УДК 517.929

ТЕОРЕМИ ПОРІВНЯННЯ З ТЕОРІЇ МОНОТОННИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

Г. П. Пелюх, Д. В. Бельський

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: grygor@imath.kiev.ua
oiop120@gmail.com

New properties of solutions of linear systems of functional-differential equations with a linearly transformed argument are found.

Одержано нові властивості розв'язків лінійних систем диференціально-функціональних рівнянь із лінійно перетвореним аргументом.

У цій статті розглянуто систему рівнянь

$$\xi'(t) = A_1\xi(t) + B_1\xi(qt) + C_1\xi'(qt) + F_1(t), \tag{1}$$

де $A_1,\ B_1,\ C_1$ — дійсні матриці розміру $n\times n,\ 0 < q < 1$, функція $F_1\colon [0,+\infty) \to R^n$ неперервна. Цю систему як окремий випадок вивчено в [1], де отримано асимптотичні оцінки для досить гладких розв'язків. Раніше в [2] (перший приклад) було встановлено взаємозв'язок між гладкістю розв'язків системи (1) та їхньою асимптотичною поведінкою. Тому головною метою статті є знаходження достатніх умов для того, щоб асимптотика досить гладких і неперервних розв'язків збігалася. Для цього застосовано теореми порівняння з теорії монотонних динамічних систем для диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу [3].

Зробимо в системі (1) логарифмічну заміну незалежної змінної $\xi(t) = y\left(\dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right),\ s = \dfrac{\ln t}{\ln q^{-1}},\ \gamma = \ln q^{-1} > 0$:

$$\frac{d}{ds}\left\{y(s) - q^{-1}C_1 y(s-1)\right\} = e^{\gamma s}\gamma\left\{A_1 y(s) + B_1 y(s-1) + F_1\left(e^{\gamma s}\right)\right\}, \tag{2}$$

і перейдемо до аналогічного рівняння

$$\frac{d}{dt}\left\{x(t) - Cx(t-1)\right\} = e^{\gamma t}\left\{Ax(t) + Bx(t-1)\right\} + F(t), \tag{3}$$

де $A,\ B,\ C$ — дійсні матриці розміру $n\times n,\ \gamma > 0$, функція $F\colon R \to R^n$ неперервна.

Дотримуючись визначень і позначень роботи [3], одержуємо $D(\varphi) = \varphi(0) - C\varphi(-1)$, $f(t,\varphi) = e^{\gamma t}\left\{A\varphi(0) + B\varphi(-1)\right\} + F(t),\ \varphi\colon [-1,0] \to R^n,\ \varphi \in C[-1,0] \overset{\mathrm{df}}{=} C_r$, і для $\varphi,\psi \in C_r$ вводимо відношення порядку

$$\varphi \underset{C_r}{\leq} \psi \Leftrightarrow \varphi_i(\theta) \leq \psi_i(\theta) \quad \forall\theta \in [-1,0], \quad i = \overline{1,n},$$

© Г. П. Пелюх, Д. В. Бельський, 2021

для векторів $v, w \in R^n$ визначимо $v \underset{R^n}{\leq} w \Leftrightarrow v_i \leq w_i,\ i = \overline{1, n}$. Тоді

$$\varphi \underset{D}{\leq} \psi \Leftrightarrow \varphi \underset{C_r}{\leq} \psi \wedge\ D(\varphi) \underset{R^n}{\leq} D(\psi).$$

Відношення $<$, $<<$ визначено звичайним способом (див., наприклад, [3; 4, с. 1; 5, с. 241]).

Для перевірки умов (M), (P), (I), (T) з роботи [3] запишемо співвідношення

$$f(t, \psi) - f(t, \varphi) = e^{\gamma t}\big\{A\left(D(\psi) - D(\varphi)\right) + (AC + B)\left[\psi(-1) - \varphi(-1)\right]\big\}$$

і припустимо, що недіагональні елементи матриці A — невід'ємні числа (маємо на увазі лише головну діагональ), всі елементи матриць $C,\ AC + B$ теж невід'ємні. Тоді умови (M) і (P) виконуються. Якщо додатково припустити, що в матриці $AC + B$ немає нульових стовпців, то виконується умова (I). А якщо зробити більш сильне додаткове припущення, що матриця $AC + B$ незвідна, то виконуються умови (I) та (T).

