ДИЗАЙН, ОБРОБКА І ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЇ

УДК 514.1+744

АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ (2,2)-ЗНАЧНОЇ ЗАМКНУТОЇ ВІДПОВІДНОСТІ НА ПОДВІЙНОМУ ПЛОСКОМУ ПОЛІ

О.С. Вернидуб. Кременчуцький університет економіки, інформаційних технологій і управління.

In the article it was made an analytical interpretation and detailed study of conic sections unified determinant, their construction unified algorithm.

Keywords: *three-unit (2,2)-large accordance, triad, analytical interpretation, algorithm of construction, conical cuts.*

Вступ

Найпоширенішими в практиці плоскими кривими є криві другого ступеня: еліпс, парабола, гіпербола, коло.

Вивчення кривих ліній другого ступеня викликає великий інтерес у зв'язку з тим, що їх широко застосовують у ряді розділів фізики, астрономії, механіки, архітектури, дизайну, будівництва.

Відомо, наприклад, що планети рухаються по еліпсах. Траєкторіями руху твердого тіла можуть бути еліпс і парабола. Направлені під кутом до горизонту камінь, снаряд, некеровані балістичні ракети рухаються по параболах.

Ось чому вчені [1; 6] впродовж довгих років займалися пошуком нових методів побудови кривих ліній другого ступеня. У роботах [3; 5; 7] розглядається побудова конік, їх класифікація і автоматизація. Однак, як показали довголітні дослідження, виконані автором, не існує єдиного визначника і єдиного алгоритму побудови всіх конік.

Мета статті – запропонувати єдиний визначник кривих ліній другого ступеня і єдиний алгоритм їх побудови на основі геометричної тріади (триланкової замкнутої відповідності).

Основна частина

Нехай незмінна вісь квадратичної взаємооднозначної відповідності узагальнена до кола $x^2 + y^2 = R_1^2$ (рис. 1).

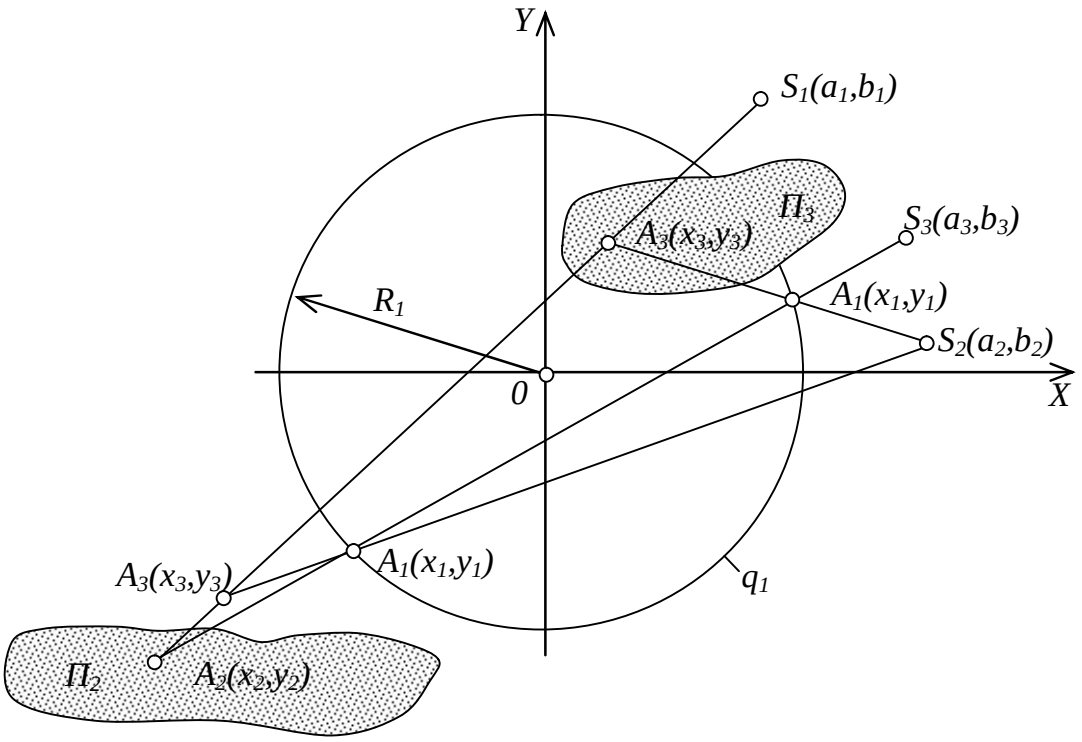

Рис. 1. Модель відповідності, що спостерігається на двох суміщених плоских полях

У даному випадку модель відповідності, що спостерігається на двох суміщених плоских полях $\Pi_1 \equiv \Pi_3$, представляється чотирма інваріантами плоскої тріади: трьома центрами S_1, S_2, S_3 і віссю q_1 (рис. 1). При цьому кожній точці A_2, зануреній у поле Π_2, будуть відповідати дві точки поля Π_3.

