УДК 539.3

Р.М.Кушнір, В.М.Максимович, Т.Я.Соляр
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
Луцький національний технічний університет

ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ НЕОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

У роботі записано інтегральні рівняння для неосесиметричних задач теорії пружності для тіл обертання. При цьому розв'язок задачі теорії пружності одержано у вигляді розкладу в ряди Фур'є за кутовою координатою, коефіцієнти яких визначаються із систем одновимірних інтегральних рівнянь. Записано прості співвідношення для визначення ядер цих рівнянь, які базуються на встановлених рекурентних співвідношеннях для введених функцій. Отримані співвідношення у випадку осесиметричної задачі збігаються із відомими в літературі рівняннями.

Вступ. Визначення тривимірного напруженого стану тіл обертання складної форми на основі загальних алгоритмів, які грунтуються на розв'язуванні двовимірних інтегральних рівнянь, пов'язане зі значними затратами ресурсу ЕОМ. При осесиметричному навантаженні інтегральні рівняння зводяться до одновимірних [1, 2], у зв'язку з чим у літературі для розв'язування таких задач розроблено ефективні алгоритми, які грунтуються на методі граничних елементів. Часткові випадки неосесиметричної задачі для тіл обертання розглянуто в роботі [3].

У даній роботі записано інтегральні рівняння для неосесиметричних задач теорії пружності для тіл обертання. При цьому розв'язок задачі теорії пружності одержано у вигляді розкладу в ряди Фур'є за кутовою координатою, коефіцієнти яких визначаються із систем одновимірних інтегральних рівнянь.

Вихідні співвідношення. Розглянемо задачу теорії пружності для тіла обертання, яке займає область Ω і перебуває під дією відповідно масових і поверхневих сил b_j і p_j, $j=1,2,3$. Запишемо інтегральне подання розв'язку даної задачі теорії·пружності у декартовій системі координат [1, 2]

$$u_i(x)=\int_S u_{ij}^*(x,x_0)p_j(x_0)ds-\int_S p_{ij}^*(x,x_0)u_j(x_0)ds+\int_\Omega u_{ij}^*(x,x_0)b_j(x_0)d\Omega, \qquad (1)$$

де u_i – компоненти вектора переміщень у декартовій системі координат (*і=1, 2, 3)*, x – точка з декартовими координатами (x_1,x_2,x_3), x_0 – точка з координатами (x_1^0,x_3^0,x_3^0), за якими проводиться інтегрування, S – границя області Ω, вісь Ox_3 – вісь обертання тіла,

$$G_0u_{ij}^*=\frac{\chi}{R}\delta_{ij}+\frac{\overline{x_i}\,\overline{x_j}}{R^3},\qquad p_{ij}^*=\left(\frac{\chi_0}{R}\delta_{ij}+\frac{\overline{x_i}\,\overline{x_j}}{R^3}\right)A+c\frac{\overline{x_i}n_j-\overline{x_j}n_i}{R^3},\qquad A=\frac{3}{\nu_0R}\frac{\partial R}{\partial n_0},$$

$\overline{x_i}=x_i-x_i^0$, $R^2=\overline{x_i}\,\overline{x_i}$, $n_j=n_j(x_0)$ і $\dfrac{\partial R}{\partial n_0}$ – відповідно напрямні косинуси і похідна вздовж зовнішньої нормалі до поверхні *S*, δ_{ij} – символ Кронекера, $G_0=16\pi(1-\nu)G$, $\nu_0=-8\pi(1-\nu)$, $c=\dfrac{1-2\nu}{\nu_0}$, $\chi_0=\dfrac{1-2\nu}{3}$, G – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона. Тут за індексами, що повторюються проводиться підсумовування.

Перепишемо зображення (1) у вигляді

$$u_1(x)+iu_2(x)=\int_S\left[(U_1+iU_2)-(P_1+iP_2)+(B_1+iB_2)\right]ds,\qquad u_3(x)=\int_S(U_3-P_3+B_3)ds, \qquad (2)$$

де $U_i=u_{ij}^*(x,x_0)p_j(x_0)$, $P_i=p_{ij}^*(x,x_0)u_j(x_0)$, $B_i=u_{ij}^*(x,x_0)b_j(x_0)$.

