

УДК 539.3

О.А.Мікуліч, В.М.Максимович

Луцький національний технічний університет

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЗАЄМОВПЛИВУ ОТВОРІВ У НЕСКІНЧЕННИХ ПЛАСТИНКАХ ЗА УСТАЛЕНИХ КОЛИВАНЬ

На основі розробленої методики дослідження усталених коливань нескінченних багатозв'язних пластинок вивчено питання взаємовпливу отворів при дифракції пружних хвиль. Використання для розв'язання задачі методу граничних інтегральних рівнянь, апарату теорії функцій комплексної змінної та методу механічних квадратур дало можливість розробити ефективний підхід для вивчення динамічного розподілу напружень у нескінченних пластинках практично довільної геометрії.

Широке застосування пластинчатих елементів конструкцій складної форми у багатьох галузях сучасного машинобудування, що зазнають впливу вібраційних навантажень, зумовлює необхідність розробки уточнених методик дослідження напруженого стану для оцінки їх надійності та довговічності. Такі елементи конструкцій, що є моделями фюзеляжів літаків, корпусів суден та елементів облицювання автомобілів, можна розглядати як необмежені пластинки складної геометрії, що послаблені системами отворів. Розподіл динамічних напружень у таких пластинках залежить також від взаємовпливу отворів та відбиття хвиль від їх границь.

У працях О. М. Гузя, В. Д. Кубенка [3], Г. М. Савіна, та ін. дослідження динамічного напруженого стану нескінченних пластинок з круговими отворами проводиться з використанням методу рядів. У роботах Муна, Пао та ін. для розв'язання такого класу задач застосовується метод багатократних відображень.

У працях П. Бенерджі, Р. Баттерфілда, К. Бреббія та ін. [2] розв'язання задач зведено до сингулярних та регулярних інтегральних рівнянь.

У [4] запропоновано методику дослідження динамічного напруженого стану багатозв'язних нескінченних пластинок за усталених коливань, що ґрунтується на методі граничних інтегральних рівнянь та апараті теорії функції комплексної змінної для випадку навантаження, прикладеного до границі отвору.

Розглянемо нескінченну пластинку, що обмежена граничними контурами L, L_1, \dots, L_k , причому контур L охоплює решту контурів. Позначимо через D область, яку вона займає. Віднесемо пружну пластинку до декартової системи координат Ox_1x_2 . Розглянемо випадок, що є динамічним аналогом задачі про концентрацію напружень біля отворів при двоосьовому основному напруженому стані, який при усталених коливаннях реалізується з допомогою плоскої пружної хвилі, що падає на отвір. Ця хвиля породжує відбиті хвилі і сумарне хвильове поле визначає напружений стан у пружній пластинці. На контурі отвору виникають відбиті хвилі стиску, потенціали Ψ та Φ яких задовольняють рівнянням Гемгольца [1]:

$$\Phi = \Phi_0 e^{i\omega(\tau - \omega_1 x_1)}, \quad \Psi = 0, \quad (*)$$

де $\Phi_0 = \frac{1}{\mu\omega_2^2}$, ω – частота, τ – час, $\omega_1 = \frac{\omega}{c_1}$, $\omega_2 = \frac{\omega}{c_2}$, c_1, c_2 – швидкість хвиль розширення та зсуву: $c_1^2 = E/(\rho(1-\nu^2))$, $c_2^2 = E/(2\rho(1+\nu))$, E – модуль пружності I роду, ρ – густина матеріалу, ν – коефіцієнт Пуассона, μ – стала Ляме, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Для плоского напруженого стану використаємо потенціальне зображення загального розв'язку для переміщень у вигляді [2]:

$$u_i = \int_L p_i U_{ij}^* ds \quad (1)$$

де p_1, p_2 – комплексні невідомі потенціальні функції. Представлення для зображень U_{ij}^* вибрано з врахуванням умов Зоммерфельда у вигляді [2]:

$$U_{ij}^* = \frac{1}{2\pi\rho c_2^2} (\psi\delta_{ij} - \chi r_i r_j),$$

де

$$\psi = \frac{i\pi}{2} \left(-H_0^2 \left(\frac{\omega r}{c_2} \right) + \frac{c_2}{\omega r} \left(H_1^2 \left(\frac{\omega r}{c_2} \right) - \frac{c_2}{c_1} H_1^2 \left(\frac{\omega r}{c_1} \right) \right) \right),$$

$$\chi = \frac{i\pi}{2} \left(H_2^2 \left(\frac{\omega r}{c_2} \right) - \frac{c_2^2}{c_1^2} H_2^2 \left(\frac{\omega r}{c_1} \right) \right),$$

$r_i = \frac{\partial r}{\partial x_i}$, $r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}$; $H_\kappa(z) = J_\kappa(z) - iY_\kappa(z)$ – функції Ганкеля II роду; $J_\kappa(z)$, $Y_\kappa(z)$ – відповідно функції Бесселя I та II роду, $i, j=1, 2$. Інтегрування по області та вздовж границі проводиться за змінними x_1^0, x_2^0 . Тут і далі біля переміщень та напружень опущений часовий множник $e^{i\omega t}$.

Напруження у довільній точці пластинки на площинці з нормаллю \vec{n} визначатимемо згідно співвідношення [1, 2]:

$$2(\sigma_n - i\tau_{sn}) = \frac{2E}{1-\nu} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u_1 - iu_2) \right) + e^{2i\alpha} \frac{2E}{1+\nu} \left(\frac{\partial}{\partial z} (u_1 - iu_2) \right), \quad (2)$$

де α – кут між нормаллю до площинки і віссю Ox_i ; $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$, $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$.

