

УДК 519.876.5; 621.313.33

П.Ф.Баховський, М.М.Євсюк, В.В.Лишук

Луцький національний технічний університет

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОЧЕРГОВОГО ПУСКУ АСИНХРОННИХ МОТОРІВ В ОДНОВУЗЛОВІЙ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНІЙ СИСТЕМІ

У статті пропонується математична модель вузла живлення асинхронних моторів, що живляться від спільного транс-форматора. Диференціальні рівняння електромеханічного стану записано безпосередньо в нормальній формі Коші. Просимульовано перехідні процеси.

Ключові слова: електромеханічна система, математичні моделі, диференціальні рівняння.

Задача вдосконалення методів математичного моделювання складних електромеханічних систем зі змінною структурою технічного призначення є актуальною і водночас складною проблемою електропостачання металургійних, хімічних, машинобудівних та інших підприємств.

У роботі пропонується математична модель одновузлової електромеханічної системи, що складається з силового трансформатора,  $n$  асинхронних моторів. Її важливою особливістю є те, що диференціальні рівняння електромеханічного стану записані безпосередньо в нормальній формі Коші, що усуває операцію обертання матриці коефіцієнтів на кожному часовому кроці інтегрування. Це значно підвищує точність аналізу, сприяє швидкодії обчислювального процесу, а основне, вперше уможливує аналіз тривалих перехідних процесів, які мають місце на практиці. Робота є безпосереднім продовженням попередніх публікацій авторів [1, 2, 3].

Математична модель системи складається зі структурних рівнянь і рівнянь елементів. Структурні рівняння вузла живлення записуємо на підставі законів Кірхгофа для електричних кіл (див. рис.1).

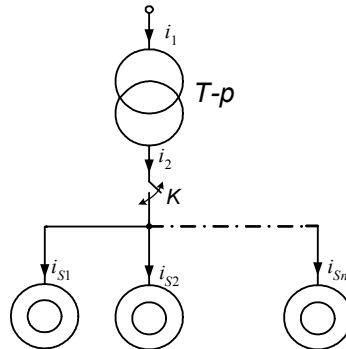


Рис.1. Структурна схема електромеханічної системи.

$$i_R + i_2 + \sum_{i=1}^n i_{Si} = 0, \quad u_2 = u_{Si} = u_R = V, \quad (1)$$

де  $i_R$ ,  $i_2$ ,  $i_S$  – колонки фазних струмів резистора, вторинної обмотки трансформатора, асинхронних моторів;  $u_R$ ,  $u_2$ ,  $u_S$ ,  $V$  – колонки фазних напруг резистора, трансформатора, асинхронних моторів і вузла живлення, відповідно. Тут і в подальшому струми фази С всіх елементів опущені, оскільки їх при потребі можна легко знайти за законом струмів Кірхгофа.

Рівняння трансформатора. Оскільки нелінійні властивості магнетопровода трансформатора у досліджуваній системі не відіграють значної ролі, то обмежимося диференціальними рівняннями ненасиченого пристрою. Запишемо їх безпосередньо в нормальній формі Коші [1]

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= A_1(u_1 - r_1 i_1) + A_2(u_2 - r_2 i_2); \\ \frac{di_2}{dt} &= A_{21}(u_1 - r_1 i_1) + A_2(u_2 - r_2 i_2), \end{aligned} \quad (2)$$

де  $u_1 = (u_{1A}, u_{1B})_t$  – колонка напруг мережі,  $i_1 = (i_{1A}, i_{1B})_t$ ,  $i_2 = (i_{2A}, i_{2B})_t$  – колонки струмів;  $r_1, r_2$  – резистивні опори;  $A_1, A_2, A_{21}, A_2$  – матриці коефіцієнтів

$$A_1 = G_T \begin{bmatrix} \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_T) & 0 \\ 0 & \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_T) \end{bmatrix}; \quad A_{12} = A_{21} = G_T \begin{bmatrix} -\alpha_1\alpha_2 & 0 \\ 0 & -\alpha_1\alpha_2 \end{bmatrix}; \quad A_2 = G_T \begin{bmatrix} \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_T) & 0 \\ 0 & \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_T) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Тут  $G_T = \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_T}$ , де  $\alpha_1, \alpha_2$  – обернені індуктивності розсіяння первинної та вторинної

обмоток,  $\alpha_T$  – основна обернена індуктивність трансформатора.

