

УДК 621. 391

П.Ф.Баховський, М.М.Євсюк

Луцький національний технічний університет

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РЕАЛІЗАЦІЇ ПОСЛУГИ В РАМКАХ МОДЕЛІ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

Розроблена математична модель реалізації послуг в рамках визначеної (розробленої) концепції, яка дозволяє оцінити ступінь задоволення споживача якістю послуг, які можуть надаватися в рамках такої концепції. Отримані вирази для функції розподілу часу реалізації послуги і його середнього значення дозволяють проводити вибір варіанту структурно-функціональної побудови концепції, що забезпечує задану якість реалізації послуг.

Для вирішення завдання оцінки будь-якого сценарію реалізації послуги і порівняння їх з нормативними показниками, встановленими відповідними стандартами, розглядається процес реалізації послуги у вигляді однієї з моделей систем масового обслуговування (СМО).

Для нескладних СМО, зазвичай, вдається отримати строгі аналітичні вирази, які описують відповідні характеристики системи. Проте, по мірі ускладнення СМО, аналітичні вирази, які описують характеристики досліджуваної системи, стають більш громіздкими, і їх важко застосовувати на практиці.

Процес реалізації i -ї послуги [1], ініціюється надходженням заявки на цю послугу – спрацюванням тригерної точки – і полягає у виконанні ланцюжка з J функцій необхідних для її реалізації. Назвемо ці функції фазами. При цьому, кожна компонента структурно-функціональної побудови досліджуваного сценарію може брати участь в реалізації i -ї послуги, виконуючи певне число фаз. Таким чином, процес реалізації i -ї послуги можна представити багатофазною СМО. Такі СМО найменше вивчені в теорії масового обслуговування через складність отримуваних результатів, які, як правило, не знаходять практичного застосування.

Як показано в [2, 3, 4], дослідження багатофазних систем значно спрощується в умовах незалежності окремих фаз. При цьому кожна компонента представляється у вигляді однолінійного обслуговуючого приладу (ОП) з певною організацією дисципліни обслуговування. Отримана СМО є J - фазною системою, яка складається з R обслуговуючих приладів, причому $J \geq R$.

В термінах класифікації Кендала-Башаріна [4], кожен ОП можна формалізувати записом загального вигляду: $G/G/1$, що означає довільний розподіл надходження числа заявок на кожен ОП, довільний час, що витрачається на обслуговування заявки, один прилад обслуговування, необмежене число місць для очікування в черзі і нескінченне число джерел заявок на обслуговування.

Перед кожним обслуговуючим приладом, що виконує j -у фазу, де $j = \overline{1, J}$, реалізації i -ї послуги, де $i = \overline{1, I}$, утворюється черга, в яку поступають заявки не тільки від i -ї послуги, але і від інших послуг, а також заявки, пов'язані з надходженням вже існуючого навантаження, раніше позначеного як Λ_r^* . З урахуванням вищесказаного, модель для оцінки характеристик будь-якого сценарію реалізації вибраної концепції, може бути представлена так, як це зображено на рис. 1.

На рис. 1 інтенсивність потоку заявок від i -ї послуги позначена як λ_i .