Аналітична залежність координат перетвореної точки A_3 від координат перетворюваної точки A_2 описується наступними рівнями (пряме перетворення):

$$\begin{aligned}
&\Big[\Big\{b_2\cdot[(x_2-a_3)^2+(y_2-b_3)^2]+(x_2-a_3)\cdot(a_3y_2-b_3x_2)\pm\sqrt{(x_2-a_3)^2\times}\\
&\overline{\times(a_3y_2-b_3x_2)^2-[(x_2-a_3)^2+(y_2-b_3)^2]\cdot\{b_3(x_2-a_3)[b_3(x_2+a_3)-}}\\
&\overline{-2a_3y_2]+(y_2-b_3)\cdot(a_3^2-R_1^2)\}}\times(a_1-x_2)-\{a_2[(x_2-a_3)^2+(y_2-b_3)^2]+\\
&+(y_2-b_3)\cdot(b_3x_2-a_3y_2)\pm\sqrt{(y_2-b_3)^2\cdot(b_3x_2-a_3y_2)^2+[(x_2-a_3)^2+}\\
&\overline{(y_2-b_3)^2]\cdot\{a_3(y_2-b_3)\cdot[a_3(y_2-b_3)\cdot((a_3(y_2+b_3)-2b_3x_2))+}\\
&\overline{+(x_2-a_3)^2\cdot(b_3^2-R_1^2)\}}\Big\}\cdot(b_1-y_2)\Big]\cdot\chi_3=b_2(a_1-x_2)\cdot\Big[(b_3-y_2)\times\\
&\times\cdot(b_3x_2-a_3y_2)\pm\sqrt{(y_2-b_3)^2\cdot(b_3x_2-a_3y_2)^2+[(x_2-a_3)^2+(y_2-b_3)^2]\times}\\
&\overline{\times\{a_3(y_2-b_3)\cdot((a_3(y_2-b_3)-2b_3x_2))+(x_2-a_3)\cdot(b_3^2-R_1^2)\}}\Big]+a_2(a_1-x_2)\times\\
&\times\Big[(x_2-a_3)\cdot(a_3y_2-b_3x_2)\pm\sqrt{(x_2-a_3)^2\cdot(a_3y_2-b_3x_2)^2-[(x_2-a_3)^2+}\\
&\overline{+(y_2-b_3)^2]\cdot\{b_3(x_2-a_3)\cdot[(b_3(x_2+a_3)-2a_3y_2)]+(y_2-b_3)\cdot(a_3^2-R_1^2)\}}\Big]+\\
&+\Big\{a_2\Big[(x_2-a_3)^2-(y_2-b_3)^2\Big]+(y_2-b_3)\cdot(b_3x_2-a_3y_2)^2\pm\sqrt{(y_2-b_3)^2\times}\\
&\times\overline{(b_3x_2-a_3y_2)^2+\Big[(x_2-a_3)^2+(y_2-b_3)^2\Big]\cdot\{a_3(y_2-b_3)\cdot\big((a_3(y_2-b_3)-}\\
&\overline{-2b_3x_2)\big)+(x_2-a_3)^2\cdot(b_3^2-R_1^2)\}}\times(a_1y_2-b_1x_2);
\end{aligned}\qquad (1)$$