Розглядаючи трансформатор як елемент системи вважаємо, що первинна обмотка пристрою приведена до числа витків вторинної обмотки, що живить груповий вузол системи.

Рівняння асинхронного мотора. Рівняння асинхронного мотора записуємо подібно до рівнянь (2) трансформатора [1]

$$\begin{aligned} \frac{di_S}{dt} &= A_S(u_S - r_S i_S) + A_{SR}(\Omega \Psi_R - r_R i_R); \\ \frac{di_R}{dt} &= A_{RS}(u_S - r_S i_S) + A_R(\Omega \Psi_R - r_R i_R). \end{aligned} \quad (4)$$

де  $i_S = (i_{SA}, i_{SB})_t$ ,  $i_R = (i_{RA}, i_{RB})_t$  – колонки фазних струмів обмоток статора й приведених струмів ротора;  $r_S, r_R$  – опори обмоток статора й приведеної ротора;  $\Omega$  – матриця кутових швидкостей обертання

$$\Omega_R = \frac{\omega}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Матриці коефіцієнтів рівнянь моторів мають вигляд

$$A_S = \begin{bmatrix} \alpha_S(1 - \alpha_S(T + b_A i_A)) & -\alpha_S^2 b_B i_A \\ -\alpha_S^2 b_A i_B & \alpha_S(1 - \alpha_S(T + b_B i_B)) \end{bmatrix}; \quad A_R = \begin{bmatrix} \alpha_R(1 - \alpha_R(T + b_A i_A)) & -\alpha_R^2 b_B i_A \\ -\alpha_R^2 b_A i_B & \alpha_R(1 - \alpha_R(T + b_B i_B)) \end{bmatrix}; \quad (6)$$

$$A_{SR} = A_{RS} = \begin{bmatrix} -\alpha_S \cdot \alpha_R(T + b_A i_A) & -\alpha_S^2 b_B i_A \\ -\alpha_S^2 b_A i_B & -\alpha_S \cdot \alpha_R(T + b_B i_B) \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнти R, T,  $b_A$ ,  $b_B$ ,  $b$  знаходяться за такими формулами

$$R = \frac{1}{\alpha_S + \alpha_R + \rho}; \quad T = \frac{1}{\alpha_S + \alpha_R + \tau}; \quad (7)$$

$$b_A = b(2i_A + i_B); \quad b_B = b(i_A + 2i_B); \quad b = \frac{2}{3}(R - T)/i_m^2,$$

причому  $i_m$  – намагнечувальний струм машини;  $\alpha_S, \alpha_R$  – обернені індуктивності розсіяння;  $\tau, \rho$  – основні обернені статична та диференціальна індуктивності мотора

$$\tau = \left[ \frac{\Psi_m(i_m)}{i_m} \right]^{-1}; \quad \rho = \left[ \frac{d\Psi_m(i_m)}{di_m} \right]^{-1}. \quad (8)$$

Колонка повних потокозчеплень обмотки ротора  $\Psi_R = (\Psi_{RA}, \Psi_{RB})_t$  має вигляд

$$\Psi_R = \frac{i_S + i_R}{\alpha_m} + \frac{i_R}{\alpha_R}. \quad (9)$$

При відсутності насичення характеристика намагнечування вироджується в пряму  $i_m = \alpha_m \Psi_m$ , причому  $\tau = \rho = \alpha_m$ .