Перейдемо до циліндричної системи координат (r,φ,z) так, щоби осі Ox_3 і Oz збігались. Підставимо в (2) співвідношення

$$x_1+ix_2=re^{i\varphi},\quad u_1+iu_2=(u_r+iu_\varphi)e^{i\varphi},\quad p_1+ip_2=(p_r+ip_\varphi)e^{i\varphi},\quad b_1+ib_2=(b_r+ib_\varphi)e^{i\varphi},$$

де u_s, p_s, b_s, $s = r, \varphi, z -$ компоненти векторів переміщень, напружень і масових сил у циліндричній системі координат.

Тоді перша з формул у зображенні (2) набуде вигляду

$$u_r(x) + iu_\varphi(x) = \int_S \left[(U_r + iU_\varphi) - (P_r + iP_\varphi) + (B_r + iB_\varphi) \right] ds, \tag{3}$$

де $U_r + iU_\varphi = (U_1 + iU_2)e^{-i\varphi}$, $P_r + iP_\varphi = (P_1 + iP_2)e^{-i\varphi}$, $B_r + iB_\varphi = (B_1 + iB_2)e^{-i\varphi}$, причому точка x має координати (r, φ, z), а $x_0 - (r_0, \varphi_0, z_0)$.

Для введених функцій маємо

$$U_1 + iU_2 = \frac{1}{2}\left[(u^*_{11} + u^*_{22})p + (u^*_{11} - u^*_{22} + 2iu^*_{12})\overline{p} \right] + (u^*_{13} + iu^*_{23})p_3, \quad U_3 = \mathrm{Re}(u^*_{31} + iu^*_{32})\overline{p} + u^*_{33}p_3, \tag{4}$$

де $p = p_1 + ip_2$.

Враховуючи, що

$$G_0(u^*_{11} + u^*_{22}) = \frac{2\chi + 1}{R} - \frac{\overline{x}_3^2}{R^3}, \quad G_0(u^*_{13} + iu^*_{23}) = \overline{x}_3 \frac{re^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_o}}{R^3},$$

$$G_0(u^*_{11} - u^*_{22} + 2iu^*_{12}) = \frac{r^2 e^{2i\varphi} - 2rr_0 e^{i(\varphi + \varphi_o)} + r_0^2 e^{2i\varphi_o}}{R^3},$$

отримуємо

$$2G_0 U_r = p_r \left[\frac{2\chi + 1}{R}\cos\gamma + \frac{a_3 \cos\gamma - 2rr_0}{R^3} \right] - p_\varphi \left(\frac{2\chi + 1}{R} - \frac{a_1}{R^3} \right)\sin\gamma + 2\overline{x}_3 \frac{(r - r_0\cos\gamma)}{R^3} p_3,$$

$$2G_0 U_\varphi = p_r \left(\frac{2\chi + 1}{R} - \frac{a_2}{R^3} \right)\sin\gamma + p_\varphi \left[\frac{2\chi + 1}{R}\cos\gamma - \frac{a\cos\gamma - 2rr_0}{R^3} \right] - 2\overline{x}_3 \frac{r_0 \sin\gamma}{R^3} p_3,$$

$$G_0 U_z = \frac{\overline{x}_3}{R^3}\left[(r\cos\gamma - r_0)p_r - r\sin\gamma\, p_\varphi \right] + \left(\frac{\chi}{R} + \frac{\overline{x}_3^2}{R^3} \right) p_3,$$

де $\gamma = \varphi_0 - \varphi$, $a = r^2 + r_0^2 + \overline{x}_3^2$, $a_1 = -r^2 + r_0^2 + \overline{x}_3^2$, $a_2 = r^2 - r_0^2 + \overline{x}_3^2$, $a_3 = r^2 + r_0^2 - \overline{x}_3^2$.

