

# IV МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В МЕТАЛУРГІЇ ТА МАШИНОБУДУВАННІ

УДК 539.3

Канд. физ.-мат. наук Н. Н. Антоненко<sup>1</sup>, канд. физ.-мат. наук И. Г. Величко<sup>2</sup><sup>1</sup> Запорожский национальный технический университет, г. Запорожье,<sup>2</sup> Таврический государственный агротехнологический университет, г. Мелитополь

## ЗАДАЧА О КРУЧЕНИИ МНОГОСЛОЙНОГО ОСНОВАНИЯ С УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ МЕЖДУ СЛОЯМИ

На основе метода функций податливости построено решение первой основной граничной задачи для многослойного основания с упругими связями между слоями, которое находится в условиях осесимметричного кручения. Проанализировано влияние коэффициентов упругих связей на распределение напряжений и перемещений в слоях двухслойного пакета, упруго связанного с полупространством.

**Ключевые слова:** многослойное основание, упругие связи, осесимметричное кручение, метод функций податливости, интегральное преобразование Ханкеля.

### Введение

Первые работы, посвященные кручению многослойных сред, были посвящены исследованию кручения полупространства (Н. А. Ростовцев, 1955; Б. Л. Минцберг, 1957) и упругого слоя (Я. С. Уфлянд, 1959). Случай кручения двухслойной среды изучен в [1], кручение многослойного основания рассмотрено в [2]. В статье [3] на основании метода функций податливости был предложен способ решения граничных задач о кручении слоистого полупространства периодической структуры. Во всех выше указанных работах предполагалось, что контакт между слоями слоистой среды полный. В этой работе метод функций податливости, предложенный Днепропетровской школой механиков [4, 5], распространен на многослойные основания с упругими связями между слоями, которые находятся в условиях осесимметричного кручения. Будем полагать, в рамках модели [6], что между двумя соседними слоями основания существуют упругие связи, если разности перемещений точек верхней границы нижнего слоя и нижней границы верхнего слоя пропорциональны соответствующим напряжениям в точках их общей границы. Как правило, задачи об определении НДС многослойных оснований с упругими связями между слоями рассматриваются для случаев плоской и пространственной деформаций [7, 8]. Задача о кручении многослойного основания с упругими связями между слоями рассматривается впервые.

### Постановка задачи

Под многослойным основанием будем понимать пакет упругих слоев лежащих на полупространстве.

Контакт между слоями упругий. Материал слоев будем считать однородным и изотропным. Каждый слой характеризуем толщиной  $h$  и двумя упругими характеристиками: модулем сдвига  $\mu$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$ . Необходимо определить напряжения и перемещения в слоях основания, если к его верхней границе приложены силы, которые вызывают осесимметричное кручение.

Нумерацию слоев будем проводить сверху вниз, начиная с единицы. Все величины, которые относятся к  $k$ -му слою будем обозначать нижним индексом  $k$ . В каждом слое введем локальную цилиндрическую систему координат с осями  $Oz_k$ , которые лежат на одной прямой и направлены вглубь слоя (рис. 1).

Граничные условия:

$$\sigma_{z1}(\rho, 0) = 0, \quad \tau_{\varphi z1}(\rho, 0) = g(\rho). \quad (1)$$

Условия сопряжения слоев:

$$\begin{aligned} u_{\varphi k+1}(\rho, 0) &= u_{\varphi k}(\rho, h_k) + m_k \tau_{\varphi zk}(\rho, h_k), \\ \tau_{\varphi zk+1}(\rho, 0) &= \tau_{\varphi zk}(\rho, h_k), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $m_k \geq 0$  – коэффициент упругих связей. Отметим, что если  $m_k = 0$ , то мы получим условия сопряжения слоев для случая полного контакта между слоями.