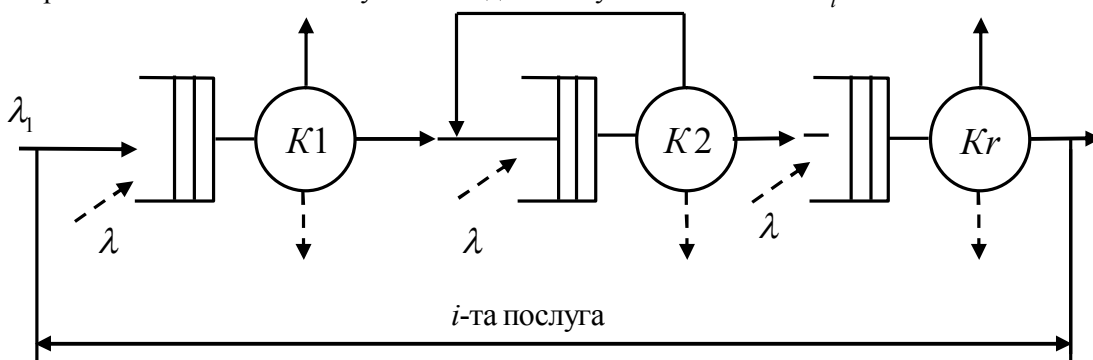


Рис. 1. – Структурно-функціональна побудова реалізації i -ї послуги

Надходження заявки до ОП, що виникає в процесі реалізації цієї ж послуги, відображається у вибраній моделі за допомогою суцільної стрілки, що сполучає вихід кожного ОП з входом у чергу заявок на обслуговування до цього або іншого ОП. Інтенсивності потоків заявок від інших послуг, а також заявки пов'язані з надходженням вже існуючого навантаження позначені як λ , і показані пунктирними стрілками. Обслужені заявки інших послуг, що мають іншу послідовність фаз і обслужені заявки, пов'язані з надходженням вже існуючого навантаження, моделюються пунктирною стрілкою, яка веде з ОП.

У загальному випадку потік заявок, що надходять на кожен ОП є випадковим. Припустимо, що потік заявок на ОП від різних послуг, а також заявки пов'язані з надходженням вже існуючого навантаження, утворюють суму великого числа незалежних стаціонарних ординарних потоків, вплив кожного з яких в цій сумі надзвичайно малий. При цих допущеннях сумарний потік близький до простого. Даний факт, дозволяє перейти до дослідження, з аналітичної точки зору, спрощеної моделі $M/G/1$, що означає простий вхідний потік заявок на обслуговування M , довільний час що витрачається на обслуговування заявки G , один прилад обслуговування, необмежене число місць для очікування в черзі і нескінченне число джерел навантаження.

Для дослідження поведінки моделі $M/G/1$ скористаємося результатами апроксимації, отриманими в роботах [4, 5], з подальшим доведенням правочинності використовуваних наближень методом імітаційного моделювання. Необхідність такої апроксимації диктується значною складністю отримання відповідних аналітичних виразів, що сильно ускладнює виконання практичних розрахунків і оцінок.

Суть одного із способів апроксимації полягає в тому, що реальний розподіл часу перебування заявки на r -му обслуговуючому приладі (система, що складається з обслуговуючого приладу і черги перед ним) $H_r(t)$ замінюється розподілом $H_r^*(t)$ моделі $M/D/1$. Як показано в [6] помилки апроксимації $H_r(t)$ є цілком прийнятними для застосування такої моделі на практиці.

Представлені далі результати імітаційного моделювання дозволяють визначити можливість використання даного способу апроксимації за різних умов і оцінити точність результатів, які отримуються при цьому.

Таким чином, функціонування кожного ОП, в термінах класифікації Кендала-Башаріна, формалізується записом $M/D/1$, що означає простий вхідний потік заявок на обслуговування M , постійний час обслуговування заявок (реалізації функції) D , один прилад обслуговування, необмежене число місць для очікування в черги і нескінченне число джерел заявок на обслуговування.

Визначимо імовірісно-часові характеристики сценаріїв реалізації концепції.

Початковими даними для розрахунку ІЧХ є наведені раніше значення навантажувальних характеристик мереж вибраної концепції.

Як було відмічено в [1], нормативні показники якості реалізації послуг для набору CS-1 представлені у вигляді допустимого часу на який припиняється надання послуги після спрацьовування тригерної точки при заданому значенні обмеження умовної імовірності та його середнього значення. Таким чином, завдання оцінки будь-якого сценарію реалізації концепції можна звести до визначення функції розподілу часу реалізації i -ї послуги $H(t_i) = 1 - P(\gamma > t_i)$ і середнього значення цього часу \bar{t}_i . Потім необхідно чисельні значення порівняти з прийнятими нормами або з нормами стандартів і визначити ступінь задоволення кожного з досліджуваних сценаріїв реалізації концепції заданої якості реалізації послуг. На підставі отриманих результатів може бути зроблений вибір на користь того сценарію реалізації концепції, який би відповідав за інших рівних умов нормам і забезпечував найменшу затримку часу реалізації послуги. У випадку, якщо необхідно привести який-небудь з досліджуваних сценаріїв реалізації концепції у відповідність з цими нормами, отримані результати також дозволять виробити рекомендації по зміні відповідних характеристик компонент так, щоб було досягнуто заданої якості реалізації послуг.

