. *Полищук В. М., Шарковский А. Н.* Представление решений линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения. – 1973. – **9**, № 9. – С. 1627 – 1645.
7. *Frederickson P. O.* Global solutions to certain nonlinear functional differential equations // J. Math. Anal. Appl. – 1971. – **33**. – P. 355 – 358.
8. *Gumovski I., Mira C.* Recurrences and discrete dynamic systems // Lect. Notes. Math. – 1980. – **809**. – 267 p.
9. *Бельский Д. В., Пелюх Г. П.* Об асимптотических свойствах решений одного дифференциально-функционального уравнения с линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. – 2013. – **16**, № 3. – С. 291 – 313.
10. *Пелюх Г. П., Бельский Д. В.* Об асимптотических свойствах решений линейного дифференциально-функционального уравнения нейтрального типа с постоянными коэффициентами и линейно преобразованным аргументом // Нелінійні коливання. – 2012. – **15**, № 4. – С. 466 – 493.
11. *Пелюх Г. П.* Об асимптотических свойствах решений систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2003. – **38**, № 1. – С. 1 – 5.

Получено 15.11.15,
после доработки — 26.09.17