УДК 517.929

АСИМПТОТИЧНІ ГРАНИЦІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЛІНІЙНИМИ Й ПОСТІЙНИМИ ЗАПІЗНЕННЯМИ

Г. П. Пелюх, Д. В. Бельський

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: grygor@imath.kiev.ua
oiop120@gmail.com

New properties of solutions of linear systems of functional-differential equations with linear and constant delays are found.

Одержано нові властивості розв'язків лінійних систем диференціально-функціональних рівнянь із лінійними та постійними запізненнями.

У першій частині цієї статті розглянуто систему рівнянь

$$x'(t) = Ax(t) + Bx(qt) + \sum_{i=1}^{m} C_i x'(q_i t) + f(t), \tag{1}$$

де $A,\ B,\ C_i$ — комплексні $(p \times p)$-матриці, $0 < q,\ q_i < 1$, яка при $C_i = 0$ і $f = 0$ вивчалася в [1]. Надалі числа M_i — невід'ємні сталі, асимптотичний символ O має аргумент, що прямує до нескінченності, і якщо $x = (x_1, \ldots, x_p)^T$, тоді $\|x\| = \max\{|x_i| : 1 \le i \le p\}$, $\|A\| = \max\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$.

Доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай виконуються такі умови:*

1) всі власні значення матриці A мають від'ємні дійсні частини і $\left\|e^{At}\right\| \le M_1 e^{at},\ a < 0,$ $t \ge 0$, матриця $A^{-1}B$ діагоналізовна з найбільшим по модулю власним значенням l;

2) для параметра $j \in \mathrm{N} \bigcup \{0\}$ виконується нерівність

$$v_0 \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\ln|l|}{\ln q^{-1}} \ge v_{\min} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\ln\left(\sum_{i=1}^{m} \|C_i\| q_i^{j-1} + M_1 \left|a^{-1}\right| \left(\|B\| q^j + \sum_{i=1}^{m} \|AC_i\| q_i^{j-1}\right)\right)}{\ln q^{-1}};$$

3) функція $f(t)$ належить $C^{j+1}[1, +\infty)$ і $f^{(m)}(t) = O\left(t^{\alpha - m}\right),\ \alpha \in \mathrm{R},\ m = \overline{0, j+1}$.

Тоді для кожного $j + 2$ разів неперервно диференційовного розв'язку $x(t)$ системи (1) виконуються оцінки:

l) якщо $\alpha < v_0$, тоді $x(t) = O\left(t^{v_0}\right)$;

ll) якщо $\alpha = v_0$, тоді $x(t) = O\left(t^{v_0} \ln t\right)$;

lll) якщо $\alpha > v_0$, тоді $x(t) = O\left(t^{\alpha}\right)$.

Доведення. Продиференціюємо систему (1) j разів:

$$x^{(j+1)}(t) = Ax^{(j)}(t) + Bq^j x^{(j)}(qt) + \sum_{i=1}^{m} C_i q_i^j x^{(j+1)}(q_i t) + f^{(j)}(t).$$

Зробимо заміну змінних $x^{(j)}(t) = t^v y(t)$, де $v \overset{\mathrm{df}}{=} \max\{v_{\min} + \varepsilon, \alpha - j\}$, $\varepsilon > 0$, — довільне число:

$$y(t) = e^{A(t-t_0)}\left\{y(t_0) - \sum_{i=1}^{m} C_i q_i^{j+v-1} y(q_i t_0)\right\} + \sum_{i=1}^{m} C_i q_i^{j+v-1} y(q_i t) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}\left\{Bq^{j+v} y(qs) + \sum_{i=1}^{m} AC_i q_i^{j+v-1} y(q_i s) - \frac{v}{s}\, y(s) + \frac{v}{s} \sum_{i=1}^{m} C_i q_i^{j+v-1} y(q_i s)\right\} ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)} s^{-v} f^{(j)}(s) ds, \quad t_0 \geq 1.$$

З урахуванням нерівності $v \geq \alpha - j$ і умов 1, 3 оцінимо $\|y(t)\|$ при $t_0 \leq t \leq T$:

$$\max_{t_0 \leq t \leq T} \|y(t)\| \leq M_2 + \left(\sum_{i=1}^{m} \|C_i\| q_i^{j+v-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{M_1}{|a|}\left\{\|B\| q^{j+v} + \sum_{i=1}^{m} \|AC_i\| q_i^{j+v-1} + \frac{|v|}{t_0} + \frac{|v|}{t_0} \sum_{i=1}^{m} \|C_i\| q_i^{j+v-1}\right\}\right) \max_{t_0 \leq t \leq T} \|y(t)\|.$$

Оскільки $v > v_{\min}$ і t_0 можна вибрати досить великим, функція $y(t)$ обмежена і $x^{(j)}(t) = O(t^v)$.