Визначення розв'язку початкової задачі (3), $x(\sigma + \theta) = \varphi(\theta),\ \theta \in [-1, 0],\ \varphi \in C_r,\ \sigma \in R$, і доведення його існування та єдиності є в [3], [6] (розд. 12). Позначимо цей розв'язок символом $x(t; \sigma, \varphi),\ t \in [\sigma - 1, \tau(\sigma, \varphi)),\ \tau(\sigma, \varphi) > \sigma$. Як завжди, $x_t(\sigma, \varphi) = x(t + \theta; \sigma, \varphi)$, $\theta \in [-1, 0]$, тобто $x_t(\sigma, \varphi) \in C_r$.

Теорема. *1) якщо елементи матриці A, які не належать головній діагоналі, і всі елементи матриць $C,\ AC+B$ — невід'ємні числа, то для будь-яких $\sigma \in R,\ \varphi, \psi \in C_r$ таких, що $\varphi \underset{D}{\leq} \psi$, виконується нерівність $x_t(\sigma, \varphi) \underset{D}{\leq} x_t(\sigma, \psi)$ для всіх $t \in [\sigma, \tau^*)$, де $\tau^* = \min\{\tau(\sigma, \varphi), \tau(\sigma, \psi)\}$;*

2) якщо елементи матриці A, які не належать головній діагоналі, і всі елементи матриці C, а також незвідної матриці $AC + B$ — невід'ємні числа, то для будь-яких $\sigma \in R$, $\varphi, \psi \in C_r$ таких, що $\varphi \underset{D}{<} \psi$ і $\tau^* > \sigma + n$, виконуються нерівності $x(t; \sigma, \varphi) \underset{R^n}{<<} x(t; \sigma, \psi)$ і $D(x_t(\sigma, \varphi)) \underset{R^n}{<<} D(x_t(\sigma, \psi))$ для всіх $t \in (\sigma + n, \tau^*)$.

Доведення. З урахуванням зроблених вище зауважень щодо умов (M), (P), (I), (T) з роботи [3] для системи (3) твердження теореми 1) і 2) випливають із леми 3.1 і теореми 3.1 з [3] відповідно.

Теорему доведено.

Позначимо розв'язок початкової задачі (1) $\xi(\theta) = \varphi(\theta),\ \theta \in [q\sigma, \sigma],\ \sigma > 0,\ \varphi \in C[q\sigma, \sigma]$ символом $\xi(t; \sigma, \varphi),\ t \in [q\sigma, \tau(\sigma, \varphi)),\ \tau(\sigma, \varphi) > \sigma$ і з урахуванням (2) переформулюємо теорему для системи (1).

Наслідок. *1) якщо елементи матриці A_1, які не належать головній діагоналі, і всі елементи матриць $C_1,\ q^{-1}A_1C_1 + B_1$ — невід'ємні числа, то для будь-яких $\sigma > 0,\ \varphi, \psi \in C[q\sigma, \sigma]$ таких, що $\varphi(\theta) \underset{R^n}{\leq} \psi(\theta)$ для будь-яких $\theta \in [q\sigma, \sigma]$ і $\varphi(\sigma) - q^{-1}C_1\varphi(q\sigma) \underset{R^n}{\leq} \psi(\sigma) - q^{-1}C_1\psi(q\sigma)$, виконуються нерівності*

$$\xi(t; \sigma, \varphi) \underset{R^n}{\leq} \xi(t; \sigma, \psi) \qquad і \qquad \xi(t; \sigma, \varphi) - q^{-1}C_1\xi(qt; \sigma, \varphi) \underset{R^n}{\leq} \xi(t; \sigma, \psi) - q^{-1}C_1\xi(qt; \sigma, \psi),$$