Зобразимо

$$U_s = \frac{1}{G_0}\left(U^*_{sr} p_r + U^*_{s\varphi} p_\varphi + U^*_{sz} p_z \right), \quad s = r, \varphi, z, \tag{5}$$

де

$$U^*_{rr} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\chi + 1}{R}\cos\gamma + \frac{a_3\cos\gamma - 2rr_0}{R^3} \right),$$

$$U^*_{r\varphi} = -\frac{1}{2}\left(\frac{2\chi + 1}{R} - \frac{a_1}{R^3} \right)\sin\gamma, \quad U^*_{rz} = \overline{x}_3 \frac{(r - r_0\cos\gamma)}{R^3},$$

$$U^*_{\varphi r} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\chi + 1}{R} - \frac{a_2}{R^3} \right)\sin\gamma, \qquad U^*_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{2\chi + 1}{R}\cos\gamma - \frac{a\cos\gamma - 2rr_0}{R^3} \right),$$

$$U^*_{\varphi z} = -\overline{x}_3 \frac{r_0 \sin\gamma}{R^3}, \quad U^*_{zr} = \frac{\overline{x}_3(r\cos\gamma - r_0)}{R^3}, \quad U^*_{z\varphi} = -\frac{r\sin\gamma\, \overline{x}_3}{R^3}, \quad U^*_{zz} = \left(\frac{\chi}{R} + \frac{\overline{x}_3^2}{R^3} \right).$$

При знаходженні величин $P_r + iP_\varphi$ і P_3 врахуємо, що $p^*_{ij} = u_{ij}A + cv_{ij}$, де $u_{ij} = u^*_{ij}\big|_{\chi = \chi_o, G_o = 1}$, $v_{ij} = \dfrac{\overline{x}_i n_j - \overline{x}_j n_i}{R^3}$. Тому подамо

$$P_s = \frac{3}{\nu_0}\left(U_{sr}u_r + U_{s\varphi}u_\varphi + U_{sz}u_z \right)\left(\beta' + \frac{\alpha'}{R^2} \right) + cV_s \quad s = r, \varphi, z,$$

$$V_r + iV_\varphi = \left[-iv_{12}(u_1 + iu_2) + (v_{13} + iv_{23})u_3\right]e^{-i\varphi},$$

$$V_3 = v_{31}u_1 + v_{32}u_2 = -\operatorname{Re}(v_{13} + iv_{23})(u_1 - iu_2),$$

де $U_{sj} = U_{sj}^*\Big|_{\chi=\chi_o}$, $\alpha' = -\dfrac{a_2}{2r_0}n_r - \bar{z}n_z$, $\beta' = \dfrac{n_r}{2r_0}$.

Використавши співвідношення $u_1 + iu_2 = (u_r + iu_\varphi)e^{i\varphi_o}$, $v_{12} = n_r r\sin\gamma$, $v_{21} = -v_{12}$, $v_{13} + iv_{23} = \dfrac{\left(re^{i\varphi} - r_0 e^{i\varphi_o}\right)n_3 - n_r\overline{x_3}e^{i\varphi_o}}{R^3}$, отримаємо

$$V_r + iV_\varphi = -\frac{n_r}{2}\frac{r}{R^3}\left(e^{2i(\varphi_o-\varphi)} - 1\right)\left(u_r + iu_\varphi\right) + \frac{n_3 r - \left(n_3 r_0 + n_r\overline{x_3}\right)e^{i(\varphi_o-\varphi)}}{R^3}u_3,$$

$$V_3 = -\frac{n_3 r}{2R^3}\left[u_r\cos(\varphi_0 - \varphi) - u_\varphi\sin(\varphi_0 - \varphi)\right] + (r_0 n_3 + \overline{x_3}n_r)\frac{u_r}{R^3}.$$

Звідси $P_s = P_{sr}^* u_r + P_{s\varphi}^* u_\varphi + P_{sz}^* u_z$, $s = r, \varphi, z$, де

$$P_{ij}^* = \frac{3}{v_0}U_{ij}\left(\beta' + \frac{\alpha'}{R^2}\right) + cV_{ij}, \tag{6}$$

$$V_{rr} = \frac{n_r r}{R^3}\sin^2\gamma,\quad V_{r\varphi} = \frac{n_r}{2}\frac{r}{R^3}\sin 2\gamma,\quad V_{rz} = \frac{n_3 r - \left(n_3 r_0 + n_r\overline{x_3}\right)\cos\gamma}{R^3},$$

$$V_{\varphi r} = -\frac{n_r}{2}\frac{r}{R^3}\sin 2\gamma,\quad V_{\varphi\varphi} = V_{rr},\quad V_{\varphi z} = \frac{-\left(n_3 r_0 + n_r\overline{x_3}\right)\sin\gamma}{R^3}, \tag{7}$$

$$V_{zr} = -\frac{n_3 r}{2R^3}\cos\gamma + \frac{r_0 n_3 + \overline{x_3}n_r}{R^3},\quad V_{z\varphi} = \frac{n_3 r}{2R^3}\sin\gamma,\quad V_{zz} = 0.$$