У рівнянні

$$x^{(j-1)}(t) + A^{-1}Bq^{j-1}x^{(j-1)}(qt) =$$

$$= -A^{-1}\sum_{i=1}^{m} C_i q_i^{j-1} x^{(j)}(q_i t) + A^{-1}x^{(j)}(t) - A^{-1}f^{(j-1)}(t) \overset{\mathrm{df}}{=} g(t)$$

зробимо заміну $x^{(j-1)}(t) = t^{v_*} y(t)$, де $v_* \geq \max\{v, \alpha - (j-1)\}$ і $v_* > \dfrac{\ln\left(\left|lq^{j-1}\right|\right)}{\ln q^{-1}} = v_0 - (j-1)$. Тоді отримуємо

$$y(t) = -A^{-1}Bq^{j-1+v_*} y(qt) + t^{-v_*} g(t).$$

Будемо вважати, що базис обраний таким чином, що матриця $A^{-1}B$ діагональна. Тоді $\left\|A^{-1}Bq^{j-1+v_*}\right\| < 1$ і неоднорідність $t^{-v_*}g(t)$ обмежена, тому функція $y(t)$ теж обмежена і $x^{(j-1)}(t) = O(t^{v_*})$, де

$$v_* = \max\{v_0 - (j-1) + \varepsilon, \max\{v_{\min} + \varepsilon, \alpha - j\}, \alpha - (j-1)\} =$$

$$= \max\{v_0 - (j-1) + \varepsilon, v_{\min} + \varepsilon, \alpha - (j-1)\}.$$

Повторюючи цей процес, переконуємося, що

$$x^{(j-2)}(t) = O\left(t^{\max\{v_0 - (j-2) + \varepsilon, \max\{v_0 - (j-1) + \varepsilon, v_{\min} + \varepsilon, \alpha - (j-1)\}, \alpha - (j-2)\}}\right) =$$

$$= O\left(t^{\max\{v_0-(j-2)+\varepsilon, v_{\min}+\varepsilon, \alpha-(j-2)\}}\right).$$

Діючи таким чином декілька разів, отримуємо (за умовою теореми $v_0 \geq v_{\min}$)

$$x(t) = O\left(t^{\max\{v_0+\varepsilon, v_{\min}+\varepsilon, \alpha\}}\right) = O\left(t^{\max\{v_0, \alpha\}+\varepsilon}\right).$$

Аналогічно для похідної справедлива оцінка

$$x'(t) = O\left(t^{\max\{v_0-1+\varepsilon, \alpha-1\}}\right) = O\left(t^{\max\{v_0, \alpha\}+\varepsilon-1}\right).$$

Визначимо для стислості $h \overset{\text{df}}{=} \max\{v_0, \alpha\} + \varepsilon,\ \mu \overset{\text{df}}{=} \ln q,\ \mu_i \overset{\text{df}}{=} \ln q_i$ і зробимо в системі (1) заміну змінних $t = e^s,\ W(s) = t^{-h} x(t)$. Тоді

$$W(s) - \left(-A^{-1}Bq^h\right) W(s+\mu) =$$

$$= A^{-1}\left(hW(s) + W'(s) - \sum_{i=1}^{m} C_i \left\{h e^{h\mu_i} W(s+\mu_i) + e^{h\mu_i} W'(s+\mu_i)\right\} e^{-\mu_i}\right) e^{-s} -$$

$$- A^{-1} e^{-hs} f(e^s).$$

Зауважимо, що $W(s)$ і $W'(s)$ — обмежені функції. Нехай $L \overset{\text{df}}{=} -A^{-1}Bq^h$ і

$$G(s) \overset{\text{df}}{=} A^{-1}\left(hW(s) + W'(s) - \sum_{i=1}^{m} C_i \left\{h e^{h\mu_i} W(s+\mu_i) + e^{h\mu_i} W'(s+\mu_i)\right\} e^{-\mu_i}\right) e^{-s} -$$

$$- A^{-1} e^{-hs} f\left(e^s\right).$$

Тоді

$$W(s) - LW(s+\mu) = G(s),$$

де $\|L\| = e^{(h-v_0)\mu},\ \|G(s)\| \leq M_3 e^{-s} + M_4 e^{(\alpha-h)s},\ s \geq s_0 > 0$. Для закінчення доведення теореми 1 треба повторити міркування для аналогічного скалярного рівняння (3.7) з [2].

