

УДК 539.39

Н.В.Здолбіцька<sup>1</sup>, М.В.Делявський<sup>1,2</sup><sup>1</sup>Луцький національний технічний університет, м. Луцьк<sup>2</sup>Технологічно-природничий університет

### МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛИТ НА ПРУЖНИХ ОСНОВАХ МЕТОДОМ КОНСТРУКЦІЙНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

*Запропоновано модель напружено-деформованого стану тонких ортотропних плит складної конфігурації на пружних основах. Для числового розв'язання математичної моделі використано метод конструкційних елементів.*

Ключові слова: моделювання, метод конструкційних елементів, напружено-деформований стан, координатні функції, точки колокації.

Актуальність проблеми. Плити на пружній основі є найпоширенішими елементами інженерних конструкцій. Вони використовуються як фундаменти будинків, покриття доріг, тротуарів, аеродромів, як проїжджа частина мостів та ін. Наявність пружної основи, на якій покладена плита як основа конструкції, вносить додаткові збурення в розподіл напружень в елементах плити. Все це вимагає побудови нових уточнених моделей плит на пружній неоднорідній основі та розробки нових аналітико – числових підходів до оцінки напруженого стану та граничної рівноваги плити.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Для розрахунку напружено-деформованого стану конструкцій розроблені різні аналітичні та числові методи. Найпоширенішим із них є числовий метод, названий методом скінчених елементів [1]. Смирнов В.А. застосував метод сил до розрахунку пластин складної форми [2]. Великанов П.Г. запропонував метод непрямих граничних елементів (МНГЕ) для розрахунку ізотропних пластин на складній двопараметричній пружній основі [3]. Лучко Й. дослідила математичну модель проїжджої частини моста, тонкої ізотропної залізобетонної плити, що описується рівнянням Софі Жермен [4].

Постановка задачі. У даній статті розглядається плита, покладена на аналогову пружну основу. В аналогових моделях розрахунок напружено-деформованого стану проводиться лише для плити, дія основи замінюється невідомою реакцією  $r(x_1, x_2)$ , прикладеною до плити знизу. Відповідно до цього рівняння згину тонкої ортотропної плити на аналоговій пружній основі має вигляд [5,6]:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = q(x_1, x_2) - r(x_1, x_2), \quad (1)$$

де  $D_{ij}$  – жорсткості плити на згин та кручення;  $q(x_1, x_2)$  – поперечне навантаження прикладене до верхньої сторони плити.

Це є аналогова модель пружної основи з двосторонніми в'язями. У таких моделях реакція основи не може бути визначена, а мусить бути певним чином змодельована. Найпростішою гіпотезою є гіпотеза Вінклера [5], згідно з якою реакція основи в кожній точці поверхні плити є пропорційна прогину плити в цій точці, тобто:

$$r(x_1, x_2) = K_0 w(x_1, x_2). \quad (2)$$

Задача згину тонкої ортотропної плити на пружній основі Вінклера була розв'язана в статті [5].

Якщо, окрім прогину, реакція є також пропорційна дотичним переміщенням нижньої поверхні плити [6], тобто

$$r(x_1, x_2) = K_0 w + K_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} + K_2 \frac{\partial w}{\partial x_2}, \quad (3)$$

де  $K_i$  ( $i = \overline{0,2}$ ) – коефіцієнти жорсткості основи на поперечне і дотичні переміщення, назвемо таку модель трипараметричною моделлю пружної основи.

Метод розв'язання. Прогин плити представлено у вигляді [5,6]:

$$w(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{v=1}^4 \left\{ R_{(v)2k}^{[1]} W_{(v)2k}^{[1]}(x_1, x_2) + R_{(v)1k}^{[1]} W_{(v)1k}^{[1]}(x_1, x_2) + R_{(v)2k}^{[2]} W_{(v)2k}^{[2]}(x_1, x_2) + R_{(v)1k}^{[2]} W_{(v)1k}^{[2]}(x_1, x_2) \right\} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}^*(x_1, x_2) \quad (4)$$

