

УДК 539.371

Канд. фіз.-мат. наук С. А. Левчук, А. А. Хмельницький

Запорізький національний університет, м. Запоріжжя

## АПРОКСИМАЦІЯ СТАТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ КРУГЛИХ ПЛАСТИН РІЗНИХ ПРОФІЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТРИЦЬ ТИПУ ГРІНА

*Робота присвячена моделюванню напружено-деформованого стану круглих пластин різних профілів шляхом апроксимації їх кільцевими пластинами дискретно-змінної товщини. Застосування апарату функцій типу Гріна та матричної алгебри дозволило побудувати компактний обчислювальний алгоритм розв'язання досліджуваної задачі при практично довільній кількості секцій у складеному тілі, яке застосовувалося при моделюванні.*

**Ключові слова:** кільцева пластина, крайова та складена задача, складена конструкція, матриця типу Гріна, матрична алгебра.

### Вступ

У даній роботі розглянуто моделювання статичного деформування круглих пластин різних профілів шляхом апроксимації їх кільцевими пластинами дискретно-змінної товщини. Такий підхід до розв'язання задачі не є новим. Наприклад, він був викладений у [1], проте в даній роботі застосування апарату функцій Гріна та матричної алгебри дозволило побудувати компактний обчислювальний алгоритм розв'язку розглянутої задачі при практично довільній кількості секцій у складеному тілі, яке застосовувалося при моделюванні.

Попередня розробка даної проблеми була здійснена у роботі [6]. Роботи [9–11] також були присвячені дослідженню деяких питань розрахунку деформування круглих пластин змінної товщини. У [9], наприклад, розглядався метод розв'язання задач деформування тонких пластин змінної товщини за допомогою функції комплексної змінної. За припущенням профіль пластинки є симетричним відносно її серединної площини, і вона деформується силами, що діють у цій площині. Розглянуто задачу про однобічне розтягання нескінченної пружної пластини, що послаблена круговим отвором. У [10] запропоновано енергетичний підхід до розв'язання нелінійних задач вигину гнучких круглих пластин змінної товщини. Був отриманий вираз потенційної енергії мембранних напружень, що дозволило оцінити роль зусиль у загальній енергії пластинки. Показано також вплив змінної товщини на напружено-деформований стан круглої пластинки. У [11] було викладено обчислювальну процедуру для розрахунку кільцевої пластини із неперервною зміною товщини вздовж радіуса під дією довільно розподіленого поперечного навантаження. Гладка діаграма жорсткості на згин апроксимувалася за допомогою дискретної східчастої функції. Використовувався метод послідовної покрокової редукції.

### Матеріали та методика досліджень

Попередній вивід матриць типу Гріна, за допомогою яких записується остаточний розв'язок задачі про розрахунок статичного деформування круглої пластини дискретно-змінної товщини, осьовий переріз якої зображено на рис. 1, було зроблено у [7]. При цьому, згаданий розв'язок задачі прийняв вигляд:

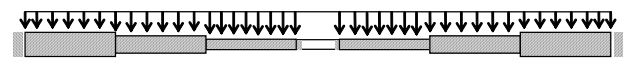


Рис. 1. Осьовий переріз кільцевої складеної пластини

$$W_k(r) = \sum_{l=0}^n \int_0^{R_{l+1}} G_l(r, \xi) \bar{F}_l(\xi) d\xi, \quad (1)$$

$$\text{де } G_l(r, \xi) = \begin{pmatrix} G_{l1}(r, \xi) & G_{l2}(r, \xi) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

$$\bar{F}_0(\xi) = F_1(\xi), \quad \bar{F}_n(\xi) = F_n(\xi), \quad \bar{F}_l(\xi) = (F_l(\xi) \quad F_{l+1}(\xi))^T, \\ l = 1, 2, \dots, n-1, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Тут  $W$  – вісесиметричний нормальний прогин серединної поверхні пластини,  $F$  – права частина, що враховує поверхневе нормальне навантаження та фізичні характеристики об'єкта,  $G_l(r, \xi)$  – побудовані матриці типу Гріна для розглянутої задачі (більш докладно про матриці Гріна див. [7]),  $n$  – кількість секцій у складеному об'єкті.

Дана стаття є логічним продовженням робіт [6, 7].