Таким чином, отримуємо інтегральні зображення для переміщень у циліндричній системі координат у вигляді

$$u_s(x) = \frac{1}{G_0}\int_S U_{sj}^*(x, x_0)p_j(x_0)dS - \int_S P_{sj}^*(x, x_0)u_j(x_0)dS + \frac{1}{G_0}\int_\Omega U_{sj}^*(x, x_0)b_j(x_0)d\Omega, \tag{8}$$

при $s, j = r, \varphi, z$.

Інтегральні зображення для коефіцієнтів ряду Фур'є. Подамо переміщення та напруження на границі тіла у вигляді рядів Фур'є. У загальному випадку розв'язок може бути зображений у вигляді суми симетричної і антисиметричної відносно перерізу $\varphi = 0$ задач.

Симетрична задача. Покладемо

$$u_s = \sum_{n=0}^{\infty} u_{s,n}\cos n\varphi_0,\ p_s = \sum_{n=0}^{\infty} p_{s,n}\cos n\varphi_0,\ b_s = \sum_{n=0}^{\infty} b_{s,n}\cos n\varphi_0,\ s = r, z,$$

$$u_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} u_{\varphi,n}\sin n\varphi_0,\ p_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} p_{\varphi,n}\sin n\varphi_0,\ b_\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} b_{\varphi,n}\sin n\varphi_0,$$

причому тут коефіцієнти в рядах є функціями від змінних r і z.

Підставивши ці вирази в інтегральні зображення (8), отримуємо

$$u_s = \sum_{n=0}^{\infty}\int_\Gamma r_0\left[\frac{1}{G_0}\left(p_{r,n}U_{sr}^C + p_{\varphi,n}U_{s\varphi}^S + p_{z,n}U_{sz}^S\right) + \left(u_{r,n}P_{sr}^C + u_{\varphi,n}P_{s\varphi}^S + u_{z,n}P_{sz}^S\right)\right]ds_0 +$$

$$+\frac{1}{G_0}\sum_{n=0}^{\infty}\int_\omega r_0\left(p_{r,n}U_{sr}^C + p_{\varphi,n}U_{s\varphi}^S + p_{z,n}U_{sz}^S\right)d\omega_0,$$

де

$$U_{ij}^C = \int_0^{2\pi} U_{ij}^*\cos n\varphi_0 d\varphi_0,\quad P_{ij}^C = \int_0^{2\pi} P_{ij}^*\cos n\varphi_0 d\varphi_0\quad \text{при}\quad j = r, z,$$

$$U_{i\varphi}^{S}=\int_{0}^{2\pi}U_{i\varphi}^{*}\sin n\varphi_0 d\varphi_0\,,\quad P_{i\varphi}^{S}=\int_{0}^{2\pi}P_{i\varphi}^{*}\sin n\varphi_0 d\varphi_0\;.$$

Для знаходження цих інтегралів перетворимо вирази для величин U_{ij}^{*},V_{ij}. Врахувавши, що

$$\frac{a_3\cos\gamma-2rr_0}{R^3}=-\frac{a_3}{bR}+\frac{aa_3-b^2}{bR^3},\quad \frac{a\cos\gamma-2rr_0}{R^3}=-\frac{a}{bR}+\frac{a^2-b^2}{bR^3},$$

$$\frac{r-r_0\cos\gamma}{R^3}=\frac{r_0}{b}\left(\frac{1}{R}-\frac{a_1}{R^3}\right),\quad \frac{r\cos\gamma-r_0}{R^3}=\frac{r}{b}\left(-\frac{1}{R}+\frac{a_2}{R^3}\right),\quad \frac{\cos\gamma}{R}=-\frac{1}{b}R+\frac{a}{bR},$$

$$\frac{\sin^2\gamma}{R^3}=-\frac{1}{b^2}R+\frac{2a}{b^2R}-\frac{a^2-b^2}{b^2}\frac{1}{R^3},$$