Модуль просторового вектора намагнечувальних струмів знаходимо за формулами

$$i_m = 2\sqrt{\frac{i_A^2 + i_A i_B + i_B^2}{3}}; \quad i_A = i_{SA} + i_{RA}; \quad i_B = i_{SB} + i_{RB}. \quad (10)$$

Рівняння електромагнетного стану мотора слід доповнити рівнянням механічного руху ротора для обчислення кутової швидкості, що фігурує в (5),

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p_0}{J}(M_E - M), \quad (11)$$

де  $p_0$  – число пар магнетних полюсів машини; J – момент інерції ротора;  $M_E$  – електромагнетний момент; M – механічний момент на валу.

Вираз для електромагнетного моменту  $M_E$  має вигляд

$$M_E = \sqrt{3} p_0 (i_{RA} i_{SB} - i_{RB} i_{SA}) / \alpha_m. \quad (12)$$

Математична модель вузла навантаження.

Продиференціювавши перший вираз (1), одержимо

$$\frac{di_2}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{di_{si}}{dt} = 0. \quad (13)$$

Розв'язуючи сумісно (2), (4) з урахуванням (13), отримано рівняння для визначення напруги у вузлі навантаження

$$V = AB, \quad (14)$$

де

$$A = \left[ A_2 + \sum_{i=1}^n A_{Si} \right]^{-1}; \quad (15)$$

$$B = -A_{21} (U_m - R_1 I_1) + A_2 R_2 I_2 + \sum_{i=1}^n A_{Si} R_{Si} I_{Si} - \sum_{i=1}^n A_{RSi} (-V_{Ri} + \Omega_i \Psi_{Ri} - R_{Ri} I_{Ri}).$$

Маючи значення  $V(t)$ , рівняння системи на кожному кроці інтегрування розпадається на незалежні рівняння окремих елементів.

Результати симуляції.

Просимульовано почерговий пуск 5-ти моторів від трансформатора. Перші три мотори А12-52-8А мають такі моменти навантаження:  $M_1=1600$  Н·м,  $M_2=1700$  Н·м,  $M_3=1800$  Н·м. Четвертий і п'ятий мотори (А13-62-8) запускаються через дві секунди після пуску перших трьох. Вони мають такі моменти навантаження:  $M_4=2200$  Н·м,  $M_5=3950$  Н·м.

Вхідна інформація:

Трансформатор:  $U_{1m} = 5150$  В,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 4000$  Гн<sup>-1</sup>,  $r_1 = r_2 = 0,015$  Ом,  $\alpha_T = 40$  Гн<sup>-1</sup>;

АМ1, АМ2, АМ3: (А12-52-8А):  $r_{SA} = r_{SB} = r_{SC} = 1,27$  Ом,  $r_R = 1,31$  Ом,  $\alpha_S = 39$  Гн<sup>-1</sup>,  $\alpha_R = 35,7$  Гн<sup>-1</sup>,  $\alpha_m = 1,16$  Гн<sup>-1</sup>,  $J = 64$  кг·м<sup>2</sup>,  $p_0 = 4$ ,  $P_{ном} = 350$  кВт.

АМ4, АМ5: (А13-62-8):  $r_{SA} = r_{SB} = r_{SC} = 0,76$  Ом,  $r_R = 0,72$  Ом,  $\alpha_S = 79$  Гн<sup>-1</sup>,  $\alpha_R = 65,8$  Гн<sup>-1</sup>,  $\alpha_m = 2,02$  Гн<sup>-1</sup>,  $J = 138$  кг·м<sup>2</sup>,  $p_0 = 4$ ;  $P_{ном} = 620$  кВт.

Характеристики кривих намагнечування першого, другого і третього моторів  $\psi_m = \psi_m(i_m)$ :

$$\psi_m = \begin{cases} a_1 i_m, & \text{якщо } i_m \leq b_1, \\ a_2 + a_3 k + a_4 \cdot k^2 + a_5 k^3, & \text{якщо } b_1 < i_m < b_2, \\ a_6 i_m + a_7, & \text{якщо } i_m \geq b_2, \end{cases} \quad (16)$$

де  $k = i_m - b_1$ .