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Якщо матриця A діагоналізовна, всі її власні значення, наприклад, $\lambda_i(A)$, $1 \leq i \leq p$, мають додатні дійсні частини такі, що*

$$a_{\min} \overset{\text{df}}{=} \min\{\operatorname{Re}\lambda_i(A) : 1 \leq i \leq p\} > q_{\max} \max\{\operatorname{Re}\lambda_i(A) : 1 \leq i \leq p\} \overset{\text{df}}{=} q_{\max} a_{\max},$$

де $q_{\max} \overset{\text{df}}{=} \max\{q, q_i\}$, і неоднорідність $f(t) = O(e^{\alpha t})$, $\alpha < a_{\min}$, то для кожного неперервно диференційовного розв'язку $x(t)$ системи (1) існує границя $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-At}x(t)$.

Доведення. Запишемо систему (1) в інтегральній формі

$$e^{-At}x(t) = e^{-At_0}x(t_0) + \sum_{i=1}^{m} e^{-At} C_i q_i^{-1} x(q_i t) - \sum_{i=1}^{m} e^{-At_0} C_i q_i^{-1} x(q_i t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} e^{-As} Bx(qs)ds + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t} e^{-As} A C_i q_i^{-1} x(q_i s) ds + \int_{t_0}^{t} e^{-As} f(s) ds.$$

Будемо вважати, що базис обрано таким чином, що матриця A діагональна. Тоді з останньої тотожності одержуємо

$$e^{-a_{\max}t}\left\|x(t)\right\| \leq \left\|e^{-At}x(t)\right\| \leq M_5 + \sum_{i=1}^{m} e^{-(a_{\min}-a_{\max}q_i)t}\left\|C_i\right\| q_i^{-1} e^{-a_{\max}q_i t}\left\|x\left(q_i t\right)\right\| +$$

$$+\int_{t_0}^{t} e^{-(a_{\min}-a_{\max}q)s}\|B\| e^{-a_{\max}qs}\|x(qs)\|ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{t} e^{-(a_{\min}-a_{\max}q_i)s}\|AC_i\| q_i^{-1} e^{-a_{\max}q_i s}\|x(q_i s)\|ds.$$

Оцінимо функцію $e^{-a_{\max}t}\|x(t)\|$ на відрізку $t_0 \leq t \leq T$:

$$\max_{t_0\leq t\leq T}\left(e^{-a_{\max}t}\left\|x\left(t\right)\right\|\right) \leq M_6 + \left(\frac{e^{-(a_{\min}-a_{\max}q)t_0}\left\|B\right\|}{a_{\min}-a_{\max}q}\right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{m}\frac{e^{-(a_{\min}-a_{\max}q_i)t_0}}{q_i}\left(\left\|C_i\right\| + \frac{\left\|AC_i\right\|}{a_{\min}-a_{\max}q_i}\right)\right)\times$$

$$\times \max_{t_0\leq t\leq T}\left(e^{-a_{\max}t}\left\|x\left(t\right)\right\|\right).$$

Оскільки $a_{\min} > q_{\max}a_{\max}$ і t_0 можна вибрати досить великим, функція $e^{-a_{\max}t}\|x(t)\|$ обмежена. Тому з рівності

$$e^{-At_2}x(t_2) - e^{-At_1}x(t_1) = \sum_{i=1}^{m} e^{-At_2}C_i q_i^{-1}x(q_i t_2) - \sum_{i=1}^{m} e^{-At_1}C_i q_i^{-1}x(q_i t_1)+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} e^{-As}Bx(qs)ds + \sum_{i=1}^{m}\int_{t_1}^{t_2} e^{-As}AC_i q_i^{-1}x(q_i s)ds + \int_{t_1}^{t_2} e^{-As}f(s)ds$$

отримуємо існування границі $\lim_{t\to+\infty} e^{-At}x(t)$.