отримаємо

$$U_{rr}^{*}=\frac{1}{2b}\left[-(2\chi+1)R+\frac{(2\chi+1)a-a_3}{R}+\frac{aa_3-b^2}{R^3}\right],$$

$$U_{r\varphi}^{*}=-\frac{1}{2}\left(\frac{2\chi+1}{R}-\frac{a_1}{R^3}\right)\sin\gamma,\quad U_{rz}^{*}=\frac{1}{b}\overline{x}_3r_0\left(\frac{1}{R}-\frac{a_1}{R^3}\right),$$

$$U_{\varphi r}^{*}=\frac{1}{2}\left(\frac{2\chi+1}{R}-\frac{a_2}{R^3}\right)\sin\gamma,\qquad U_{\varphi\varphi}^{*}=\frac{1}{2b}\left[-(2\chi+1)R+2(\chi+1)\frac{a}{R}-\frac{a^2-b^2}{R^3}\right],$$

$$U_{\varphi z}^{*}=-\overline{x}_3\frac{r_0\sin\gamma}{R^3},\quad U_{zr}^{*}=\overline{x}_3\frac{r}{b}\left(-\frac{1}{R}+\frac{a_2}{R^3}\right),\quad U_{z\varphi}^{*}=-\frac{r\sin\gamma\,\overline{x}_3}{R^3},\quad U_{zz}^{*}=\frac{\chi}{R}+\frac{\overline{x}_3^2}{R^3},$$

$$V_{rr}=\frac{n_r r}{b^2}\left(-R+\frac{2a}{R}-\left(a^2-b^2\right)\frac{1}{R^3}\right),\quad V_{r\varphi}=\frac{n_r r}{b}\sin\gamma\left(-\frac{1}{R}+\frac{a}{R^3}\right),$$

$$V_{rz}=\left(\frac{n_3r}{R^3}-\frac{\left(n_3r_0+n_r\overline{x}_3\right)}{b}\left(-\frac{1}{R}+\frac{a}{R^3}\right)\right),$$

$$V_{\varphi r}=-n_r r\frac{1}{b}\sin\gamma\left(-\frac{1}{R}+\frac{a}{R^3}\right),\quad V_{\varphi\varphi}=\frac{1}{b^2}\left(R-\frac{2a}{R}+\left(a^2-b^2\right)\frac{1}{R^3}\right),$$

$$V_{\varphi z}=-\frac{\left(n_3r_0+n_r\overline{x}_3\right)\sin\gamma}{R^3},\qquad V_{zr}=\frac{(r_0n_3+\overline{x}_3n_r)}{R^3}-\frac{n_3r}{b}\left(-\frac{1}{R}+\frac{a}{R^3}\right),$$

$$V_{z\varphi}=n_3r\frac{\sin\gamma}{R^3},\quad V_{zr}=\frac{\overline{x}_3n_r}{R^3}-\frac{n_3}{2r_0}\left(-\frac{1}{R}+\frac{a_2}{R^3}\right),$$

де $b=2rr_0$.

Використаємо вирази для інтегралів

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{R^m}\begin{Bmatrix}\cos n\varphi_0\\ \sin n\varphi_0\end{Bmatrix}d\varphi_0=\int_0^{2\pi}\frac{1}{R^m}\cos n\gamma\, d\varphi_0\begin{Bmatrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi\end{Bmatrix},$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{R^m}\sin\gamma\begin{Bmatrix}\cos n\varphi_0\\ \sin n\varphi_0\end{Bmatrix}d\varphi_0=-\frac{n}{rr_0(2-m)}\int_0^{2\pi}\frac{1}{R^{m-2}}\cos n\gamma\, d\varphi_0\begin{Bmatrix}-\sin n\varphi\\ \cos n\varphi\end{Bmatrix},\ m=1,3.$$