Введем безразмерные величины  $\tilde{\rho}_k = \frac{\rho_k}{l}$ ,  $\tilde{z}_k = \frac{z_k}{l}$

$$\tilde{h}_k = \frac{h_k}{l}, \quad \tilde{\mu}_k = \frac{\mu_k}{M}, \quad \tilde{m}_k = \frac{m_k M}{l}, \quad \tilde{u}_{\varphi k} = \frac{u_{\varphi k}}{l},$$

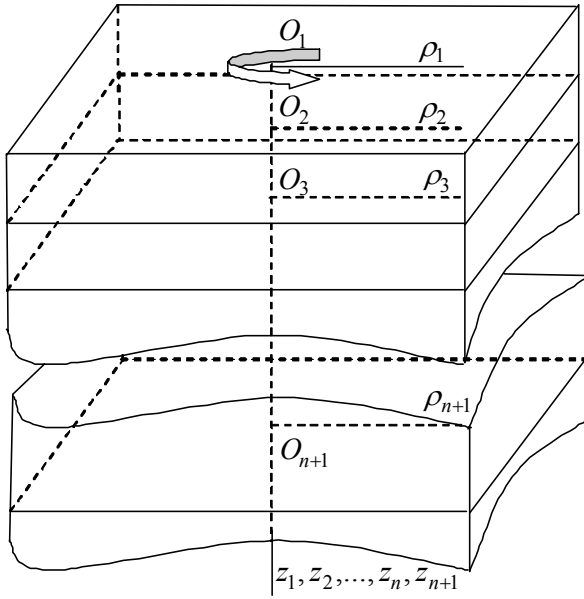


Рис. 1. Многослойное основание

$\tilde{\tau}_{\varphi zk} = \frac{\tau_{\varphi zk}}{M}$ ,  $\tilde{\tau}_{\varphi rk} = \frac{\tau_{\varphi rk}}{M}$ ,  $\tilde{\sigma}_{zk} = \frac{\sigma_{zk}}{M}$ , где  $l$ ,  $M$  – характерные величины ( $[l] = \text{м}$ ,  $[M] = \text{Па}$ ). В дальнейшем тильды будем опускать. Все рассуждения и вычисления будем проводить с безразмерными величинами.

#### Метод решения

Задача об определении напряженно-деформированного состояния изотропного слоя, который скручивается касательными напряжениями, приложенными к граничным плоскостям  $z = 0$  и  $z = h$  и зависят лишь от радиальной координаты  $\rho$ , сводится к решению дифференциального уравнения [9]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{u}{\rho^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

где  $u(\rho, z) = u_{\varphi}(\rho, z)$ .

Ненулевые компоненты напряженно-деформированного состояния связаны с функцией  $u(\rho, z)$  соотношениями:

$$\tau_{\varphi \rho} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{u}{\rho} \right), \quad \tau_{\varphi z} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Для решения задачи используем преобразование Ханкеля первого порядка:

$$\bar{f}(p) = \int_0^{\infty} \rho f(\rho) J_1(p\rho) d\rho, \quad f(\rho) = \int_0^{\infty} p \bar{f}(p) J_1(p\rho) dp.$$

Как показано в [3], в пространстве трансформант напряжения и перемещения в слое можно представить

в виде линейных комбинаций вспомогательных функций  $\gamma(p)$  и  $\delta(p)$ , связанных с напряжениями и перемещениями на верхней границе слоя такими соотношениями:

$$\bar{u}(p, z) = \frac{1}{\mu} (\gamma chpz + \delta shpz), \quad (3)$$

$$\bar{\tau}_{\varphi z}(p, z) = p (\gamma shpz + \delta chpz), \quad (4)$$

где 
$$\gamma = \mu \bar{u}(p, 0), \quad \delta = \frac{1}{p} \bar{\tau}_{\varphi z}(p, 0). \quad (5)$$

Таким образом, для решения задачи необходимо знать по две вспомогательные функции для каждого из слоев основания. Следовательно, задача об определении НДС  $n$ -слойного основания сводится к нахождению  $2n$  вспомогательных функций. Построим рекуррентные соотношения, которые связывают вспомогательные функции  $k$ -го и  $k+1$ -го слоев.