де функції  $W_{vk}^{[j]}(x_1, x_2)$ ,  $W_{(v+4)k}^{[j]}(x_1, x_2)$  за аналогією з методом скінчених елементів названо координатними функціями прогину плити, а  $W_{mn}^*$  – відповідно функціями навантаження плити відносно прогину. Аналогічно представлено тангенціальні переміщення  $u_1(x_1, x_2)$ , згинальні моменти  $M_{11}(x_1, x_2)$ ,  $M_{22}(x_1, x_2)$ , крутильний момент  $M_{12}(x_1, x_2)$ , поперечні сили  $Q_1(x_1, x_2)$ ,  $Q_2(x_1, x_2)$ , узагальнені поперечні сили  $V_1(x_1, x_2)$ ,  $V_2(x_1, x_2)$ . Сенс введених функцій такий самий як для прогину.

З метою ефективного використання отриманого розв'язку представляємо його у матричній формі:

$$w(x_1, x_2) = [[W]] \{ \{R\} \} + W^* \quad (5)$$

Подібно записуються вирази для переміщень, моментів і поперечних сил:

$$u_1 = [[U]] \{ \{R\} \} + U^*, \quad u_2 = [[V]] \{ \{R\} \} + V^*; \quad (6)$$

$$M_{11} = [[X]] \{ \{R\} \} + X^*, \quad M_{22} = [[Y]] \{ \{R\} \} + Y^*; \quad (7)$$

$$M_{12} = [[Z]] \{ \{R\} \} + Z^*; \quad (8)$$

$$Q_1 = [[T]] \{ \{R\} \} + T^*, \quad Q_2 = [[G]] \{ \{R\} \} + G^*; \quad (9)$$

$$V_1 = [[J]] \{ \{R\} \} + J^*, \quad V_2 = [[H]] \{ \{R\} \} + H^*. \quad (10)$$

Сукупність виразів (5)-(10) утворюють математичну модель тонкої ортотропної плити на пружних основах.

У даній роботі побудовано аналітично – числовий метод розрахунку плитових конструкцій, який по суті близький до методу скінчених елементів, при цьому відрізняється від нього вищою точністю розрахунку. Цей метод названо методом конструкційних елементів (МКЕ).

Суть методу конструкційних елементів пояснимо на прикладі тонкої ортотропної плити складної конфігурації.

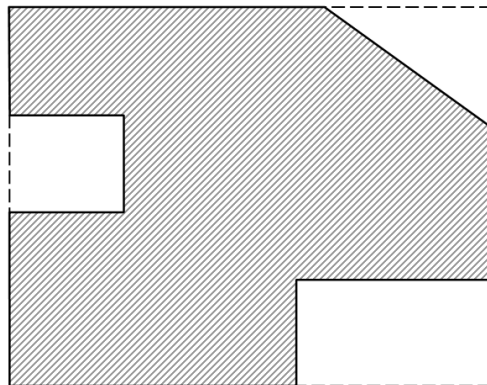


Рис. 1 – Приклад плити складної конфігурації

Потракуємо цілу плиту як один елемент. Назвемо його конструкційним елементом плити.

Щоб розрахувати конструкційний елемент, треба мати відповідну йому математичну модель. Щоб розв'язати цю проблему, введемо в розгляд поняття «узагальненого конструкційного елемента». Узагальненим конструкційним елементом назовемо розширену прямокутну область, яка повністю містить в собі розглядуваний конструкційний елемент. Введення узагальненого конструкційного елемента дозволяє розв'язувати задачу для розширеної прямокутної області, а граничні умови записувати на реальному криволінійному контурі.

Аналіз числових результатів. Розглянемо метод розрахунку плит складної конфігурації на пружній основі Вінклера на прикладі П-подібної плити, зображеної на рис. 2.