$$\Big[\Big\{b_2\cdot[(x_2-a_3)^2+(y_2-b_3)^2]+(x_2-a_3)\cdot(a_3y_2-b_3x_2)\pm\sqrt{(x_2-a_3)^2\times$$
$$\times(a_3y_2-b_3x_2)^2-[(x_2-a_3)^2+(y_2-b_3)^2]\cdot\{b_3(x_2-a_3)[b_3(x_2+a_3)-$$
$$-2a_3y_2]\cdot(y_2-b_3)^2\cdot(a_3^2-R_1^2)\}\times(a_3-x_2)-\{a_2[(x_2-a_3)+(y_2-b_3)^2]+$$
$$+(y_2-b_3)\cdot(b_3x_2-a_3y_2)\pm\sqrt{(y_2-b_3)^2\cdot(b_3x_2-a_3y_2)^2+[(x_2-a_3)^2+$$
$$+(y_2-b_3)^2]\cdot\{a_3(y_2-b_3)\cdot[a_3(y_2-b_3)\cdot((a_3(y_2+b_3)-2b_3x_2))+$$
$$+(x_2-a_3)\cdot(b_3^2-R_1^2)]\}\}\cdot(b_1-y_2)\Big]\cdot y_3=b_2(b_1-y_2)\cdot[(b_3-y_2)\times$$
$$\times\cdot(b_3x_2-a_3y_2)\pm\sqrt{(y_2-b_3)^2\cdot(b_3x_2-a_3y_2)^2+[(x_2-a_3)^2+(y_2-b_3)^2]\times$$
$$\times\{a_3(y_2-b_3)\cdot((a_3(y_2+b_3)-2b_3x_2))+(x_2-a_3)^2\cdot(b_3^2-R_1^2)\}\Big]-a_2(b_1-y_2)\times$$
$$\times\Big[(a_3-x_2)\cdot(a_3y_2-b_3x_2)\pm\sqrt{(x_2-a_3)^2\cdot(a_3y_2-b_3x_2)^2-[(x_2-a_3)^2+$$
$$+(y_2-b_3)^2]\cdot\{b_3(x_2-a_3)\cdot[(b_3(x_2+a_3)-2a_3y_2)]+(y_2-b_3)\cdot(a_3^2-R_1^2)\}\Big]+$$
$$+\Big\{b_2\Big[(x_2-a_3)^2-(y_2-b_3)^2\Big]+(a_3-x_2)\cdot(a_3y_2-b_3x_2)^2\pm\sqrt{(x_2-a_3)^2\times$$
$$\times(a_3y_2-b_3x_2)^2-[(x_2-a_3)^2+(y_2-b_3)^2]\cdot\{b_3(x_2-a_3)\cdot((b_3(x_2-a_3)-$$
$$-2a_3y_2))+(y_2-b_3)^2\cdot(a_3^2-R_1^2)\}\Big]\times(b_1x_2-a_1y_2). \qquad (2)$$

Піддавши перетворенню (1 і 2) коло $x^2+y^2=R_2^2$, одержимо загальне рівняння сімейства кривих 4-го ступеня, одна з якого зображена на рис. 2.

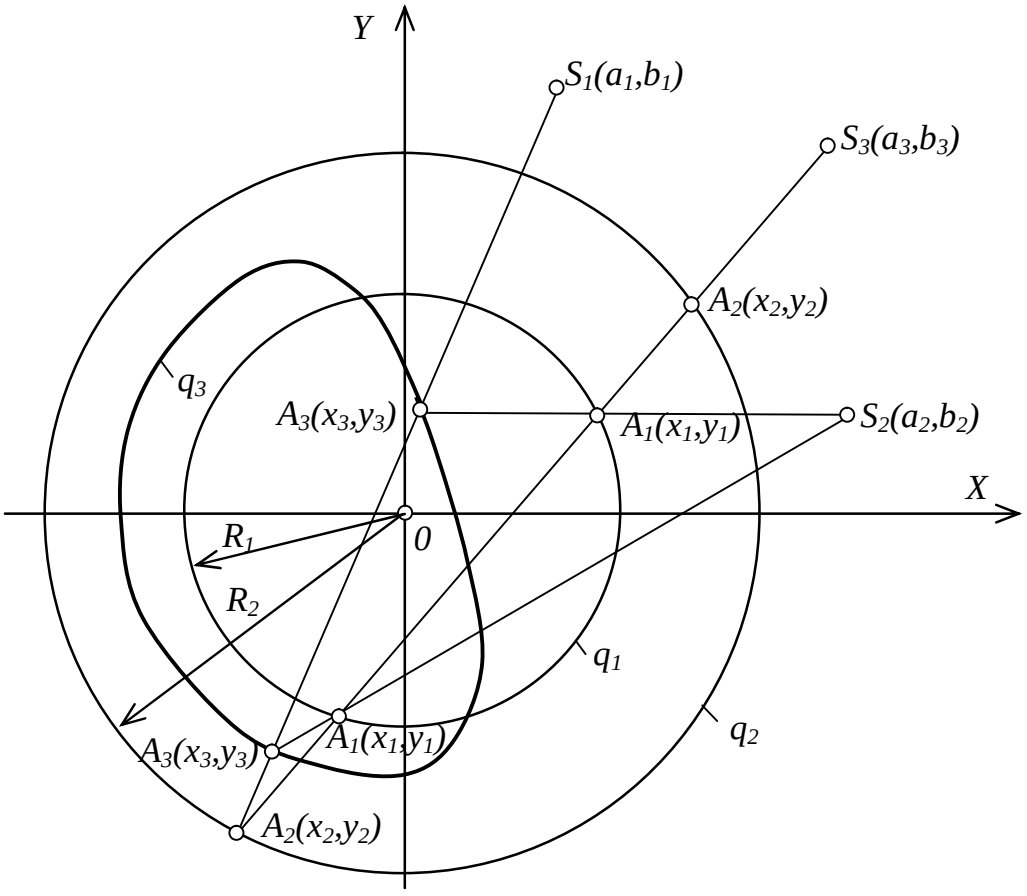

Рис. 2. Приклад загального рівняння сімейства кривих 4-го ступеня

Рівняння цього сімейства кривих досить громіздке. Побудувати одну з кривих цього сімейства можна за допомогою комп'ютерної техніки (не виключена можливість побудови за допо-

могою звичайних креслярських інструментів). Варіюючи параметри перетворення R_1, R_2, a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, можна одержати криві різної форми.