### Теоретичні результати та їх аналіз

Слід зазначити, що при обчисленні оберненої матриці  $A^{-1}$ , елементи якої необхідні при побудові відпо-



Вектори  $C^2, C^3, \dots, C^n$  визначаються з рекурентних співвідношень:

$$\begin{aligned}
 C^2 &= (A^{12})^{-1}(F^1 - A^{11}C^1), \\
 C^3 &= (A^{23})^{-1}(F^2 - A^{22}C^2), \\
 &\dots\dots\dots \\
 C^{n-1} &= (A^{n-2n-1})^{-1}(F^{n-2} - A^{n-2n-2}C^{n-2}), \\
 C^n &= (A^{n-1n})^{-1}(F^{n-1} - A^{n-1n-1}C^{n-1}). \quad (9)
 \end{aligned}$$

Як бачимо, при розрахунках за викладеною вище схемою доводиться мати справу не з матрицями коефіцієнтів при невідомих розміром  $4n \times 4n$ , а з матрицями розміром  $4 \times 4$ . Це дозволяє уникнути певних обчислювальних складностей.

**Обчислювальні результати та їх аналіз**

Із застосуванням вказаних вище підходів моделювалося статичне деформування деяких типів круглих пластин різних профілів з отворами (рис. 2, 3). При цьому досліджувалися пластини апроксимувалися пластинами дискретно-змінної товщини (див. рис. 1).

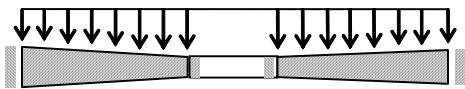


Рис. 2. Осьовий переріз круглої пластини з отвором першого типу

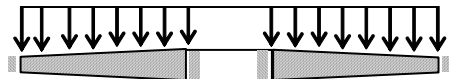


Рис. 3. Осьовий переріз круглої пластини з отвором другого типу

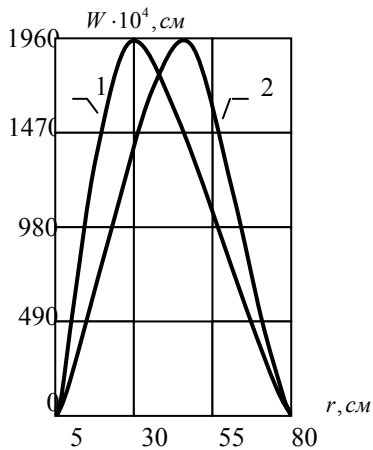


Рис. 4. Нормальні прогини

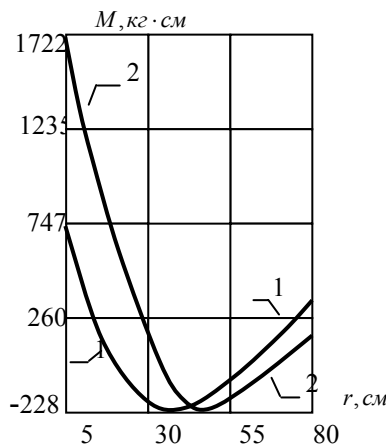


Рис. 5. Згинальні моменти

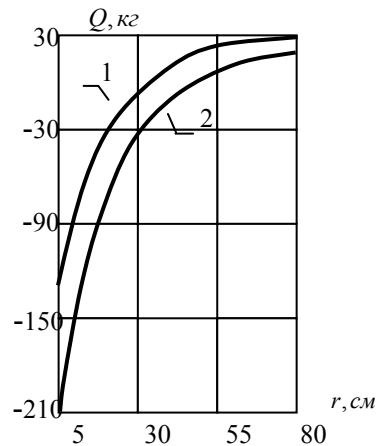


Рис. 6. Поперечні сили

Деякі обчислені характеристики напружено-деформованого стану наведені на рис. 4–6 (цифрами на графіках позначені криві для пластини першого та другого типів відповідно). Розрахунок виконувався для наступних значень вхідних параметрів. Радіуси кільцевих секцій зростали від 5 см до 80 см з кроком 1 см при апроксимації обох розглянутих типів кільцевих пластин (див. рис. 2, 3). Товщини кільцевих секцій зростали від 1 см до 1,75 см з кроком 0,01 см при апроксимації кільцевої пластини першого типу (див. рис. 2), та зменшувалися від 1,75 см до 1 см з кроком 0,01 см при апроксимації кільцевої пластини другого типу (див. рис. 3). Кільцеві пластини обох типів знаходилися під дією зовнішнього нормального поверхневого навантаження інтенсивністю  $1 \text{ кг/см}^2$ , при цьому  $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$ ,  $\nu = 0,25$ .