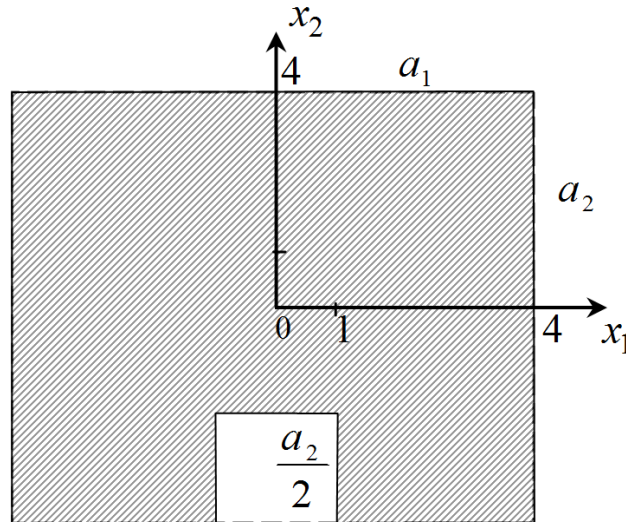


Рис. 2 – Схема П-подібної плити

Для розрахунку вибрано прямокутну залізобетонну П-подібну плиту, защеплену по контуру, вписану у прямокутну плиту з розмірами  $2a_1 = 8m$ ,  $2a_2 = 8m$  і товщиною  $h = 0.3m$  під сталим навантаженням  $q = 1.96 \cdot 10^3 N/m^2$ . В обчисленнях залізобетонна плита замінена однорідною ортотропною плитою з усередненими модулями пружності, які визначаються на підставі формул, запропонованих Губером [7]. До розрахунків вибрано такі значення жорсткостей плити:

$$E_b = 27GPa; \quad E_s = 2 \cdot 10^2 GPa; \\ G_b = 15GPa; \quad \nu_b = 0.14; \quad K_0 = 5.88 \cdot 10^7 N/m^3.$$

Граничні умови на краях плити задовольнялися методом колокацій, тобто лише в окремих точках краю плити  $x_1 = \pm a_1$  та  $x_2 = \pm a_2$ , вибраних за формулою [6]:

$$x_{kj} = \frac{k^* (x_{2j} - x_{1j})}{K_* + 1} + x_{1j},$$

де  $K_*$  – кількість точок колокації;  $k^*$  – номер точки колокації на відрізку  $a_j$ ,  $j=1,2$ ;  $x_{kj}$  – координати точок колокації.

Отримані числові результати в системі Maple для різних умов обпирання та закріплення по контуру плити. Розроблено програму, яка сама генерує матрицю відповідно до граничних умов і вибору кількості точок колокації. При  $k = 8$  маємо 16 рівнянь з 16 невідомими, при  $k = 12$  маємо 24 рівняння і т.д. залежно від точності наближення розв'язку.

На основі отриманих результатів проведено обчислення прогину, переміщень у кожній точці плити.

У таблиці 1 наведено значення прогину П-подібної плити для 24 точок колокації у відповідних перерізах плити:  $x_1 = -4$ ,  $x_1 = -3$ ,  $x_1 = 0$ . Так як плита симетрична відносно вісі OY, то в таблиці наведено значення тільки для від'ємної її частини.

Таблиця 1

Прогин плити у відповідних її точках

$x_2$	$w(x_1=-4)$	$w(x_1=-3)$	$w(x_1=0)$
4.0	0	-1.30E-14	0
3.6	8.81E-17	3.92E-07	8.81E-17
3.2	1.10E-16	1.13E-06	1.10E-16
2.8	1.24E-16	1.86E-06	1.24E-16
2.4	1.22E-16	2.45E-06	1.22E-16
2.0	9.76E-16	2.88E-06	9.76E-16
1.6	4.64E-16	3.15E-06	4.64E-16
1.2	8.22E-16	3.29E-06	8.22E-16
0.8	1.25E-15	3.30E-06	1.25E-15
0.4	1.59E-15	3.22E-06	1.59E-15
0.0	1.70E-15	3.06E-06	1.70E-15
-0.4	1.59E-15	2.87E-06	1.59E-15
-0.8	1.24E-15	2.65E-06	1.24E-15
-1.2	8.06E-16	2.40E-06	8.06E-16
-1.6	4.45E-16	2.09E-06	4.45E-16
-2.0	9.76E-16	1.73E-06	9.76E-16
-2.4	1.03E-16	1.33E-06	–
-2.8	1.08E-16	9.17E-07	–
-3.2	9.86E-17	5.25E-07	–
-3.6	8.19E-17	1.84E-07	–
-4.0	0	2.76E-15	–

У таблиці 2 наведено значення переміщень плити П-подібної плити для 24 точок колокації у відповідних перерізах плити:  $x_2=4$ ,  $x_2=1.2$ ,  $x_2=-2$ ,  $x_2=-4$ . Так як плита симетрична відносно вісі ОУ, то в таблиці наведено значення для від'ємної її частини.