Теорему 2 доведено.

Теорема 1 надає ще одне доведення п. (i) теореми 1 з [1]. В [3] вивчалися аналітичні розв'язки лінійних систем диференціальних рівнянь із нескінченним числом лінійних запізнень. В [4, 5] досліджувалися нелінійні системи диференціальних рівнянь із одним лінійним запізненням.

Далі у цій статті розглядатимемо систему рівнянь

$$x'(t) = B_0(t)x(t) + B_1(t)x(t-1) + \ldots + B_m(t)x(t-m)+$$

$$+ A_1(t)x'(t-1) + \ldots + A_l(t)x'(t-l) + f(t), \tag{2}$$

де $A_j(t) \in C^1[0,+\infty)$, $j = \overline{1,l}$, $B_k(t) \in C[0,+\infty)$, $k = \overline{0,m}$, — комплексні періодичні $(p \times p)$-вимірні матриці з періодом 1, функція $f: [0,+\infty) \to \mathrm{C}^p$ неперервна, $m \in \mathrm{N}\bigcup\{0\} = \mathrm{Z}_+$, $l \in \mathrm{N}$, з початковою умовою

$$x(t) = \varphi(t) \in C[-r,0] \bigcap_{k=1}^{r} C^1[-k,-k+1], \quad t \in [-r,0], \qquad r \overset{\mathrm{df}}{=} \max\{m,l\}. \tag{3}$$

Розв'язок $x(t)$ системи (2) — неперервна кусково-неперервно диференційовна функція, у якої в кожній точці $t > -r$ існують лівостороння й правостороння похідні; якщо під похідною в системі (2) розуміти правосторонню похідну, то розв'язок $x(t)$ задовольняє рівність (2) для всіх $t \geq 0$.

Детальний огляд літератури, присвяченої методам дослідження системи (2), можна знайти в [6] (розд. 4, 5) та [7] (додаток). Результати, близькі до отриманих у цій статті, опубліковані в [8]. Незважаючи на викладене і на широкі застосування, які знаходять такі рівняння в різних областях науки і техніки, багато питань теорії систем диференціально-різницевих рівнянь вигляду (2) вивчені мало. Перш за все, це стосується асимптотичних властивостей розв'язків цієї системи в околі особливої точки $t = +\infty$. Завдяки цьому основною метою цієї статті є пошук нових достатніх умов асимптотичної стійкості розв'язків системи (2).

Далі буде потрібна така лема.

Лема. *Якщо в системі (2) неоднорідність обмежена деякою експонентою, то розв'язок цієї системи і його правостороння похідна теж обмежені деякою експонентою.*

Наслідуючи [7, с. 502] або [9], визначимо для $\tau \in [0,1)$, $n = -r, -r+1, \ldots$ функції $x_n(\tau) \overset{\mathrm{df}}{=} x(n+\tau)$ і для $n = 0, 1, \ldots$ функції $f_n(\tau) \overset{\mathrm{df}}{=} f(n+\tau)$. Тоді з (2) отримуємо

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} x_n'(\tau) z^n = B_0(\tau) \sum_{n=0}^{+\infty} x_n(\tau) z^n + B_1(\tau) z \sum_{n=0}^{+\infty} x_n(\tau) z^n + B_1(\tau) x_{-1}(\tau) + \ldots \\
\ldots + B_m(\tau) z^m \sum_{n=0}^{+\infty} x_n(\tau) z^n + B_m(\tau) \left(x_{-m}(\tau) + \ldots + x_{-1}(\tau) z^{m-1} \right) + \\
+ A_1(\tau) z \sum_{n=0}^{+\infty} x_n'(\tau) z^n + A_1(\tau) x_{-1}'(\tau) + \ldots + A_l(\tau) z^l \sum_{n=0}^{+\infty} x_n'(\tau) z^n + \\
+ A_l(\tau) \left(x_{-l}'(\tau) + \ldots + x_{-1}'(\tau) z^{l-1} \right) + \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(\tau) z^n.
\end{aligned}$$