Розглянемо ще один випадок, спростивши вирази (1 і 2). Нехай $a_3 = 0$, тоді будемо мати:

$$\left\{\left\{b_2\cdot\left[x_2^2+(y_2-b_3)^2\right]-b_3x_2^2\pm\sqrt{b_3^2x_2^4-[x_2^2+(y_2-b_3)^2]\cdot[b_3^2x_2^2-R_1^2(y_2-b_3)^2]}\right\}\times\right.$$
$$\times(a_1-x_2)-\left\{a_2\left[x_2^2+(y_2-b_3)^2+b_3(y_2-b_3)x_2\pm\sqrt{b_3^2(y_2-b_3)^2x_2^2-}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\overline{-[x_2^2+(y_2-b_3)^2\cdot(b_3^2-R_1^2)\cdot x_2^2]}\cdot(b_1-y_2)\right]\cdot x_3=(a_1-x_2)\cdot\left[\left\{b_2\left[b_3(b_3-y_2)x_2\pm\right.\right.\right.$$
$$\pm\sqrt{b_3^2(y_2-b_3)^2\cdot x_2^2-[x_2^2+(y_2-b_3)^2]\cdot(b_3^2-R_1^2)\cdot x_2^2}\left.\right]+a_2\left\{b_3x_2^2\pm\sqrt{b_3^2x_2^4-[x_2^2+}\right.$$
$$\left.\left.\left.\overline{+(y_2-b_3)^2]\cdot[b_3^2x_2^2-R_1^2(y_2-b_3)^2]}\right\}\right]+\left\{a_2[x_2^2+(y_2-b_3)^2]+b_3(y_2-b_3)^2x_2\pm\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{b_3^2(y_2-b_3)^2\cdot x_2^2-[x_2^2+(y_2-b_3)^2]\cdot(b_3^2-R_1^2)\cdot x_2^2}\right\}\cdot(a_1y_2-b_1x_2). \qquad (3)$$

Аналогічно визначаємо Y_3:

$$\left\{[b_2x_2^2+(y_2-b_3)^2]-b_3x_2^2\pm\sqrt{b_3^2x_2^4-[x_2^2+(y_2-b_3)^2]\cdot[b_3^2x_2^2-R_1^2(y_2-b_3)^2]}\right\}\times$$
$$\times(a_1-x_2)-\left\{a_2\left[x_2^2+(y_2-b_3)^2\right]+b_3(y_2-b_3)x_2\pm\sqrt{b_3^2(y_2-b_3)^2x_2^2-}\right.$$
$$\left.-\overline{-[x_2^2+(y_2-b_3)^2]\cdot(b_3^2-R_1^2)\cdot x_2^2}\right\}\cdot(b_1-y_2)\Big]\cdot y_3=(b_1-y_2)\cdot\left[\left\{b_2\left[(b_3-y_2)b_3x_2\pm\right.\right.\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{b_3^2(y_2-b_3)^2\cdot x_2^2-[x_2^2+(y_2^2-b_3^2)]\cdot[(b_3^2-R_1^2)\cdot x_2^2]}\right\}+a_2\left\{b_3x_2^2\pm\sqrt{b_3^2x_2^4-[x_2^2+}\right.$$
$$\left.\left.\left.\overline{+(y_2-b_3)^2]\cdot[b_3^2x_2^2-R_1^2(y_2-b_3)^2]}\right\}\right]+\left\{b_2\left[x_2^2+(y_2-b_3)^2\right]-b_3x_2^2\pm\right.$$
$$\left.\pm\sqrt{b_3^2x_2^4-[x_2^2+(y_2-b_3)^2]\cdot[b_3^2x_2^2-R_1^2(y_2-b_3)^2]}\right\}\cdot(b_1x_2-a_1y_2). \qquad (4)$$

Якщо піддати перетворенню (3 і 4) коло $x^2+y^2=R_1^2$, то одержимо криву лінію четвертого ступеня, яка нагадує обрис технічної деталі типу «кулачок» (рис. 3).