Тоді отримуємо інтегральне подання для переміщень у вигляді

$$u_s=\sum_{n=0}^{\infty}u_s^{(n)}\cos n\varphi\,,\quad s=r,\,z\quad u_\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}u_\varphi^{(n)}\sin n\varphi\,,$$

$$u_i^{(n)}(x)=\frac{1}{G_0}\int_\Gamma r_0u_{ij}^{(n)}p_{j,n}ds-\int_\Gamma r_0p_{ij}^{(n)}u_{j,n}ds+\frac{1}{G_0}\int_\omega r_0u_{ij}^{(n)}b_jd\omega\,,\quad i,\,j=r,\,\varphi,\,z\,. \tag{9}$$

Тут

$$u_{rr}^{(n)}=\frac{-(2\chi+1)g_n+2\left[\chi(r^2+r_0^2)+(\chi+1)\overline{z^2}\right]f_n+\left[(r^2-r_0^2)^2-\overline{z}^{-4}\right]F_n}{4rr_0},$$

$$u_{r\varphi}^{(n)}=\frac{n}{2rr_0}\left[(2\chi+1)g_n+a_1f_n\right],\quad u_{rz}^{(n)}=\frac{\overline{z}}{2r}\left(f_n-a_1F_n\right),\quad u_{\varphi r}^{(n)}=\frac{n}{2rr_0}\left[(2\chi+1)g_n+a_2f_n\right],$$

$$u_{\varphi\varphi}^{(n)}=\frac{-(2\chi+1)g_n+2(\chi+1)af_n+\left[4\left(rr_0\right)^2-a^2\right]F_n}{4rr_0},\quad u_{\varphi z}^{(n)}=n\frac{\overline{z}}{r}f_n,$$

$$u_{zr}^{(n)}=\frac{\overline{z}}{2r_0}\left(-f_n+a_2F_n\right),\quad u_{z\varphi}^{(n)}=-n\frac{\overline{z}}{r_0}f_n,\quad u_{zz}^{(n)}=\chi f_n+\overline{z^2}F_n,$$

де $\overline{z}=\overline{x_3}$, $g_n=\int\limits_0^{2\pi}R\cos n\gamma\, d\gamma$, $f_n=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos n\gamma}{R}d\gamma$, $F_n=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos n\gamma}{R^3}d\gamma$, $R=\sqrt{a-b\cos\gamma}$.

Функції $p_{ij}^{(n)}$ запишемо у вигляді

$$p_{ij}^{(n)}=\frac{3}{v_0}\left(\beta'\tilde{u}_{ij}^{(n)}+\alpha'\tilde{u}_{ij}^{(n)}\right)+cv_{ij}^{(n)},$$

де

$$v_{rr}^{(n)}=\frac{2n_rr}{b^2}\left[(2n^2-1)g_n+af_n\right],\quad v_{r\varphi}^{(n)}=\frac{2nn_rr}{b^2}\left(g_n+af_n\right),$$

$$v_{rz}^{(n)}=\left[n_3r-\left(n_3r_0+n_r\overline{x_3}\right)\frac{a}{b}\right]F_n+\left(n_3r_0+n_r\overline{x_3}\right)\frac{f_n}{b},$$

$$v_{\varphi r}^{(n)}=v_{r\varphi}^{(n)},\quad v_{\varphi\varphi}^{(n)}=v_{rr}^{(n)},\quad v_{\varphi z}^{(n)}=\left(n_3r_0+n_r\overline{x_3}\right)\frac{2n}{b}f_n,$$

$$v_{zr}^{(n)}=\frac{n_r}{2r_0}f_n+\left(n_3r_0+n_r\overline{x_3}-\frac{n_ra}{2r_0}\right)F_n,\quad v_{z\varphi}^{(n)}=\frac{n_3n}{r_0}f_n,\ v_{zz}^{(n)}=0.$$