Нехай $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n(\tau) z^n \overset{\mathrm{df}}{=} X(\tau, z)$ і $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(\tau) z^n \overset{\mathrm{df}}{=} F(\tau, z)$. Припустимо, що для неоднорідності справедлива оцінка

$$\|f(t)\| \leq M_7 e^{\gamma t}, \quad t \geq 0, \tag{4}$$

де M_7 і γ — деякі константи. Тоді розв'язок $x(t)$ і його правостороння похідна згідно з лемою також обмежені деякою експонентою, і в околі нуля ряди $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n(\tau) z^n$

і $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n'(\tau)z^n$ збігаються абсолютно й рівномірно, тобто почленне диференціювання можливе. Тому

$$X_\tau'(\tau,z) = \left(I - A_1(\tau)z - \ldots - A_l(\tau)z^l\right)^{-1}\left(B_0(\tau) + B_1(\tau)z + \ldots + B_m(\tau)z^m\right)X(\tau,z) +$$

$$+\left(I - A_1(\tau)z - \ldots - A_l(\tau)z^l\right)^{-1}\times$$

$$\times\Bigg(B_1(\tau)x_{-1}(\tau) + \ldots + B_m(\tau)\left(x_{-m}(\tau) + \ldots + x_{-1}(\tau)z^{m-1}\right) +$$

$$+A_1(\tau)x_{-1}'(\tau) + \ldots + A_l(\tau)\left(x_{-l}'(\tau) + \ldots + x_{-1}'(\tau)z^{l-1}\right) + F(\tau,z)\Bigg).$$

Скорочено позначимо

$$P(\tau,z) \overset{\mathrm{df}}{=} \left(I - A_1(\tau)z - \ldots - A_l(\tau)z^l\right)^{-1}\left(B_0(\tau) + B_1(\tau)z + \ldots + B_m(\tau)z^m\right).$$

Тоді, як відомо, фундаментальна матриця останньої системи набирає вигляду

$$U(\tau,z) = I + \int_0^\tau P(s,z)ds + \int_0^\tau P(s,z)\int_0^s P(\eta,z)d\eta\,ds + \ldots.$$

Звідси отримуємо

$$X(\tau,z) = U(\tau,z)X(0,z) + U(\tau,z)\int_0^\tau U^{-1}(s,z)\left(I - A_1(s)z - \ldots - A_l(s)z^l\right)^{-1}\times$$

$$\times\Bigg(B_1(s)x_{-1}(s) + \ldots + B_m(s)\left(x_{-m}(s) + \ldots + x_{-1}(s)z^{m-1}\right) +$$

$$+A_1(s)x_{-1}'(s) + \ldots + A_l(s)\left(x_{-l}'(s) + \ldots + x_{-1}'(s)z^{l-1}\right) + F(s,z)\Bigg)ds. \qquad (5)$$

Оскільки $x_n(\tau) \to x_{n+1}(0),\ \tau \to 1-0,\ n = 0,1,\ldots,$ то при $\tau \to 1-0$ маємо

$$X(\tau,z) \to \frac{1}{z}\left(X(0,z) - x(0)\right),$$

$$X(0,z) = (I - zU(1,z))^{-1}\Bigg\{x(0) + zU(1,z)\int_0^1 U^{-1}(s,z)\left(I - A_1(s)z - \ldots - A_l(s)z^l\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(B_1(s)x_{-1}(s) + \ldots + B_m(s)\left(x_{-m}(s) + \ldots + x_{-1}(s)z^{m-1}\right) +\right.$$

$$\left.+A_1(s)x_{-1}'(s) + \ldots + A_l(s)\left(x_{-l}'(s) + \ldots + x_{-1}'(s)z^{l-1}\right) + F(s,z)\right)ds\Bigg\}. \qquad (6)$$

Зауважимо, що

$$\det U(\tau, z) = \exp \int\limits_0^\tau trP(s, z)ds.$$

Тобто властивості неперервності та аналітичності по z функції $P(\tau, z)$ переносяться на функції $U(\tau, z)$ і $U^{-1}(\tau, z)$.