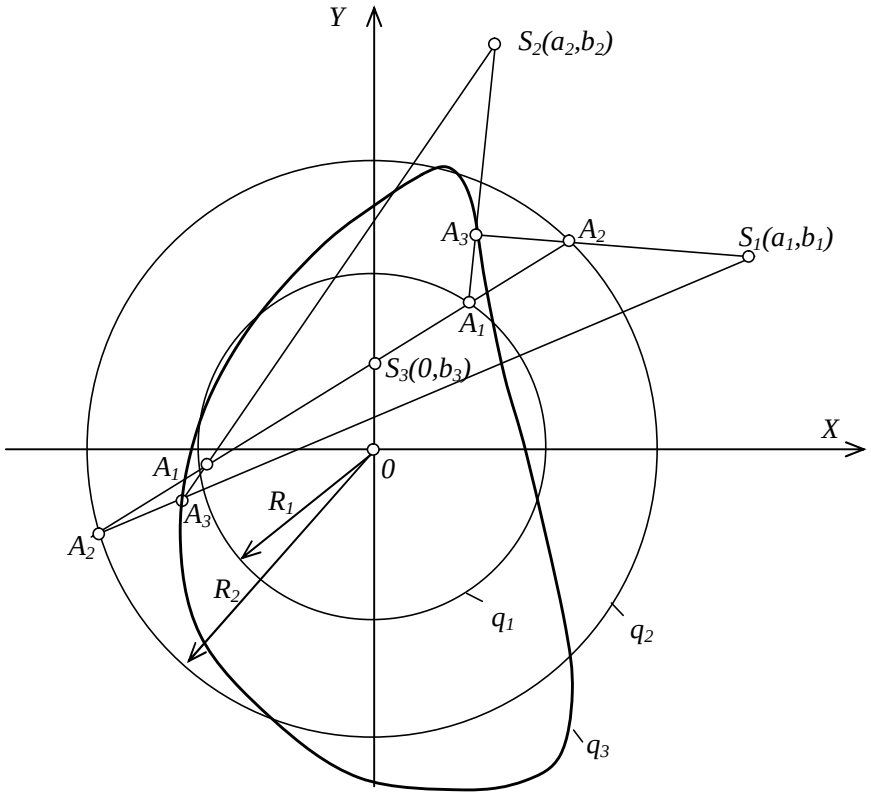

Рис. 3. Крива лінія 4-го ступеня

Якщо a_2 по абсолютній величині дорівнює $-a_1$ ($a_2=|-a_1|$), $b_2=b_1$, одержимо сімейство кривих ліній, симетричних осі OY.

У випадку інцидентності центрів колу q_1 ($a_1 = R_1\cos\varphi$, $b_1 = R_1\sin\varphi$, $a_2 = R_1\cos\varphi$, $b_2 = R\sin\varphi$, $R_1 = R_2$) одержимо новий визначник усіх, без винятку, конік (рис. 4). Вигляд кривої другого ступеня, як показали дослідження, залежить від положення центра S_3 на осі OY. Так, при $S_3 \equiv Q$ коніка вироджується у дві прямі S_1S_2 (подвійна пряма). Подальше переміщення центра S_3 вниз веде до утворення еліпса з горизонтально розташованою великою віссю. Якщо центр S_3 буде знаходитися нижче геометричного центра О кіл $q_1 \equiv q_2$, то осі еліпса міняються місцями. Якщо $S_3O = OQ$, еліпс вироджується у параболу, а при $S_3O > OQ$ – в гіперболу. І, в решті-решт, якщо $S_3 \equiv O$, то одержимо коло, радіус якого змінюється від нуля до нескінченно великого.