Характеристики кривих намагнечування четвертого і п'ятого моторів  $\psi_m = \psi_m(i_m)$ :

$$\psi_m = \begin{cases} c_1 i_m + c_2 i_m^3 + c_3 i_m^5, & \text{якщо } i_m > d_1, \\ i_m / \alpha_m, & \text{якщо } i_m \leq d_1. \end{cases} \quad (16)$$

Коефіцієнти кривих намагнечування:  $a_1=0,8182$ ,  $a_2=9$ ,  $a_3=0,818$ ,  $a_4=0,064$ ,  $a_5=0,000147$ ,  $a_6=0,2375$ ,  $a_7=23,19$ ,  $b_1=11$ ,  $b_2=40$ ;  $c_1=2,057$ ,  $c_2=-0,8082 \cdot 10^{-3}$ ,  $c_3=0,8271 \cdot 10^{-5}$ ,  $d_1=8,33$ .

Інтегрування рівнянь електромеханічного стану здійснено на алгоритмічній мові Visual FORTRAN явним методом Рунге-Кутта четвертого порядку.

Результати симуляції подано на рис. 2 – 4, де зображено кутові швидкості обертання моторів, струм фази А вторинної обмотки трансформатора, напругу у вузлі навантаження. У момент запуску 4-го і 5-го моторів перші три мотори стали повільніше розганятися (на рис.2 помітно злам кутових швидкостей при  $t = 2$  с.), що пояснюється спадом напруги у вузлі.

Навантаження п'ятого мотора підібрано максимально критичним (мотор не розганяється). Лише після виходу на усталений процес перших чотирьох моторів кутова швидкість обертання п'ятого мотора дещо наростає, що пов'язано зі збільшенням напруги вузла. У момент часу  $t = 5,5$  с момент навантаження на валу п'ятого мотора зменшено до  $M_5=600$  Н·м, оскільки при попередньому навантаженні його пуск тривав би десятки секунд, що є небезпечним для ізоляції його обмоток. У цей же момент часу помітно різкий розгон п'ятого мотора.

Кутові швидкості обертання роторів моторів на усталеному процесі становлять приблизно до  $\omega=313,3 \text{ c}^{-1}$ . Струм трансформатора при пуску перших трьох моторів становить приблизно 900 А, після під'єднання 4-го і 5-го моторів струм збільшується до 2000 А, в усталеному процесі струм становить 200 А.

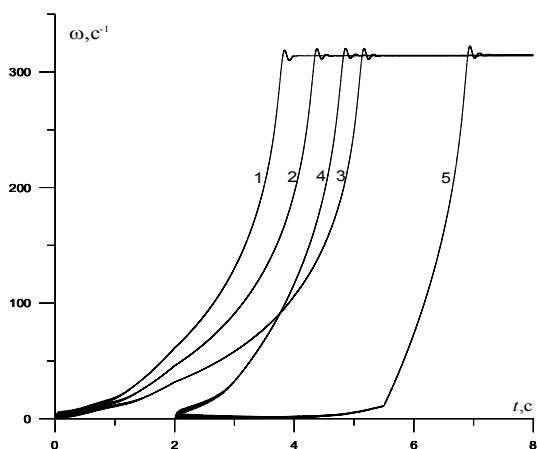


Рис.2. Часові залежності кутових швидкостей обертання моторів при їх почерговому пуску.