для всіх $t \in [\sigma, \tau^*)$, де $\tau^* = \min\{\tau(\sigma, \varphi), \tau(\sigma, \psi)\}$;

2) якщо елементи матриці A_1, які не належать головній діагоналі, і всі елементи матриці C_1, а також незвідної матриці $q^{-1}A_1C_1 + B_1$ — невід'ємні числа, то для будь-яких $\sigma > 0$, $\varphi, \psi \in C[q\sigma, \sigma]$ таких, що $\varphi(\theta) \underset{R^n}{\leq} \psi(\theta)$ для будь-яких $\theta \in [q\sigma, \sigma]$, $\varphi(\sigma) - q^{-1}C_1\varphi(q\sigma) \underset{R^n}{\leq} \psi(\sigma) - q^{-1}C_1\psi(q\sigma)$, $\varphi \neq \psi$ і $\tau^* > q^{-n}\sigma$, виконуються нерівності

$$\xi(t; \sigma, \varphi) \underset{R^n}{<<} \xi(t; \sigma, \psi) \qquad і \qquad \xi(t; \sigma, \varphi) - q^{-1}C_1\xi(qt; \sigma, \varphi) \underset{R^n}{<<} \xi(t; \sigma, \psi) - q^{-1}C_1\xi(qt; \sigma, \psi)$$

для всіх $t \in (q^{-n}\sigma, \tau^*)$.

Покажемо, як можна використовувати наслідок для оцінки розв'язків системи (1), на прикладі. Для цього припустимо, що неоднорідність $F_1(t)$ — це аналітична функція в околі нуля, яка зображується в ньому у вигляді степеневого ряду $F_1(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k t^k$. Будемо шукати розв'язок задачі Коші (1) $\xi(0) = \xi_0$ теж у вигляді ряду $\xi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k t^k$. Після його підстановки в (1) отримуємо

$$\xi_{k+1} = (k+1)^{-1}\big(I - q^k C_1\big)^{-1}\Big\{\big(A_1 + q^k B_1\big)\xi_k + f_k\Big\},$$

де $k \geq 0$ і матриці $I - q^k C_1$ вважаємо невиродженими. Надалі числа $M_i,\ h_i$ — невід'ємні постійні, і для $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$ визначимо $(x)_i = x_i$, $\|x\| = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$, $\|A\| = \max\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$. Якщо зробити оцінки

$$\Big\|\big(I - C_1 q^k\big)^{-1}\Big\| \leq M_1, \qquad \Big\|A_1 + B_1 q^k\Big\| \leq M_2, \qquad \|f_k\| \leq M_3^k h_1, \quad k \geq 0,$$

то для чисел $M_4,\ h_2$ таких, що $\|\xi_0\| \leq h_2,\ h_1 \leq h_2,\ M_3 \leq M_4,\ M_1(M_2+1) \leq M_4$, методом математичної індукції можна довести нерівність $\|\xi_k\| \leq M_4^k h_2,\ k \geq 0$. Виберемо $h_2 = \|\xi_0\| + h_1$. Тоді залишок степеневого ряду аналітичного розв'язку можна оцінити таким чином:

$$\left\|\sum_{k=1}^{+\infty} \xi_k t^k\right\| \leq \left(\|\xi_0\| + h_1\right) \frac{M_4 t}{1 - M_4 t}.$$

Виберемо як початкове значення $\xi(0) = lv$, де $v \underset{R^n}{>>} 0$ — деякий вектор і $l > 0$ — деяка константа. Будемо вважати, при необхідності збільшуючи множник l, що $\|\xi_0\| \geq h_1$. Тепер оцінимо m-ту координату степеневого ряду

$$\left|\xi_{0,m} + \sum_{k=1}^{+\infty} \xi_{k,m} t^k\right| \geq |\xi_{0,m}| - \left(\|\xi_0\| + h_1\right) \frac{M_4 t}{1 - M_4 t} \geq |\xi_{0,m}| \left(1 - 2\frac{\|\xi_0\|}{|\xi_{0,m}|}\, \frac{M_4 t}{1 - M_4 t}\right) =$$

$$= |\xi_{0,m}| \left(1 - 2\,\frac{\|v\|}{|v_m|}\, \frac{M_4 t}{1 - M_4 t}\right) \geq \frac{|\xi_{0,m}|}{2}$$

при $0 \leq t \leq \delta_m$, де δ_m — досить мале додатне число.