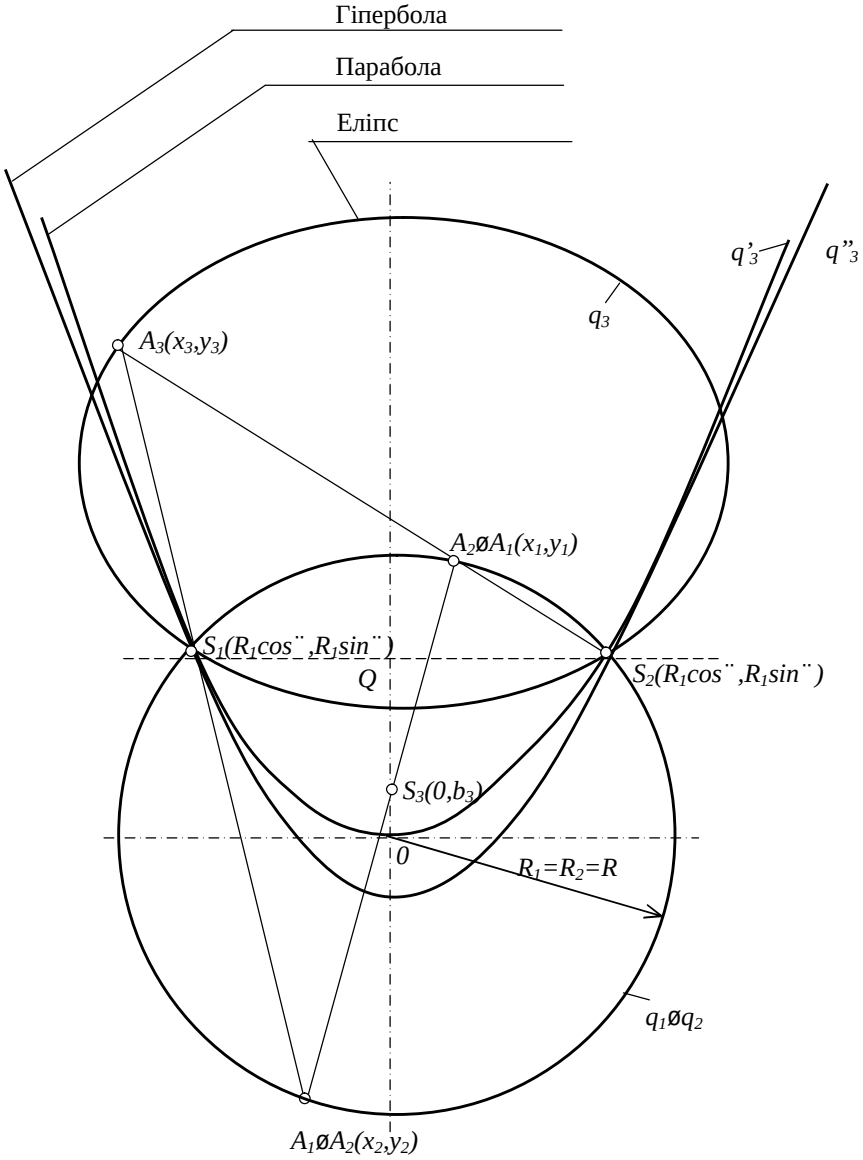

Рис. 4. Випадок інцидентності центрів колу q_1

При втіленні на кресленнях цілого ряду практичних задач, наприклад, при розробці складних криволінійних поверхонь методом радіусографії [2], доводиться зустрічатися з побудовою точок дуги кола, коли центр його «недоступний» або радіус настільки великий, що не охоплюється циркулем. Точна графічна побудова дуги кола з великим радіусом є складною задачею і потребує створення спеціального інструменту. Враховуючи значущість цього питання, зупинимося на ньому дещо детальніше.

На рис. 5 зображений визначник кола q_3, одержаний із приведеного на рис.4 при $S_3 \equiv O$. У тому, що q_3 – коло, легко впевнитися. Кути β і γ, вершини яких S_2 і S_3 лежать на

колі $q_1' \equiv q_2'$, прямі, як кути, що опираються на діаметр a_3 цього кола. В той же час сторони a_1 і a_2 цих кутів проходять через точку A_3, яка належить колу q_3 (за умовою). З другого боку, пара відповідних у тріаді променів a_2' і a_1', перетинаючись, визначають ще одну точку, що належить шуканій кривій q_3. Ясно видно також, що шукана крива q_3 проходить через центри S_1 і S_2, а кути $A_3S_1A_3$ і $S_3S_2A_3$ – прямі, як суміжні з прямими. Отже, вони опираються на один і той же діаметр d. Таким чином, q_3 – коло.