Як вже було відмічено, реалізація i -ї послуги є виконанням певної послідовності фаз. При цьому на кожному обслуговуючому приладі виконується k_n фаз i -ї послуги. Враховуючи це, функцію розподілу часу реалізації i -ї послуги для досліджуваного сценарію реалізації вибраної концепції можна представити у вигляді згортки:

$$H(t_i) = H_1^{k_{i1}}(t_i) \otimes \dots \otimes H_r^{k_{ri}}(t_i) \otimes H_R^{k_{Ri}}(t_i)$$

де k_{ri} означає, що згортка r -ї функції для i -ї послуги береться k_{ri} раз. Величина k_{ri} була визначена раніше як елемент матриці $\|K\|_{R \times I}$ розподілу числа звернень до r -ї компоненти при виконанні всіх послуг для досліджуваного сценарію реалізації концепції.

Отримаємо функцію розподілу $H_r(t)$ для кожного обслуговуючого приладу, взявши до уваги результати, отримані в [7]:

$$H_r(t) = \begin{cases} 0, & t \leq \tau_r; \tau_r > 0; \\ 1 - p_r e^{-a_{ri}(t-\tau_r)}, & a_{ri} > 0, \end{cases} \quad (1)$$

де τ_r – зважений час обслуговування заявки r -ї компоненти: $\tau_r = \frac{\sum_{i=1}^I \lambda_i \sum_{j=1}^J \tau_{rij} + p_r^*}{\Lambda_r}$; I – загальне

число послуг реалізовуваних r -м обслуговуючим приладом; J – загальне число фаз i -ї послуги реалізоване на r -му ОП; Λ_r – інтенсивність потоку заявок, що поступають на r -у компоненту;

$p_r = \sum_{i=1}^I \lambda_i \sum_{j=1}^J \tau_{rij} + p_r^*$ – завантаження r -ї компоненти; p_r^* – вже існуюче завантаження r -ї

компоненти, досліджене в роботі [3]; λ_i – інтенсивність потоку поступаючих заявок на i -у послугу; τ_{rij} – сумарний час заняття r -го обслуговуючого приладу при реалізації j -ї фази i -ї

послуги. Величина τ_{rij} складається з затримок на обробку заявки в компоненті $\tau_{rij}^{обп}$ і часу доставки заявки між ОП $\tau_{rij}^{ДС}$. Підхід до отримання $\tau_{rij}^{обп}$ і $\tau_{rij}^{ДС}$ буде розглянутий далі.

Величину a_{ri} визначимо таким чином: $a_{ri} = \frac{p_r}{W_{ri}}$, де W_{ri} – середній час очікування заявки в

черзі до r -ї компоненти при реалізації її i -ї послуги. Цей параметр залежить від дисципліни обслуговування заявок. Так для без пріоритетної дисципліни обслуговування, значення W_{ri} можна розрахувати по формулі:

$$W_{ri} = 0,5 \frac{\tau_r p_r}{1 - p_r},$$

а для дисципліни обслуговування з відносними пріоритетами між заявками виконуваних r -ю компонентою як:

$$W_{r_{im}} = 0,5 \frac{\tau_r p_r}{\left(1 - \sum_{j=1}^{m-1} p_{jr}\right) \left(1 - \sum_{j=1}^m p_{jr}\right)},$$

де $m = \overline{1, \dots, M}$, M – кількість виділених класів пріоритетів, а індекс i_m означає, що i -му потоку заявок (наприклад i -й послугі) привласнений m -й пріоритет.