**Список літератури**

1. Биргер М. А. Прочность, устойчивость, колебания : в 3-х т. / Биргер М. А., Пановко Я. Г. – М. : Машиностроение, 1968. – Т. 1. – 832 с.
2. Гавеля С. П. Экспериментальная корректировка расчета подрессоренной кольцевой пластины / С. П. Гавеля, П. Ф. Кульбашный, С. А. Левчук // Запорож. ун-т. – Запорожье, 1992. – 6 с. – Деп. в УкрИНТЭИ 17.10. 92, № 1668. – Ук92.
3. Использование экспериментальных возможностей при расчете контактирования упругих пластин / [С. П. Гавеля, Д. Б. Головки, П. Ф. Кульбашный, С. А. Левчук] // Запорож. ун-т. – Запорожье, 1992. – 7с. – Деп. в УкрИНТЭИ 17.08.92, № 1285 – Ук92.
4. Исследование подрессоривания вулканизационной диафрагмы / [С. П. Гавеля, Д. Б. Головки, П. Ф. Кульбашный, С. А. Левчук] // Тезисы докл. Всесоюз. науч.-технич. конф. «Методы потенциала и конечных элементов в автоматизированных исследованиях инженерных конструкций». – К., 1991. – 21 с.
5. Экспериментальная корректировка расчета сложного напряженно-деформированного состояния составных тонкостенных конструкций / [С. П. Гавеля, Д. Б. Головки, П. Ф. Кульбашный, С. А. Левчук] // Тезисы докл. 4-го симпозиума «Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии». – К., 1992. – 19 с.

6. Левчук С. А. Про деякі способи апроксимації круглих пластин різних профілів / С. А. Левчук, Ю. О. Сисоєв // Вісник Запорізького національного університету. Сер. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя : ЗНУ, 2008. – № 1. – С. 113–117.
7. Левчук С. А. Матриця Гріна задачі про статичне деформування складеної кільцевої пластини / С. А. Левчук // Вісник Запорізького державного університету – Сер. Фізико-математичні науки. – Запоріжжя: ЗДУ, 2003. – № 1. – С. 55–60.
8. Левчук С. А. Матриці Гріна рівнянь та систем еліптичного типу для дослідження статичного деформування складених тіл : дис. ... канд. фіз.-мат. наук : 01.02.04 / Левчук Сергій Анатолійович. – Запоріжжя : ЗДУ, 2002. – 150 с.
9. Шарафутдинов Г. З. Деформирование тонких пластинок переменной толщины / Г. З. Шарафутдинов // Соврем. пробл. мех. – М., 1999. С. 255–256.
10. Колмогоров Г. Л. Особенности поведения круглой пластины переменной толщины под нагрузкой / Г. Л. Колмогоров, В. Р. Кулиев // Вестн. ПГТУ. Динам. и проч. машин. – 2000. – №1. – С. 42–48.
11. Yeh Kai-yuan On the nonaxisymmetric loading of nonhomogeneous annular plates of variable thickness/ Yeh Kai-yuan, Kue Jien-huo, F.P.J. Rimrott// Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1997. – 64, № 2. – P. 307–312.

*Одержано 15.02.2016*

**Левчук С.А., Хмельницький А.А. Аппроксимация статического деформирования круглых пластин разных профилей при помощи матриц типа Грина**

*Работа посвящена моделированию напряженно-деформированного состояния круглых пластин различных профилей путем аппроксимации их кольцевыми пластинами дискретно-переменной толщины. Применение аппарата функций типа Грина и матричной алгебры позволило построить компактный вычислительный алгоритм решения исследуемой задачи при практически произвольном количестве секций в составном теле, которое применялось при моделировании.*

**Ключевые слова:** *кольцевая пластина, гранично-составная задача, составная конструкция, матрица типа Грина, матричная алгебра.*

**Levchuk S., Khmelnytskyi A. Approximation the statics deformation of circular plates with different profiles with help the matrix of Green type**

*The work is devoted for modelling the strainly-deformed state of the circular plates with different profiles. These plates had been approximated the circular plates with discrete-variable thickness. The matrix of Green type and algebra of matrix had been used what allow had been constructed compact computing algorithm for solution of research problem. The proposed method of calculation, had been generalised on the case n section in the circular plate.*

**Key words:** *circular plate, boundary-compound problem, compound construction, matrix of Green type, algebra of matrix.*