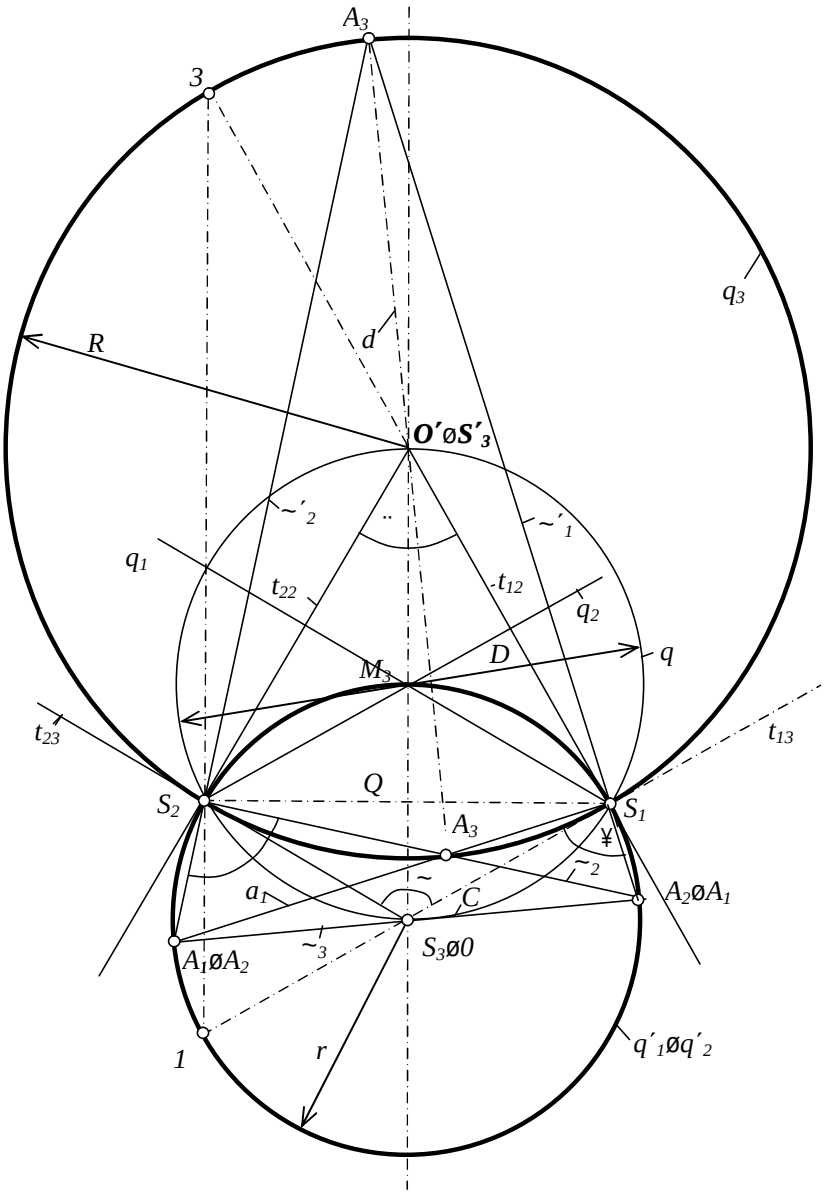

Рис. 5. Визначник кола q_3, одержаний із приведеного на рис. 4 при $S_3 \equiv O$

У момент, коли точки A_3 і $A_2 \equiv A_1$ збігаються з відображуючим їх центром, промені $a_1(a_2)$ і $a_1'(a_2')$, що проеціюють ці точки, виродяться відповідно в дотичні $t_{12}(t_{23})$ і $t_{12}(t_{22})$, які проходять через центри кіл $q_1' \equiv q_2'$ і q_3, тому кожна з них по відношенню до другої є нормаллю. Якщо $A_3 \equiv S_1$, то рухомий базис тріади займе положення $1S_13$ (рис. 5), у якого промінь S_2S_1 (промінь a_2, що виродився) являє собою висоту, опущену з S_1 на протилежну сторону 13. Дійсно, кут $1S_2S_1$ – прямий, оскільки вершина його S_1 лежить на колі $q_1' \equiv q_2'$ з центром $S_3 \equiv O$, а сторони проходять через кінцеві точки діаметра останнього. Кут S_1S_23 також прямий, як

суміжний. Вершина його належить колу q_3 і тому він також опирається на діаметр цього кола з центром в $O' \equiv S_3$, який визначається як результат перетину дотичних ($O' = t_{12} \times t_{22}$).

Таким чином, коло $q_1' \equiv q_2'$ (рис. 5) можна одержати в тріаді [S_1, S_2, S_3', q_1, q_2], про що говорилося вище. А коло q_3 одержується в тріаді [S_1, S_2, S_3, q_1', q_2']. Для названих тріад загальними є центри S_1 і S_2 Такі тріади назвемо спряженими. Між колами $q_1' \equiv q_2'$ і q_3, одержаних у спряжених тріадах, установлюється проективна спряженість. Прямокутний трикутник $S_3S_1S_3'$, катети якого є радіусами проективно спряжених кіл, назвемо параметричним трикутником.

З викладеного витікає справедливість наступної теореми.

Теорема 1. Якщо кола проективно спряжені одна відносно другої, то дотичні до них у точках їхнього перетину перетинаються в геометричних центрах цих кіл.

Розглянемо властивості проективно спряжених кіл.

Властивість 1. Коло q_3 утворене в тріаді [S_1, S_2, S_3, $q_1' \equiv q_2'$] геометричне місце ортоцентрів рухомого базису тріади.

Дійсно, кути β і γ прямі. Отже, проеціюючі промені a_1 і a_2 є висотами рухомого базису тріади (рис. 5) і перетинаються в A_3. Третя висота d, яка опущена з вершини A_3, згідно загальновідомої теореми про перетин висот трикутника в одній точці, також пройде через точку A_3 – ортоцентр.

Властивість 2. Висота рухомого базису $a_1a_2'a_3$ тріади, що опущена із його вершини $A_3 \subset q_3$ на протилежну сторону a_3 завжди проходить через центр О'кола q_3.

Дійсно, кути $A_3S_2A_3$ і $S_3S_2A_3$ прямі, оскільки $a_2 \perp a_2'$, $a_1 \perp a_1'$. Вершини S_1 і $S_2 \subset q_3$. Отже, вони опираються на один і той же діаметр d (рис. 5).