Запишем условия сопряжения слоев в пространстве трансформант Ханкеля:

$$\bar{u}_{k+1}(p, 0) = \bar{u}_k(p, h_k) + m_k \bar{\tau}_{\varphi zk}(p, h_k),$$

$$\bar{\tau}_{\varphi zk+1}(p, 0) = \bar{\tau}_{\varphi zk}(p, h_k).$$

С учетом (3)–(5) последние соотношения запишем в виде

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1} = & \left( \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} C_k + \mu_{k+1} m_k p S_k \right) \gamma_k + \\ & + \left( \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} S_k + \mu_{k+1} m_k p C_k \right) \delta_k, \\ \delta_{k+1} = & S_k \gamma_k + C_k \delta_k, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $C_k = chp_k$ ,  $S_k = shp_k$ ,  $p_k = ph_k$ .

Из граничных условий мы можем определить одну вспомогательную функцию  $\delta_1$  и задача свелась к нахождению  $\gamma_1$ . Остальные вспомогательные функции можно найти по рекуррентным формулам (6). Можно доказать, что как и в случае полного контакта слоев основания, вспомогательные функции слоя линейно зависимы и связаны соотношением [3]:

$$\gamma_k = -A_k \delta_k. \quad (7)$$

Функции  $A_k$  будем называть функциями податливости многослойного основания.

Построим рекуррентные соотношения, которые связывают функции податливости соседних слоев. Вычислим  $\gamma_{k+1}$  двумя способами.

С одной стороны:

$$\begin{aligned} \gamma_{k+1} = & -A_{k+1} \delta_{k+1} = -A_{k+1} (S_k \gamma_k + C_k \delta_k) = \\ = & A_{k+1} (S_k A_k - C_k) \delta_k. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\gamma_{k+1} = \left[ -A_k \left( \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} C_k + \mu_{k+1} m_k p S_k \right) + \left( \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} S_k + \mu_{k+1} m_k p C_k \right) \right] \delta_k. \quad (9)$$

Из соотношений (8) и (9) находим рекуррентные соотношения, которые связывают функции податливости соседних слоев основания:

$$A_k = \frac{A_{k+1} C_k + \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} S_k + \mu_{k+1} m_k p C_k}{A_{k+1} S_k + \frac{\mu_{k+1}}{\mu_k} C_k + \mu_{k+1} m_k p S_k} = \frac{T_k + \mu_k m_k p + \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}} A_{k+1}}{1 + \mu_k m_k p T_k + \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}} A_{k+1} T_k}. \quad (10)$$

где  $T_k = thp_k$ .

Отметим, что при  $m_k = 0$ , мы получаем формулы, которые совпадают с известными для задачи о кручении многослойного основания со сцепленными слоями [3].

Как видим, для начала расчета функций податливости необходимо знать функции податливости полупространства. Если полупространство абсолютно жесткое, то перемещения на его верхней границе отсутствуют, следовательно  $\gamma_{n+1} = 0$ . Поэтому его функция податливости равна нулю  $A_{n+1} = 0$ . Для определения функции податливости упругого полупространства рассмотрим слой, лежащий на абсолютно-жестком полупространстве. Устремив толщину слоя к бесконечности, получим, что функция податливости упругого полупространства  $A_{n+1} = 1$ .

Таким образом, определив матрицы податливости по формулам (10) мы можем найти вспомогательные функции  $\delta_k$  слоев по формулам (6), которые с учетом соотношений (7), представим в такой форме:

$$\delta_{k+1} = S_k \gamma_k + C_k \delta_k = (C_k - S_k A_k) \delta_k. \quad (11)$$

Функции  $\gamma_k$  найдем из соотношений (7).