Запишемо перетворення Лапласа-Стільт'єса у вигляді:

$$\Phi_r(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dH_r(t).$$

Враховуючи, що функція $H_r(t)$ у точці τ_r має стрибок, величина якого рівна $1 - p_r$, отримаємо:

$$\varphi_r(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dH_r(t) = e^{-s\tau_r} (1-p_r) + \int_{\tau_r}^{\infty} e^{-s\tau_r} a_{r_i} p_r e^{-(s+a_{r_i})t} dt = e^{-s\tau_r} (1-p_r) + e^{-s\tau_r} a_{r_i} p_r \frac{e^{-(s+a_{r_i})t}}{s+a_{r_i}} \Big|_{\tau_r}^{\infty}.$$

Після відповідних перетворень отримаємо:

$$\varphi_r(s) = e^{-s\tau_r} \frac{s(1-p_r) + a_{r_i}}{s + a_{r_i}}.$$

Запишемо перетворення Лапласа-Стільт'єса функції розподілу часу перебування заявки на r -му обслуговуючому приладі в кінцевому вигляді:

$$\varphi_r(s) = e^{-s\tau_r} \frac{s(1-p_r) + a_{r_i}}{s + a_{r_i}}.$$

Надалі скористаємося відомою властивістю згортки функцій: перетворення згортки функцій рівне добутку перетворень цих функцій. Використовуючи цю властивість і перетворення Лапласа-Стільт'єса, вираз для часу реалізації i -ї послуги представимо в наступному вигляді:

$$\varphi(s) = \prod_{r=1}^{R_i} \varphi_{r_i}^{k_{r_i}}(s) = \prod_{r=1}^{R_i} \left(e^{-s\tau_r} \frac{s(1-p_r) + a_{r_i}}{s + a_{r_i}} \right)^{k_{r_i}}.$$

Подальші перетворення, які представлені в [1], приводять вираз (1) до вигляду:

$$H(t_i) = \begin{cases} 0, & c > t; \\ 1 - \sum_{h=1}^n e^{-b_h(t-c)} \sum_{l=0}^{k_h-1} \sum_{q=0}^l \frac{d_{hl}}{b^{l+1-q}} \frac{(t-c)^q}{q!}, & c \leq t, \end{cases}$$

де:

$$d_{hl} = \sum_{|a|=k_h-l-1} \prod_{r=l_h+1}^{l_{h+1}} C_{k_r}^{a_r} (1-p_r)^{a_r} (p_r b_h)^{k_r-a_r} \prod_{j=1}^n h \prod_{r=l_j+1}^{l_{j+1}} \sum_{p=0}^{k_r} C_{k_r}^p \frac{p \times \dots \times (p+a_r-1)}{a_r} \times \\ \times \frac{(1-p_r)^{k_r-p} (p_r b_j)^p (-1)^{a_r}}{(b_j - b_h)^{p+a_r}}; \quad c = \sum_{r=1}^R k_r \tau_r; \quad b_1 = a_1 = \dots = a_l, \dots, \quad b_h = a_{l_h+1} = \dots = a_{l_{h+1}}, \dots,$$

$b_r = a_{l_r+1} = \dots = a_R$; k_h – число звернень до h -ї групи компонент з однаковими значеннями a_{r_i} ;

$\prod_{j=1}^n h$ – добуток елементів, виключаючи h -й множник; $a = (a_1 \dots a_r \dots a_R)$ – мультиіндекс;

$$|a| = a_1 + \dots + a_r + \dots + a_R; \quad p \times \dots \times (p+a_r-1) = \begin{cases} 1, & a_r = 0; \\ 0, & a_r > k_r. \end{cases}$$

Середнє значення часу, на який припиняється обслуговування виклику, визначимо, виходячи з формули, наведеної в [4]:

$$\bar{t}_i = \sum_{r=1}^R k_{r_i} \tau_r + \sum_{r=1}^R \frac{p_r k_{r_i}}{a_{r_i}}.$$

Таким чином, отримані вирази для $H(t_i)$ і \bar{t}_i дозволяють дати якісну оцінку будь-якого зі сценаріїв реалізації концепції.