Таким чином, на відрізку $0 \leq t \leq \delta \overset{\mathrm{df}}{=} \min_{1 \leq m \leq n} \delta_m$ виконується нерівність

$$\xi(t) \underset{R^n}{\geq} \frac{\xi_0}{2} = \frac{l}{2}\, v \underset{R^n}{>>} 0.$$

Якщо припустити, що для вектора v виконується додаткова нерівність $v - q^{-1} C_1 v \underset{R^n}{>>} 0$, то за допомогою аналогічних міркувань можна показати, що на деякому відрізку $0 \leq t \leq \varepsilon$, де константа $\varepsilon > 0$ не залежить від вектора ξ_0, $\|\xi_0\| \geq h_1$, виконується нерівність

$$\xi(t) - q^{-1} C_1 \xi(qt) \underset{R^n}{\geq} \frac{\xi_0 - q^{-1} C_1 \xi_0}{2} = \frac{l}{2}\, \left(v - q^{-1} C_1 v\right) \underset{R^n}{>>} 0.$$

Застосовуючи такі ж викладки до початкового вектора $\xi(0) = -lv$, $\|\xi_0\| \geq h_1$, отримуємо нерівності

$$\xi(t) \underset{R^n}{\leq} -\frac{l}{2}\, v \underset{R^n}{<<} 0, \quad \xi(t) - q^{-1} C_1 \xi(qt) \underset{R^n}{\leq} -\frac{l}{2}\, \left(v - q^{-1} C_1 v\right) \underset{R^n}{<<} 0$$

для $0 \leq t \leq \min\{\delta, \varepsilon\}$.

Якщо неперервний розв'язок системи (1) існує на деякому відрізку $[q\sigma, \sigma]$, де $0 < \sigma < \min\{\delta, \varepsilon\}$, то до нього можна застосувати наслідок і обмежити зверху і знизу аналітичними розв'язками, які в околі нуля нескінченно неперервно диференційовні. Асимптотичні властивості останніх вивчалися в [1].

На закінчення зробимо кілька зауважень щодо нелінійних скалярних рівнянь, які з'являються в квантовій механіці, а саме: про рівняння Шабата (див., наприклад, [7–9] і наведену там літературу)

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) + qx(qt)\right) + x^2(t) - q^2x^2(qt) = \mu, \tag{4}$$

і про два рівняння, які нещодавно було отримано в [10]:

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) + qx(qt)\right) - \left(qx(qt) - x(t)\right)^2 = \mu, \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\left(x(t) + x(t+h)\right) + x^2(t) - x^2(t+h) = \mu. \tag{6}$$

Розглянемо функціонал

$$V(t) = x(t) + qx(qt) + \int\limits_{qt}^{t} x^2(s)ds$$

при $0 < q < 1$. Його похідна відповідно до рівняння (4) дорівнює

$$V'(t) = \mu - \left(q - q^2\right) x^2(qt) \le \mu.$$

Якщо неперервний розв'язок $x(t)$ існує на деякій півосі $[t_0, +\infty)$, $t_0 \ge 0$, і обмежений знизу, то функціонал $V(t)$ теж обмежений знизу. Якщо при цьому додатково припустити від'ємність μ, то приходимо до суперечності. Тобто при від'ємному μ не існує визначених на півосі й обмежених знизу розв'язків рівняння (4).