На базе предложенного математического аппарата

**Таблица 1** – Коэффициенты упругих связей

| №     | 1 | 2    | 3   | 4 | 5  | 6   | 7 | 8  | 9   | 10 | 11 |
|-------|---|------|-----|---|----|-----|---|----|-----|----|----|
| $m_1$ | 0 | 0,01 | 0,1 | 1 | 10 | 0   | 0 | 0  | 0,1 | 1  | 10 |
| $m_2$ | 0 | 0,01 | 0,1 | 1 | 10 | 0,1 | 1 | 10 | 0   | 0  | 0  |

построено программное обеспечение, позволяющее с заданной точностью находить компоненты НДС многослойного основания с упругими связями между слоями, которое находится в условиях осесимметричного кручения. Сложность предложенного алгоритма растет линейно с увеличением количества слоев основания. Этот алгоритм может быть применен для многослойных оснований с любым конечным количеством слоев без потери точности.

### Численные результаты и выводы

Расчеты приведены для двухслойного пакета, упруго сцепленного с упругим полупространством. Упругие характеристики основания:  $h_1 = h_2 = 1$ ;  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$ ,  $a = 1$ ,  $q = 1$ .

Граничные условия:  $\sigma_{z1}(\rho, 0) = 0$ ,

$$\tau_{\varphi z1}(\rho, 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & 0 < \rho < a - \varepsilon, \\ \frac{q}{4\pi a \varepsilon}, & a - \varepsilon < \rho < a + \varepsilon. \end{cases}$$

Из граничных условий определяем, что

$$\delta_1 = \frac{q}{4\pi a} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \frac{\rho J_1(\rho p)}{\varepsilon} d\rho = \frac{q J_1(ap)}{2\pi p}.$$

Номера графиков на рисунках указывают на величины коэффициентов упругих связей, при которых проводились расчеты (таблица 1).

Анализ рис. 2–5 позволяет сделать выводы, что одновременное пропорциональное увеличение величин коэффициентов упругих связей приводит к уменьшению напряжений  $\tau_{\varphi z1}(\rho, h_1)$ ,  $\tau_{\varphi z2}(\rho, h_2)$  и увеличению модулей перемещений  $u_1(\rho, h_1)$ ,  $u_2(\rho, h_2)$ .

Из анализа графиков приведенных на рис. 6–9, приходим к выводу, что упругие связи между вторым слоем основания и полупространством менее существенно влияют на распределение напряжений  $\tau_{\varphi z1}(\rho, h_1)$  и перемещений  $u_1(\rho, h_1)$  точек нижней границы первого слоя, по сравнению с упругими связями на общей границе первого и второго слоев.

В дальнейшем планируется более подробно исследовать влияние упругих связей на распределение напряжений и перемещений в слоях многослойного основания с большим количеством слоев.