Властивість 3. Дотичні, що проведені до q_3 точках A_3, паралельні стороні a_3 рухомого базису тріади.

Ця властивість витікає з того, що нормаль, яка проведена до дотичної в точці її дотику до кола, завжди проходить через центр цього кола. Тому d перпендикулярний до твірної, але $d \perp a_3$. Звідси, дотична в A_3 паралельна a_3.

Властивість 4. Геометричним місцем основ висот, опущених з вершин рухомого базису тріади, є коло з діаметром, рівним гіпотенузі параметричного трикутника.

При утворенні кола q_3 рухомий базис тріади буде займати різні фіксовані положення (наприклад, $13S_1$ - рис. 5). При цьому, згідно властивості 2, кут при вершині С буде завжди прямим. Сторони, що утворюють цей кут, обертаються навколо нерухомих центрів проективно спряжених кіл. У момент, коли $C \equiv S_1$, висота d співпадає з t_{12}. А кут залишається прямим. Це можливо в тому випадку, коли сторони, що утворюють прямий кут, проходять через кінцеві точки діаметра, а вершина ковзає по колу з цим діаметром. Отже, точка С описує коло q, на якому розташовані всі чотири носії (S_1, S_2, S_3 і S_3') 1-го ступеня в спряжених тріадах.

Якщо носій пучка S_3, залишаючись геометричним центром кола $q_1' \equiv q_2'$, розташується колінеарно з S_1 і S_2, то дуга q_3 вироджується у пряму. Звідси випливає, що в даній тріаді можна одержати дугу кола будь-якого радіуса.

Властивість 5. Радіус R кола, що утворюється в тріаді, знаходиться в прямій залежності від радіуса r проективно спряженим з ним кола і центрального кута, утвореного дотичними до шуканого кола, проведеними в точках перетину кіл.

Дійсно, з параметричного трикутника проективно спряжених кіл $q_1' \equiv q_2'$ і q_3 (рис. 5) маємо:

$$S_1S_3' = S_1S_3 \cdot tg\,\alpha/2, \tag{5}$$

але $S_1S_3' = R$, $S_1S_3 = r$. Отож,

$$R = r \cdot tg\,\alpha/2, \tag{6}$$

Якщо відомий радіус одного зі спряжених кіл, то діаметр кола q (гіпотенузу параметричного трикутника) визначають за формулою

$$D = R \cdot \sin\alpha/2 = r \cdot \cos\alpha/2, \tag{7}$$

Аналогічне дослідження, засноване на проективному визначенні кола, виконане Ю.Д. Левченком [4]. Апарат проективної геометрії, який використано для побудови кривих ліній, має обмежені можливості і, очевидно, через це Ю.Д. Левченко не вказав шляхів розширення функціональних можливостей розглянутої ним схеми побудов. Він запропонував порівняно складну залежність для визначення радіуса кола з «недоступним» центром.

Висновки

1. Виконано графоаналітичне дослідження (2,2)-значної відповідності на подвійному плоскому полі.
2. Одержано новий визначник усіх, без винятку, кривих другого порядку і єдиний алгоритм їх побудови.
3. Запропонована значно простіша порівняно з відомими побудова кола з «недоступним» центром.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Андреев, К. О геометрическом образовании плоских кривых / К. Андреев. – Х. : В университетской типографии, 1875. – 76 с.
2. Бабаков, В. Проектирование поверхностей кривыми второго порядка в самолетостроении / В. Бабаков. – М. : Машиностроение, 1969. – 217 с.
3. Дубров, А. Об одном квадратичном преобразовании в триаде / А. Дубров. // Прикладная геометрия и инженерная графика. – 1977. – Вып. 24, – С. 59-60.
4. Левченко, Ю. Д. К вопросу о построении дуг окружностей больших радиусов / Ю. Д. Левченко // Киберн. графики и прикл. геометрия поверхностей. – М. : Изд. МАИ, 1973. – Вып. 268.
5. Павлов, А. Модификация метода кривых второго порядка для системы автоматизированного проектирования / А. Павлов, Г. Дубовский // Прикладная геометрия и инженерная графика. – 1982. – Вып. 34. – С. 7-9.
6. Савелов, А. Плоские кривые / А. Савелов. – М. : Физматгиз, 1960. – 295 с.
7. Шеин, В. Построительная классификация кривых второго порядка и класса / В. Шеин // Прикладная геометрия и инженерная графика. – 1974. – Вып. 18. – С. 107-111.

Отримано редакцією 22.09.2012 р.

Вернидуб Олексій Степанович, к.т.н., доц. кафедри дизайну. Кременчуцький університет економіки, інформаційних технологій і управління.