З (4) випливає, що функція $F(\tau, z)$ аналітична в колі $|z| < e^{-\gamma}$ при будь-якому $\tau \in [0, 1)$. Якщо додатково припустити, що визначник $\det\left(I - A_1(\tau)z - \ldots - A_l(\tau)z^l\right)$ не має нулів у колі $|z| < R_1$ при будь-якому $\tau \in [0, 1)$, матрична функція $(I - zU(1, z))^{-1}$ аналітична в колі $|z| < R_2$ і для простоти довизначити функції $x'_{-k}(s),\ k = \overline{1, l},\ x_{-j}(s),\ j = \overline{1, m},\ f_n(s),$ $n = 0, 1, \ldots$ в точці $s = 1$ як $x'_{-k}(1) = \lim_{s\to 1-0} x'_{-k}(s),\ x_{-j}(1) = \lim_{s\to 1-0} x_{-j}(s),\ f_n(1) =$ $= f(n + 1)$, то з (5), (6) отримуємо, що функція в правій частині рівності (5) неперервна на множині $\tau \in [0, 1],\ |z| < \min\{R_1, R_2, e^{-\gamma}\}$ і аналітична по z у зазначеному колі. Таким чином, для будь-якого $R < \min\{R_1, R_2, e^{-\gamma}\}$ виконується оцінка $\|x_n(\tau)\| \leq \dfrac{M_8(R, \varphi, f)}{R^n}$ при $\forall n \geq 0\ \forall \tau \in [0, 1)$, тобто

$$\|x(t)\| \leq M_9(R, \varphi, f) e^{\left(\ln R^{-1}\right)t}, \quad t \geq 0. \tag{7}$$

Якщо $f(t) \equiv 0$, то останню оцінку можна уточнити:

$$\|x(t)\| \leq M_{10}(R) \max\left\{\sup_{t\in[-r,0]} \|\varphi(t)\|, \sup_{t\in[-r,0], -t\notin \mathrm{Z}_+} \|\varphi'(t)\|\right\} e^{\left(\ln R^{-1}\right)t}, \quad t \geq 0. \tag{8}$$

Отже, довели таку теорему.

Теорема 3. *Якщо визначник* $\det\left(I - A_1(\tau)z - \ldots - A_l(\tau)z^l\right)$ *не має нулів у колі* $|z| < R_1$ *при будь-якому* $\tau \in [0, 1]$, *матрична функція* $(I - zU(1, z))^{-1}$ *аналітична в колі* $|z| < R_2$ *і для неоднорідності* $f(t)$ *справедлива оцінка (4), то для розв'язку початкової задачі (2), (3) виконуються оцінки (7), (8).*

У разі постійних матриць $A_j,\ j = \overline{1, l},\ B_k,\ k = \overline{0, m}$, з експоненційної стійкості однорідної системи (2) отримуємо, що визначник $\det\left(I - A_1 z - \ldots - A_l z^l\right)$ не має нулів у колі $|z| \leq 1$, оскільки в іншому випадку в околі точки $\lambda_n = \lambda_0 + 2\pi ni,\ n \in \mathrm{N}\bigcup\{0\}$, такої, що $\det\left(I - A_1 e^{-\lambda_0} - \ldots - A_l e^{-\lambda_0 l}\right) = 0$ і $\mathrm{Re}\,\lambda_0 \geq 0$, визначник

$$\det\left(\lambda\left(I - A_1 e^{-\lambda} - \ldots - A_l e^{-\lambda l}\right) - B_0 - B_1 e^{-\lambda} - \ldots - B_m e^{-\lambda m}\right) =$$

$$= \lambda^p \det\left(I - A_1 e^{-\lambda} - \ldots - A_l e^{-\lambda l} - \frac{1}{\lambda}\left(B_0 + B_1 e^{-\lambda} + \ldots + B_m e^{-\lambda m}\right)\right)$$

дорівнює нулю відповідно до теореми Руше при досить великому n. Тобто однорідна система (2) має розв'язок $x(t) = ve^{\lambda_* t},\ v \neq 0$, де $\mathrm{Re}\,\lambda_* > -\varepsilon$ і ε — як завгодно мала додатна величина.

Більш того, якщо вибрати як початкову функцію матрицю

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0, & -r \leq t < 0, \\ I, & t = 0, \end{cases}$$

то відповідний розв'язок однорідної системи (2), скажімо $X_0(t)$, буде мати твірну функцію

$$X_0(0,z) = \left(I - ze^{\left(I - A_1 z - \ldots - A_l z^l\right)^{-1}(B_0 + B_1 z + \ldots + B_m z^m)}\right)^{-1}.$$

З експоненційної стійкості однорідної системи (2) випливає аналітичність функції $X_0(0,z)$ в деякому колі $|z| < R$, де $R > 1$.