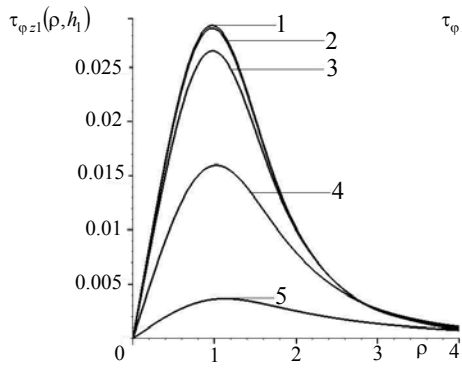


Рис. 2. Напряжения в точках общей границы слоев

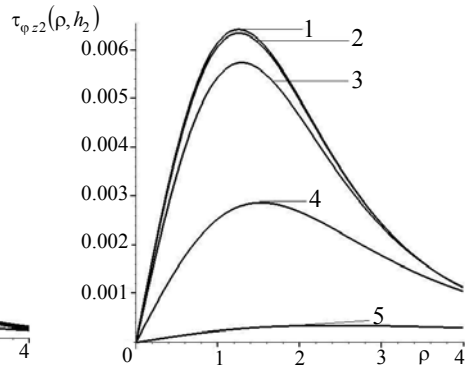


Рис. 3. Напряжения в точках нижней границы второго слоя

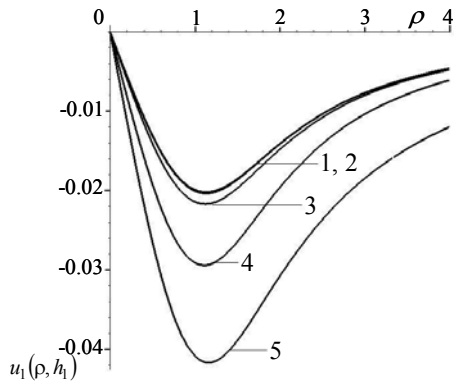


Рис. 4. Перемещения точек нижней границы первого слоя

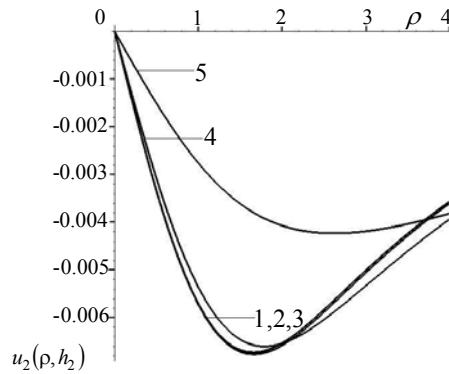


Рис. 5. Перемещения точек нижней границы второго слоя

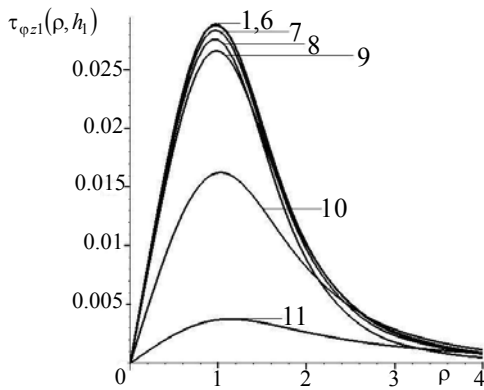


Рис. 6. Напряжения в точках общей границы слоев

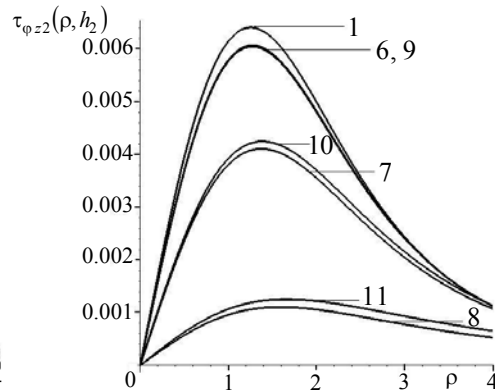


Рис. 7. Напряжения в точках нижней границы второго слоя

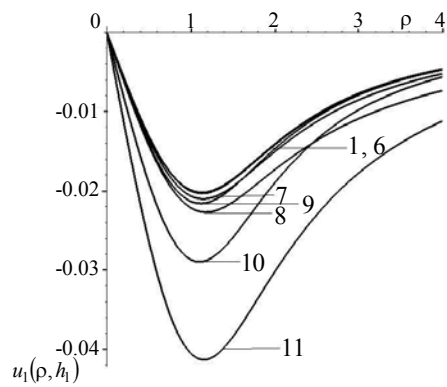


Рис. 8. Перемещения точек нижней границы первого слоя

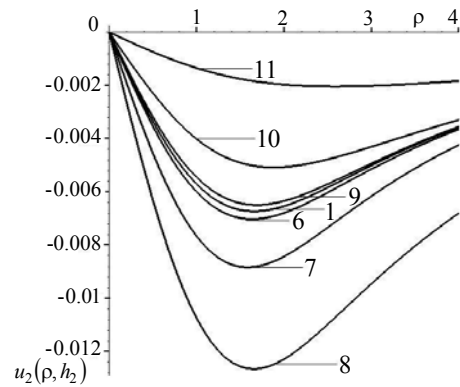


Рис. 9. Перемещения точек нижней границы второго слоя

**Выводы**

Полученная математическая модель дает возможность получить точные решения задачи о кручении многослойного основания с упругими связями между слоями в виде интегралов Ханкеля. В результате численных экспериментов было показано, что наличие упругих связей тем сильнее влияет на распределение напряжений и перемещений, чем ближе точка к верхней границе основания. Наличие упругих связей приводит к уменьшению напряжений  $\tau_{\varphi z1}(\rho, h_1)$ ,  $\tau_{\varphi z2}(\rho, h_2)$  в точках нижней границы первого и второго слоев в этих же точках по сравнению со случаем полного контакта слоев.

**Список литературы**

1. Грилицкий Д. В. Кручения двохшарового пружного середовища / Д. В. Грилицкий // Прикладна механіка. – 1961. – Т. 7, Вып.1. – С. 37–42.
2. Петришин В. И. К кручению многослойного основания / В. И. Петришин // Прикл. механика. – 1968. – Т. 39. – № 1. – С. 3–23.
3. Величко І. Г. Задача про скрут півпростору періодичної структури / І. Г. Величко, Є. В. Стеганцев // Вісник

Запорізького державного університету. Сер. Фізико-математичні науки. Біологічні науки. – 2000. – № 2. – С. 32–37.

4. Приварников А. К. Решение граничных задач теории упругости для многослойных оснований / А. К. Приварников. – Днепропетровск : ДГУ, 1976. – 60 с.