Функції $\tilde{u}_{ij}^{(n)}$ отримуються із виразів для $u_{ij}^{(n)}$ при заміні χ на χ_0,

$$\tilde{u}_{rr}^{(n)}=\frac{-(2\chi_0+1)f_n+2\left[\chi_0(r^2+r_0^2)+(\chi_0+1)\overline{z^2}\right]F_n+\left[(r^2-r_0^2)^2-\overline{z}^{-4}\right]\Phi_n}{4rr_0},$$

$$\tilde{u}_{r\varphi}^{(n)}=-\frac{n}{2rr_0}\left[(2\chi_0+1)f_n-\frac{a_1}{3}F_n\right],\quad \tilde{u}_{rz}^{(n)}=\frac{\overline{z}}{2r}\left(F_n-a_1\Phi_n\right),$$

$$\tilde{u}_{\varphi r}^{(n)}=-\frac{n}{2rr_0}\left[(2\chi_0+1)f_n-\frac{a_2}{3}\Phi_n\right],$$

$$\tilde{u}_{\varphi\varphi}^{(n)}=\frac{-(2\chi_0+1)f_n+2(\chi_0+1)aF_n+\left[4\left(rr_0\right)^2-a^2\right]\Phi_n}{4rr_0},\quad \tilde{u}_{\varphi z}^{(n)}=n\frac{\overline{z}}{3r}F_n,$$

$$\tilde{u}_{zr}^{(n)}=\frac{\overline{z}}{2r_0}\left(-F_n+a_2\Phi_n\right),\quad \tilde{u}_{z\varphi}^{(n)}=-n\frac{\overline{z}}{3r_0}F_n,\quad \tilde{u}_{zz}^{(n)}=\chi_0F_n+\overline{z^2}\Phi_n,\quad \Phi_n=\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos n\gamma}{R^5}d\gamma.$$

Антисиметрична задача відносно перерізу $\varphi=0$. Покладемо

$$u_s=\sum_{n=1}^{\infty}u_{s,n}\sin n\varphi_0,\quad p_s=\sum_{n=1}^{\infty}p_{s,n}\sin n\varphi_0,\quad b_s=\sum_{n=1}^{\infty}b_{s,n}\sin n\varphi_0,\quad s=r,z,$$

$$u_\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}u_{\varphi,n}\cos n\varphi_0,\quad p_\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}p_{\varphi,n}\cos n\varphi_0,\quad b_\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}b_{\varphi,n}\cos n\varphi_0.$$

Після перетворень для переміщень, аналогічно, як і вище, отримуємо інтегральне подання у такому вигляді

$$u_s = \sum_{n=1}^{\infty} u_s^{(n)} \sin n\varphi , \quad s = r,\, z \,, \quad u_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} u_\varphi^{(n)} \cos n\varphi \,,$$

де

$$u_i^{(n)}(x) = \frac{1}{G_0} \int_\Gamma s_{ij} r_0 u_{ij}^{(n)} p_{j,n} ds - \int_\Gamma s_{ij} r_0 p_{ij}^{(n)} u_{j,n} ds + \frac{1}{G_0} \int_\omega s_{ij} r_0 u_{ij}^{(n)} b_j d\omega, \; i, j = r, \varphi, z \,, \tag{10}$$

$s_{ij} = -1$ при $i \neq j$ та коли один із індексів приймає значення φ і $s_{ij} = 1$ у всіх інших випадках.

Обчислення ядер інтегральних рівнянь. Для функцій f_n, F_n при $n = 0{,}1$ на основі [4] отримуємо формули

$$f_n = \frac{4}{\rho} \left[A_n E(m) + B_n K(m) \right], \quad F_n = \frac{4}{(1-m)\rho^3} \left[C_n E(m) + D_n K(m) \right], \tag{11}$$

де $E(m),\; K(m)$ – еліптичні інтеграли,

$$A_0 = 0\,, \quad A_1 = -1-\mu\,, \quad B_0 = 1\,, \quad B_1 = \mu\,, \quad C_0 = 1\,, \quad C_1 = \mu\,, \quad D_0 = 0\,, \quad D_1 = 1-\mu\,,$$

$$m = \frac{2b}{a+b} = \frac{4rr_0}{\rho^2}, \quad \mu = \frac{2}{m} - 1 = \frac{a}{b}, \quad \rho = \sqrt{(r+r_0)^2 + \bar{z}^2} \,.$$

Легко показати, що для введених функцій справедливі формули

$$f_{n+2} = 2a_n \mu f_{n+1} - b_n f_n \,, \quad F_{n+2} = 2c_n \mu F_{n+1} - d_n F_n \,, \tag{12}$$

де

$$a_n = \frac{n+1}{n+1{,}5}\,, \quad b_n = \frac{n+0{,}5}{n+1{,}5}\,, \quad c_n = \frac{n+1}{n+0{,}5}\,, \quad d_n = \frac{n+1{,}5}{n+0{,}5}\,.$$