Таким чином, довели таке твердження.

Наслідок. *У разі постійних матриць A_j, $j = \overline{1,l}$, B_k, $k = \overline{0,m}$, експоненціальна стійкість однорідної системи (2) має місце тоді і тільки тоді, коли визначник*

$$\det\left(I - A_1 z - \ldots - A_l z^l\right)$$

не має нулів у колі $|z| \le 1$, і матрична функція $\left(I - ze^{\left(I - A_1 z - \ldots - A_l z^l\right)^{-1}(B_0 + B_1 z + \ldots + B_m z^m)}\right)^{-1}$ аналітична в деякому колі $|z| < R$, де $R > 1$.

Зауважимо, що для визначення експоненційної стійкості автономної однорідної системи (2) з вимірністю $p < 5$ визначник $\det\left(I - ze^{\left(I - A_1 z - \ldots - A_l z^l\right)^{-1}(B_0 + B_1 z + \ldots + B_m z^m)}\right)$ можна обчислити в одиничному колі $|z| \le 1$, використовуючи власні числа матриці $\left(I - A_1 z - \ldots - A_l z^l\right)^{-1}(B_0 + B_1 z + \ldots + B_m z^m)$, і, таким чином, звести перевірку критерію експоненційної стійкості до простої комп'ютерної програми. При тому, що задача пошуку коренів характеристичного рівняння для диференціально-різницевих систем відома своєю складністю навіть у разі найпростіших скалярних диференціально-різницевих рівнянь.

У скалярному випадку теорема 3 і її наслідок узгоджуються з результатом, отриманим у [7, с. 513] (теорема Д.8).

Приклад. Розглянемо частковий випадок рівняння Матьє [6, с. 142]

$$y''(t) + cy'(t) + (a + \varepsilon_1 \cos(2\pi t))\, y(t) = (b + \varepsilon_2 \cos(2\pi t))\, y(t-1),$$

де a, b, c, $\varepsilon_{1,2}$ — дійсні числа. Для цього запишемо його в матричній формі

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-1),$$

де

$$x = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(a + \varepsilon_1 \cos(2\pi t)) & -c \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b + \varepsilon_2 \cos(2\pi t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Дослідження визначника $\det(I - zU(1,z))$ в одиничному колі $|z| \le 1$ також можна проводити чисельними методами за допомогою ЕОМ.

Література

1. J. Carr, J. Dyson, *The matrix functional differential equation $y'(x) = Ay(\lambda x) + By(x)$*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **75**, № 1, 5 – 22 (1976).
2. Eng-Bin Lim, *Asymptotic bounds of solutions of the functional differential equation $x'(t) = ax(\lambda t) + bx(t) + f(t)$, $0 < \lambda < 1$*, SIAM J. Math. Anal., **9**, № 5, 915 – 920 (1978).
3. Y. Liu, *Asymptotic behaviour of functional-differential equations with proportional time delays*, European J. Appl. Math., **7**, № 1, 11 – 30 (1996).

4. А. М. Самойленко, Г. П. Пелюх, *Ограниченные на всей вещественной оси решения систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений и их свойства*, Укр. мат. журн., **46**, № 6, 737 – 747 (1994).
5. Г. П. Пелюх, Д. В. Бельский, *Об асимптотических свойствах решений систем нелинейных дифференциально-функциональных уравнений с линейно преобразованным аргументом*, Нелін. коливання, **18**, № 2, 149 – 163 (2015).
6. B. Balachandran, T. Kalmá r-Nagy, D. E. Gilsinn (eds.), *Delay differential equations: recent advances and new directions*, Springer-Verlag US (2009).
7. Р. Беллман, К. Л. Кук, *Дифференциально-разностные уравнения*, Мир, Москва (1967).
8. Л. М. Березанский, В. В. Малыгина, В. А. Соколов, *Признаки экспоненциальной устойчивости решений уравнений с ограниченным последействием*, Докл. АН СССР, **289**, № 1, 11 – 14 (1986).
9. А. С. Баландин, В. В. Малыгина, *Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа*, Изв. вузов. Математика, № 7, 17 – 27 (2007).

Одержано 06.12.20