5. Шевляков Ю. А. Матричные алгоритмы в теории упругости неоднородных сред / Ю. А. Шевляков. – К. : Вища школа, 1977. – 215 с.
6. Jones J. P. Waves at a flexibly bonded interface / J. P. Jones, J. S. Whitter // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. – 1967. – Vol. 34, № 4. – P. 178–183.
7. Годес Ю. Я. Функции податливости многослойного основания с упругими связями между слоями / Ю. Я. Годес // Нелинейные задачи гидроаэромеханики и теории упругости : межвуз. сб. научн. тр. – Днепропетровск, 1987. – С. 92–97.
8. Антоненко Н. Н. Пространственная деформация многослойного основания с упругими связями между слоями / Н. Н. Антоненко, И. Г. Величко // Вісник Донецького національного університету. Сер. А : Природничі науки. – 2011. – № 1. – С. 27–31.
9. Эйшинский А. М. Кручение анизотропных и неоднородных тел. / А. М. Эйшинский. – Днепропетровск : Полиграфист, 1999. – 389 с.

Одержано 06.03.2014

**Антоненко Н.М., Величко І.Г. Задача про скрут багатшарової основи з пружними зв'язками між шарами**

*На основі методу функцій податливості побудовано розв'язок першої основної граничної задачі для багатшарової основи з пружними зв'язками між шарами, яка знаходиться в умовах осесиметричного скруту. Проаналізовано вплив коефіцієнтів пружних зв'язків на розподіл напружень та переміщень у шарах двохшарового пакету пружно зчепленого з півпростором.*

**Ключові слова:** багатшарова основа, пружні зв'язки, осесиметричний скрут, метод функцій податливості, інтегральне перетворення Ханкеля.

**Antonenko N., Velichko I. Problem of multilayer base with elastic connections between the layers under axisymmetric torsion**

*Multilayer basis with elastic connections between the layers under axisymmetric torsion is considered. The technique is based on the compliance functions method. The influence of the coefficients of elastic connections on the distribution of stresses and displacements in the layers of a two-layer basis elastically coupled to the semi-space is researched.*

**Key words:** multilayer basis, elastic connections, axisymmetric torsion, method of compliance function, the integral Hankel transformation.