Як показано в [6, 7], процес реалізації будь-якої послуги набору CS-1 може містити в собі різне число фаз – J . При цьому в більшості випадків, J складає 3,13. У дані рамки потрапляють всі послуги IN набору CS-1:

- «FREEPHONE»;
- «Call Forward/Ng»;
- «Televot/Ng» і ін.

Розраховані функціональні залежності $P(\gamma > t)$ і $\bar{t} = f(p)$ умовної імовірності часу реалізації послуги і його середнього значення відповідно при числі фаз реалізації послуги $J = 3,13$

і завантаження ОП $p = 0,5 \dots 0,9$, представлені на рис. 2 і рис. 3 у вигляді залежностей $P(\gamma > t) = f(t)$ і $\bar{t} = f(p)$.

При побудові вищезгаданих залежностей початковими даними були:

– варіант структурно-функціональної побудови концепції *VTF* задається таким чином, що на кожному ОП, окрім першого, виконується по одній фазі реалізації *i*-ї послуги. На першому ОП виконується дві фази реалізації *i*-ї послуги;

– сумарний час заняття кожного обслуговуючого приладу при реалізації *j*-ї фази *i*-ї послуги $\tau_{r_{ij}} = \tau_i = 1$ модельного часу;

– дисципліна обслуговування заявок – безпріоритетна;

– всі ОП мають однакове завантаження p .

Отримані залежності дозволяють оцінювати досліджуваний сценарій реалізації концепції, порівнюючи його з відповідними нормами: $P(\gamma > t_i^*) \leq P^*$ і $\bar{t}_i \leq \bar{t}_i^*$.