Згідно з [7] для розв'язків, визначених на кінцевому півінтервалі $[t_0, T_{\max})$, $T_{\max} < +\infty$, повинна виконуватись умова $\limsup_{t\to T_{\max}-0} |x(t)| = +\infty$. Якщо $\mu \le 0$, то функціонал $V(t)$ обмежений зверху числом $V(0)$, а отже, з нерівності $V(t) \ge x(t) + qx(qt)$ і передостанньої умови отримуємо необмеженість $x(t)$ знизу. Більш того, $x(t) \to -\infty$, $t \to T_{\max} - 0$, оскільки в іншому випадку лінійна комбінація $x(t) + qx(qt)$ була б необмеженою знизу і в той же час не прямувала б до $-\infty$ при $t \to T_{\max} - 0$, але це неможливо, тому що згідно з рівнянням (4) похідна $\dfrac{d}{dt}\left(x(t) + qx(qt)\right)$ обмежена зверху.

Зокрема, при $\mu < 0$ всі розв'язки необмежені знизу.

Окремо виділимо таку властивість: якщо $\mu = 0$, то з нерівності $V(t) \ge x(t) + qx(qt)$ отримуємо, що обмеженість знизу розв'язку рівняння (4) приводить до його обмеженості зверху.

Зроблені зауваження щодо рівняння (4) частково підтверджують і доповнюють третє припущення з [7].

У випадку $q > 1$ можна застосувати викладену вище схему міркувань і отримати аналогічні результати.

Тепер розглянемо функціонал

$$W(t) = x(t) + qx(qt) - \int\limits_{qt}^{t} (qx(qs) - x(s))^2 ds$$

при $0 < q < 1$. Його похідна відповідно до рівняння (5) дорівнює

$$W'(t) = \mu + q\left(qx\left(q^2 t\right) - x(qt)\right)^2 \geq \mu.$$

Якщо неперервний розв'язок $x(t)$ рівняння (5) існує на деякій півосі $[t_0, +\infty),\ t_0 \geq 0$, і обмежений зверху, то функціонал $W(t)$ теж обмежений зверху. Якщо при цьому додатково припустити додатність μ, то приходимо до суперечності. Тобто при додатному μ не існує визначених на півосі й обмежених зверху розв'язків рівняння (5).

Повторюючи логіку міркувань для рівняння (4) і функціоналу $V(t)$ з очевидними змінами, отримуємо ще кілька властивостей:

1) якщо $\mu \geq 0$ і розв'язок $x(t)$ рівняння (5) існує на кінцевому півінтервалі $[t_0, T_{\max})$, $T_{\max} < +\infty$, то $x(t) \to +\infty,\ t \to T_{\max} - 0$;

2) при $\mu > 0$ всі розв'язки необмежені зверху;

3) якщо $\mu = 0$, то обмеженість зверху розв'язку рівняння (5) приводить до його обмеженості знизу.

Припустимо, що $\mu < 0,\ 0 < q < 1$, і розглянемо постійний розв'язок $-\dfrac{\sqrt{|\mu|}}{1-q}$ рівняння (5). Зробимо заміну змінних $x(t) = -\dfrac{\sqrt{|\mu|}}{1-q} + y(t)$:

$$\frac{d}{dt}\left(y(t) + qy(qt)\right) = -2\sqrt{|\mu|}y(t) + 2\sqrt{|\mu|}qy(qt) + (qy(qt) - y(t))^2. \qquad (7)$$

Останнє рівняння як окремий випадок більш загальних рівнянь вивчалося в [11] (теорема 4), де для нього отримано такий результат: *для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *існують константи* $j \in \mathrm{N}$ *і* $0 < \delta < \sigma < +\infty$ *такі, що для* j *разів неперервно диференційовних розв'язків* $y(t)$ *рівняння (7), що задовольняють умову* $\left|y^{(m)}(\theta)\right| \leq \delta,\ \theta \in [qt_0, t_0],\ t_0 > 0,\ m = \overline{0, j}$, *виконується оцінка*

$$\max\left\{|y(t)|, \left|y'(t)\right|, \ldots, \left|y^{(j)}(t)\right|\right\} \leq \sigma t^{-1+\varepsilon} \qquad (8)$$