Таблиця 2

Переміщення плити у відповідних її точках

$x_1$	$U_1(x_2=4)$	$U_1(x_2=1.2)$	$U_1(x_2=-2)$	$U_1(x_2=-4)$
-4	1.41E-15	-2.08E-09	1.44E-15	-5.87E-07
-3.6	9.92E-16	-4.73E-07	-2.91E-07	-2.28E-07
-3.2	8.28E-16	-7.06E-07	-3.26E-07	5.06E-07
-2.8	5.90E-16	-7.68E-07	-2.04E-07	8.15E-07
-2.4	-1.48E-16	-7.15E-07	-2.24E-08	-1.28E-10
-2	-6.66E-16	-6.00E-07	1.37E-07	-2.01E-06
-1.6	-1.07E-16	-4.60E-07	2.29E-07	-4.46E-06
-1.2	-2.02E-16	-3.22E-07	2.43E-07	-6.14E-06
-0.8	2.69E-16	-2.00E-07	–	–
-0.4	-1.23E-16	-9.43E-08	–	–
0	-1.14E-22	-1.07E-16	–	–
0.4	1.23E-16	9.43E-08	–	–
0.8	-2.69E-16	2.00E-07	–	–
1.2	2.02E-16	3.22E-07	-2.43E-07	6.14E-06
1.6	1.07E-16	4.60E-07	-2.29E-07	4.46E-06
2	6.66E-16	6.00E-07	-1.37E-07	2.01E-06
2.4	1.48E-16	7.15E-07	2.24E-08	1.28E-10
2.8	-5.90E-16	7.68E-07	2.04E-07	-8.15E-07
3.2	-8.28E-16	7.06E-07	3.26E-07	-5.06E-07
3.6	-9.92E-16	4.73E-07	2.91E-07	2.28E-07
4	-1.41E-15	2.08E-09	-6.25E-15	5.87E-07

## Висновки

У роботі сформульовано модель задачі згину тонкої ортотропної плити складної конфігурації на пружних основах. Показано матричний спосіб представлення основних співвідношень для розв'язування методом конструкційних елементів. На конкретному прикладі проведені розрахунки для Вінклерівської моделі пружної основи. Використання більш складних моделей, звичайно, може вплинути на точність розрахунків, але не може змінити суті підходу і применшити значення отриманих результатів у сенсі їх оригінальності.

1. Гребенюк С.Н., Тимошина О.Н. Применение метода конечных элементов к задаче о винклеровском основании // Вісник Запорізького національного університету: Фізико-математичні науки. - Запоріжжя: ЗНУ, 2008. - №1. - С. 48-53.
2. Смирнов В.А. Расчет пластин сложного очертания. – М.: Стройиздат. 1978. – 300 с
3. Великанов П.Г. Метод граничных интегральных уравнений для решения задач изгиба изотропных пластин, лежащих на сложном двухпараметрическом упругом основании // Известия Саратовского университета. Т.8. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2008. – Вып. 1. – С. 36-42.
4. Лучко Й., Ігнатишин М. Диференціальне рівняння деформації плити та його застосування // Вісник ТДТУ. – 2009. – Том 14. – № 2. – С. 22-30.
5. Здолбіцька Н.В. Ортотропна прямокутна плита на пружній основі Вінклера //Наукові нотатки. Міжвузівський збірник (за напрямом „Інженерна механіка”). – Луцьк, 2005. – Вип. 17.– С. 145-153.
6. Здолбіцька Н.В., Делявський М.В. Напружено-деформований стан тонкої ортотропної плити на трипараметричній пружній основі. // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. – Донецьк, 2009. – Вип. 1. - С. 134-140.
7. Huber M.T.: Teoria płyt prostokątne różnokierunkowych. Lwów: Arch. Tow. Nauk.