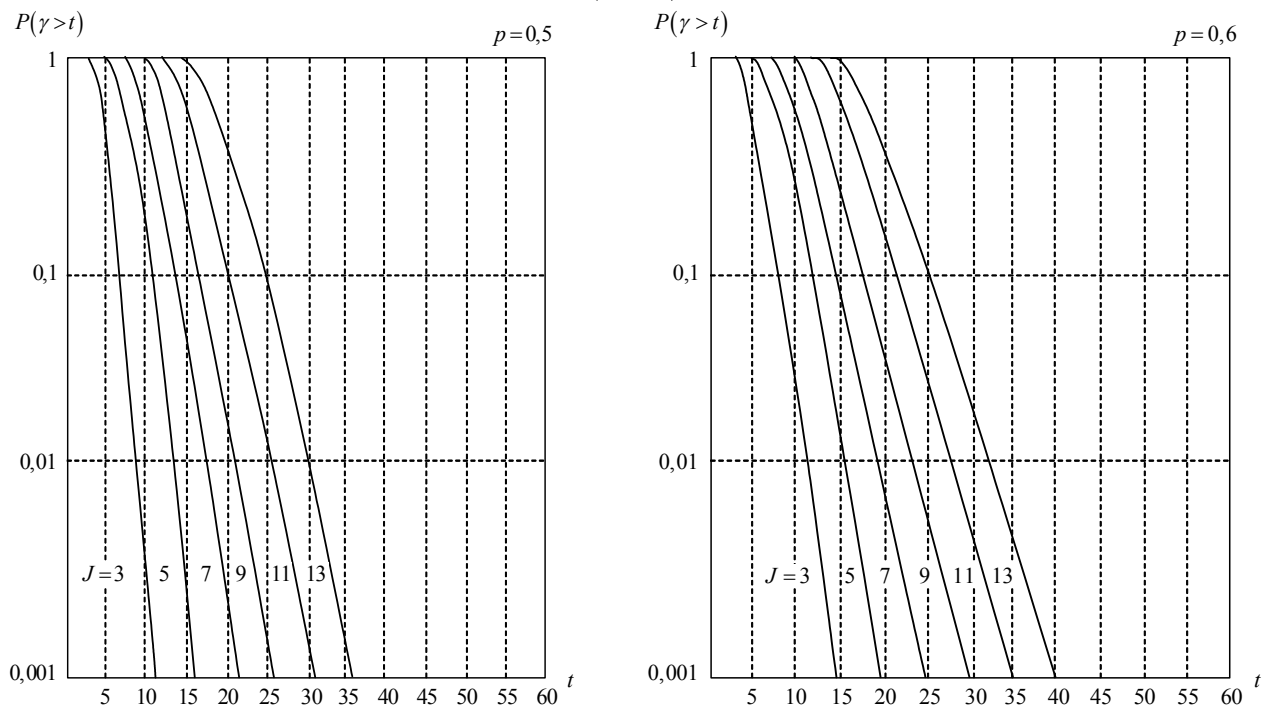


Рис.2. – Функція розподілу $P(\gamma > t)$

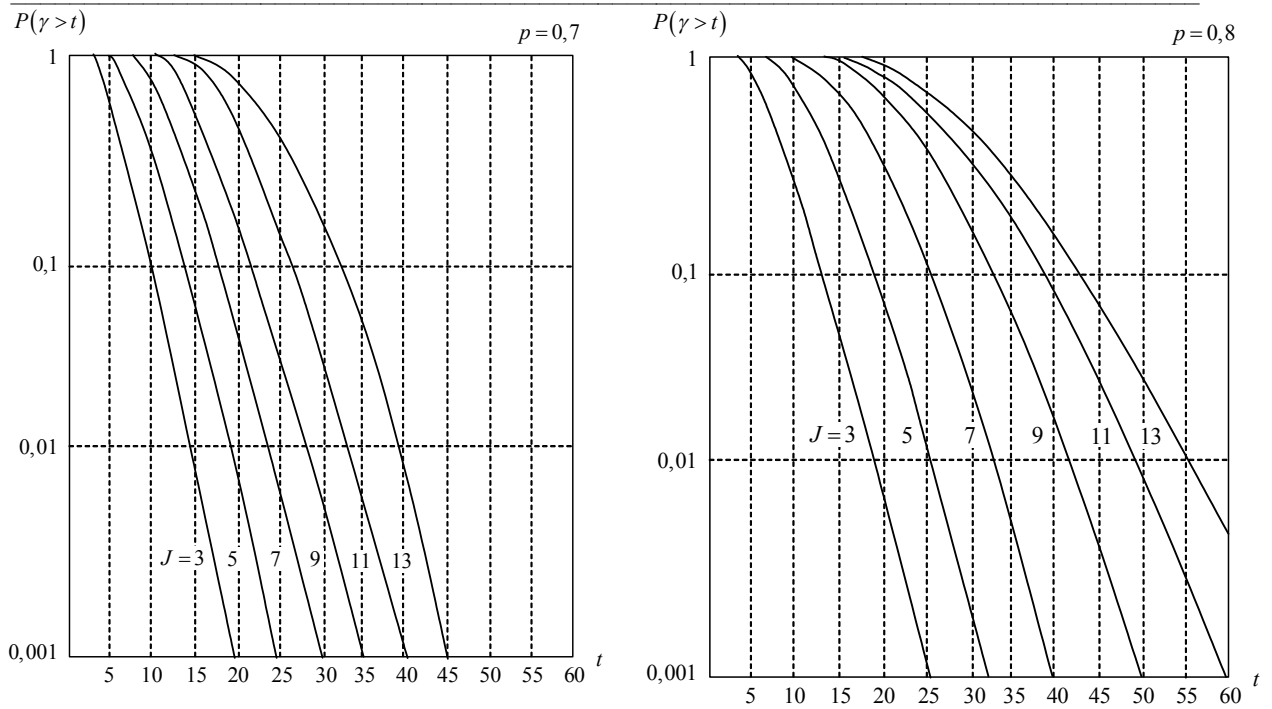


Рис.2. – Функция розподілу $P(\gamma > t)$

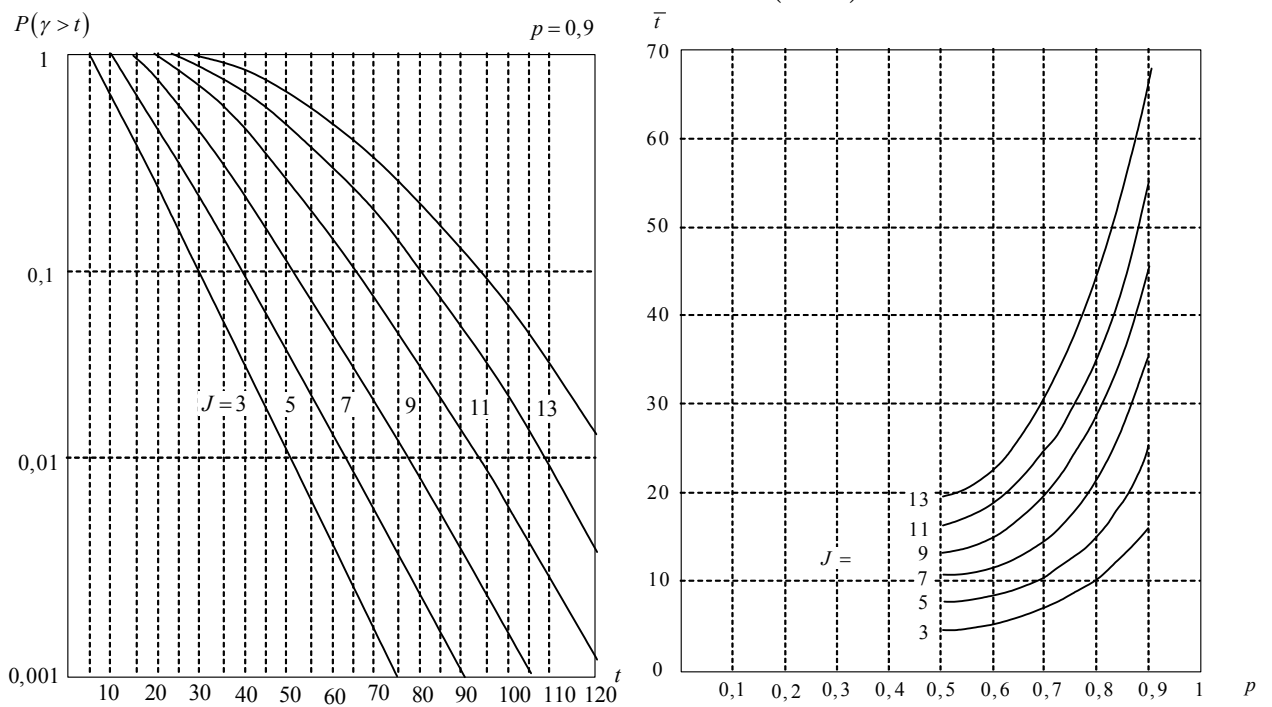


Рис.2. – Функция розподілу $P(\gamma > t)$

Рис.3. – Середній час реалізації послуги

1. Математичне моделювання методів забезпечення надання послуг в рамках концепції VTF / П.Ф. Баховський, М.М. Євсюк, В.В. Лишук // Наукові записки УНДІЗ. – 2010. - №3 (15). С. 63-68.
2. Величко В.В. Исследование вероятностно-временных характеристик мобильных систем радиосвязи, функционирующих в режиме передачи данных. Дис. канд. техн. наук: 05.12.13. – Новосибирск. – 2000 // [Електронний ресурс]: <http://www.aspirant.ru>
3. Ляшевич В.С., Прудкой Ю.И., Лобасов А.П., Кривец Т.А. Сравнительная оценка эффективности коммутации каналов и коммутации пакетов // Зв'язок. – К., 2001. – №3. – С. 16-17.

4. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: Наука, 1987. – 336 с.
5. Вентцель Е.С. Исследование операций. - М.: Сов. радио, 1972. – 552 с.
6. Шнепс-Шнеппе М. А. Статистическое моделирование телефонных систем коммутации // Вероятностные задачи в структурно-сложных системах связи и управления. – М.: Наука. – С. 5-28. – 1969.
7. Кузякин М., Лихтциндер Б., Росляков А., Фомичев С. Интеллектуальные сети связи // М.: Эко-Трендз, 2002.