при $t \geq qt_0$. Можна вибрати параметр $j \geq 2$. Тоді з (7) отримуємо рівність

$$\frac{d}{dt}\left(y'(t) + q^2 y'(qt)\right) = -\left\{2\sqrt{|\mu|} + 2(qy(qt) - y(t))\right\} y'(t) +$$
$$+ \left\{2\sqrt{|\mu|}q^2 + 2q^2(qy(qt) - y(t))\right\} y'(qt).$$

Враховуючи (8) і застосовуючи до останнього рівняння лему 8 з [7] із параметром $\alpha = -\dfrac{3}{2} + \varepsilon$, отримуємо оцінку $y'(t) = O\big(t^{-\frac{3}{2}+\varepsilon}\big),\ t \to +\infty$. Виберемо число $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$. Тоді рівняння (7) можна записати у вигляді $y(t) - qy(qt) = O\big(t^{-\frac{3}{2}+\varepsilon}\big),\ t \to +\infty$. Застосовуючи лему 3 з [7] до останньої тотожності, одержуємо більш точну оцінку розв'язку

$$y(t) = t^{-1} h\left(\frac{\ln t}{\ln q^{-1}}\right) + O\big(t^{-\frac{3}{2}+\varepsilon}\big), \quad t \to +\infty,$$

де h — неперервна періодична функція з періодом 1.

У випадку $q > 1,\ \mu > 0$ за допомогою функціоналу $W(t)$ для розв'язків рівняння (5), визначених на півосі, отримуємо нерівність

$$\left(\limsup_{t\to+\infty} |x(t)|\right)^2 (q+1)^2(q-1) \geq \mu.$$

Функція $x(t) = a\sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{h} + b\right),\ n \in Z,\ a,b,h,t \in C,\ h \neq 0,$ є частковим розв'язком рівняння (6) при $\mu = 0$. Проінтегрувавши це рівняння, одержимо тотожність

$$x(t) + x(t+h) + \int\limits_{t+h}^{t} x^2(s)ds = x(t_0) + x(t_0+h) + \int\limits_{t_0+h}^{t_0} x^2(s)ds + \mu(t-t_0),$$

яка дозволяє довести твердження, аналогічні до здобутих вище для рівнянь (4), (5).

Література

1. Г. П. Пелюх, Д. В. Бельський, *Асимптотичні границі розв'язків лінійних систем диференціально-функціональних рівнянь із лінійними й постійними запізненнями*, Нелін. коливання, **23**, № 4, 493 – 501 (2020).
2. Д. В. Бельский, Г. П. Пелюх, *Асимптотические оценки решений дифференциально-функционального уравнения с линейным запаздыванием*, Укр. мат. журн., **71**, № 1, 129 – 138 (2019).
3. J. H. Wu, H. I. Freedman, *Monotone semiflows generated by neutral functional-differential equations with application to compartmental systems*, Canad. J. Math., **43**, 1098 – 1120 (1991).
4. H. L. Smith, *Monotone dynamical systems. An introduction to the theory of competitive and cooperative systems*, Math. Surveys Monogr., **41**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1995).
5. M. W. Hirsch, H. L. Smith, *Monotone dynamical systems*, Handbook of differential equations: ordinary differential equations. Vol. II, Elsevier B. V., Amsterdam (2005), pp. 239 – 357.
6. Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, Москва (1984).
7. Y. Liu, *Regular solutions of the Shabat equation*, J. Differential Equations, **154**, 1 – 41 (1999).
8. Y. Liu, *An existence result for the Shabat equation*, Aequationes Math., **64**, 104 – 109 (2002).
9. H. K. Lau, P. T. Leung, *Construction of self-similar shape invariant potentials with Padé approximation*, J. Phys. A, **41**, 025206 (2008).
10. V. P. Spiridonov, *Self-similar potentials in quantum mechanics and coherent states*, Phys. Particles Nuclei, **52**, 274 – 289 (2021).
11. Д. В. Бельский, Г. П. Пелюх, *Об асимптотических свойствах решений некоторых дифференциально-функциональных уравнений*, Нелін. коливання, **19**, № 3, 311 – 348 (2016).

Одержано 16.03.21