Співвідношення (12) з урахування формул (11) дають змогу обчислювати функції f_n, F_n за довільних значень *n.*

На основі цих формул отримуємо зручніші для обчислень рекурентні співвідношення вигляду

$$\varepsilon_{n+1} = 2a_n \mu - b_n / \varepsilon_n \,, \quad \delta_{n+1} = 2c_n \mu - d_n / \delta_n \,, \tag{13}$$

де $\varepsilon_n = f_{n+1} / f_n \,, \quad \delta_n = F_{n+1} / F_n \,.$

За малих значень параметру μ (при $\mu < 1{,}5$) достатньо точними при обчисленнях є прямі формули (13), коли ε_0, δ_0 визначаються за формулами (11). При більших значеннях параметру μ точнішими при обчисленнях є зворотні до (13) формули вигляду

$$\varepsilon_n = \frac{b_n}{2a_n \mu - \varepsilon_{n+1}}, \quad \delta_n = \frac{d_n}{2c_n \mu - \delta_{n+1}} \,. \tag{14}$$

При використанні цих формул за великих значень n застосовуються асимптотичні формули

$$\varepsilon_n \approx \lambda(1 - 1/(2n))\,, \quad \delta_n \approx \lambda(1 + 1/(2n))\,, \quad \lambda = \mu - \sqrt{\mu^2 - 1}\,, \tag{15}$$

які отримуються зі співвідношень (13).

Спочатку величини $\varepsilon_{n+1}, \delta_{n+1}$ при вибраному максимальному номері *n* обчислюються за формулами (15), на основі яких далі визначаються всі значення $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n, \; \delta_0, \ldots, \delta_n$. Як показали розрахунки, знайдені таким чином величини є практично точними, за винятком останніх трьох-п'яти членів.

На основі отриманих відношень самі функції визначаються за рекурентними співвідношеннями

$$f_{n+1} = f_n \varepsilon_n \,, \quad F_{n+1} = F_n \delta_n \,, \quad n = 0, 1, \ldots \,,$$

причому f_0, F_0 визначаються за формулами (9).

Інші функції g_n, Φ_n можуть бути знайдені через функції f_n, F_n за формулами вигляду

$$F_n = \frac{1-4n^2}{a^2-b^2} g_n \, , \; \Phi_n = \frac{4}{3} \frac{aF_n + (n^2 - 0,25) f_n}{a^2-b^2} ,$$

Інтегральні рівняння задачі. Вище отримано загальний розв'язок задачі теорії неосесиметричної задачі теорії пружності для тіл обертання. При цьому переміщення зображені у вигляді ряду Фур'є. Для кожного із коефіцієнтів цього ряду отримано інтегральні зображення (9) і (10). Тобто, ці коефіцієнти можуть бути знайдені окремо. Розглянемо випадок першої основної задачі. Тоді в цих зображеннях будуть відомими коефіцієнти розкладу в ряд Фур'є векторів масових і поверхневих сил. Спрямовуючи далі в цих зображеннях точку x до межі тіла, отримуємо інтегральні рівняння відносно переміщень. Розв'язування таких рівнянь, а далі визначення на їх основі напружень може бути проведено за допомогою розроблених на основі методу граничних елементів підходів.

Висновки. У роботі побудовано алгоритм розв'язування тривимірної неосесиметричної задачі теорії пружності для тіл обертання. При цьому розв'язок зображено у вигляді рядів Фур'є, коефіцієнти яких визначаються із системи інтегральних рівнянь. Записані прості співвідношення для визначення ядер цих рівнянь, які базуються на встановлених рекурентних співвідношеннях для введених функцій. Отримані співвідношення у випадку осесиметричної задачі збігаються із відомими в літературі рівняннями.

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел П., Методы граничных елементов. – М.– Мир, 1987. – 524 с.
3. Максимович В.Н.,Цыбульский О.А. К определению неосесимметричного напряженно-деформированного состояния тел со шпангоутами вращения // Прикл. механика, 1994. – Т.30. – № 10. – С.35-40.
4. Справочник по специальным функциям // Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М. – Наука, 1979. – 832 с.