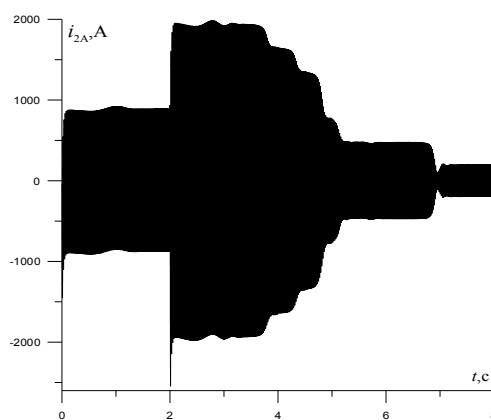


Рис.3. Часова залежність струму вторинної обмотки трансформатора при пуску 5-ти моторів.

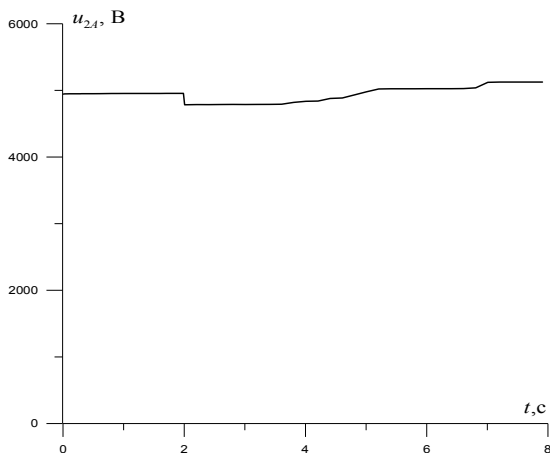


Рис.4 а. Огинаюча фазної напруги у вузлі навантаження, що відповідає процесу, зображеному на рис.2.

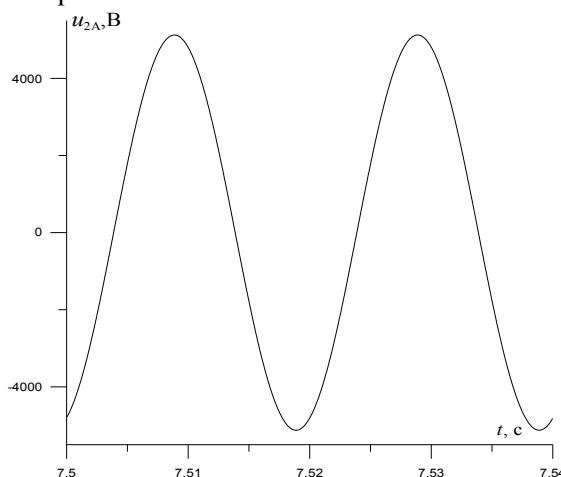


Рис.4 б. Фазна напруга у вузлі в усталеному процесі на проміжку часу  $t \in (7,5 \div 7,54 \text{ c.})$ .

#### Висновки.

1. Для розрахунку довготривалих перехідних процесів необхідно, щоб диференціальні рівняння системи були записані безпосередньо в нормальній формі Коші. Така форма запису набуває тут принципового значення, оскільки диференціальні рівняння є нежорсткими та інтегруються явними методами числового інтегрування. Це можна зробити лише на підставі запропонованих нами А-моделей елементів. Лише в цих моделях відсутня процедура віднімання двох близьких величин, що й забезпечує потрібну точність аналізу.

2. Результати комп'ютерної симуляції підтверджують високу ефективність і чисельну стійкість в алгоритмічній реалізації запропонованого методу аналізу.

1. Чабан В. Й. Математичне моделювання електромеханічних процесів / В. Й. Чабан. – Львів : В-во Держ-університету „Львівська політехніка”, 1997. – 342 с.
2. Лишук В.В. Математична модель вузла живлення асинхронних моторів з перемінною структурою / В. Лишук // Технічні вісті. – 2008. – № 1 (27), 2 (28). – С. 67 – 70.
3. Чабан В. Й. Математична модель вузла асинхронних машин / В.Чабан, В. Лишук, О. Чабан // Вісник Нац. ун-ту „Львівська політехніка” Електроенергетичні та електромеханічні системи. – 2004. – № 511. – С. 102– 105.