Враховуючи, що функції U_{ij}^* , а разом з ними переміщення u_j , є комплексними, зведемо задачу про дослідження динамічного напруженого стану багатозв'язної нескінченної пластинки до дійсного виду. Дійсна та уявна частини зображень (1) запишуться у вигляді:

$$u_j^R = \int_L (p_i^R U_{ij}^{*R} - p_i^I U_{ij}^{*I}) ds, \quad u_j^I = \int_L (p_i^I U_{ij}^{*R} + p_i^R U_{ij}^{*I}) ds, \quad (3)$$

де $u_j^R = \operatorname{Re} u_j$, $u_j^I = \operatorname{Im} u_j$, $j=1, 2$; $p_i^R = \operatorname{Re} p_i$, $p_i^I = \operatorname{Im} p_i$, $Q_i^R = \operatorname{Re} Q_i$, $Q_i^I = \operatorname{Im} Q_i$, $i=1, 2$; $U_{ij}^{*R} = \operatorname{Re} U_{ij}^*$, $U_{ij}^{*I} = \operatorname{Im} U_{ij}^*$.

Підставляючи залежності (3) у формули (2) для визначення напружень, отримаємо:

$$2(\sigma_n^R - i\tau_{sn}^R) = \int_L f_1^R q^R dt + \int_L f_2^R \bar{q}^R dt - \int_L f_1^I q^I dt - \int_L f_2^I \bar{q}^I dt,$$

$$2(\sigma_n^I - i\tau_{sn}^I) = \int_L f_1^R q^I dt + \int_L f_1^R \bar{q}^I dt + \int_L f_1^I q^R dt + \int_L f_1^I \bar{q}^R dt,$$

причому $f_i^R = f_i^R(x_1, x_2, x_1^0, x_2^0)$, $f_i^I = f_i^I(x_1, x_2, x_1^0, x_2^0)$, $i=1, 2$ є відомими функціями дійсного аргументу, що містять функції Бесселя II та I роду відповідно та мають вигляд, аналогічний до [5]; $q^R = i \cdot p^R \cdot ds/dt$, $q^I = i \cdot p^I \cdot ds/dt$ – невідомі функції.

Враховуючи, що підінтегральні функції f_i^R , $i=1, 2$ при малих значеннях аргументу є нерегулярними, використаємо асимптотичні вирази для функцій Бесселя другого роду при малих значеннях аргументу [2] для встановлення їх особливостей. Вирази для визначення напружень запишуться у вигляді:

$$2(\sigma_n^R - i\tau_{sn}^R) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1+\nu}{2} \int_L \left(\left(\frac{dz}{d\bar{z}} \frac{\bar{z}-\bar{t}}{z-t} - 1 \right) \frac{1}{z-t} \right) q^R dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(-\frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\bar{z}-\bar{t}} + \frac{dz}{d\bar{z}} \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{z-t} \right) \bar{q}^R d\bar{t} +$$

$$+ \int_L G_1^R q^R dt + \int_L G_2^R \bar{q}^R d\bar{t} - \int_L f_1^I q^I dt - \int_L f_2^I \bar{q}^I d\bar{t}; \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
2(\sigma_n^I - i\tau_{sn}^I) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1+\nu}{2} \int_L \left(\left(\frac{dz}{d\bar{z}} \frac{\bar{z}-\bar{t}}{z-t} - 1 \right) \frac{1}{z-t} \right) q^I dt + \\
&- \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(-\frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\bar{z}-\bar{t}} + \frac{dz}{d\bar{z}} \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{z-t} \right) \bar{q}^I d\bar{t} + \\
&+ \int_L G_1^R q^I dt + \int_L G_2^R \bar{q}^I d\bar{t} + \int_L f_1^I q^R dt + \int_L f_2^I \bar{q}^R d\bar{t}.
\end{aligned} \tag{5}$$

де функції дійсного аргументу f_i^I , $G_i^R = G_i^R(x_1, x_2, x_1^0, x_2^0)$, $i=1, 2$ є обмеженими і неперервними скрізь в області D .

Використовуючи формули Племеля–Сохоцького [2, 3] здійснимо граничний перехід у співвідношеннях (4) та (5) при $(x_1, x_2) \rightarrow L$ та отримаємо інтегральні рівняння для знаходження невідомих функцій q^R та q^I при заданих на границі навантаженнях:

$$\begin{aligned}
\bar{q}^R + \frac{1}{2\pi i} \frac{1+\nu}{2} \int_L \left(\left(\frac{dz}{d\bar{z}} \frac{\bar{z}-\bar{t}}{z-t} - 1 \right) \frac{1}{z-t} \right) q^R dt - \\
- \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(-\frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\bar{z}-\bar{t}} + \frac{dz}{d\bar{z}} \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{z-t} \right) \bar{q}^R d\bar{t} + \\
+ \int_L G_1^R q^R dt + \int_L G_2^R \bar{q}^R d\bar{t} - \int_L f_1^I q^I dt - \int_L f_2^I \bar{q}^I d\bar{t} = 2S^R;
\end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
q^I + \frac{1}{2\pi i} \frac{1+\nu}{2} \int_L \left(\left(\frac{dz}{d\bar{z}} \frac{\bar{z}-\bar{t}}{z-t} - 1 \right) \frac{1}{z-t} \right) q^I dt - \\
- \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(-\frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\bar{z}-\bar{t}} + \frac{dz}{d\bar{z}} \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{z-t} \right) \bar{q}^I d\bar{t} + \\
+ \int_L G_1^R q^I dt + \int_L G_2^R \bar{q}^I d\bar{t} + \int_L f_1^I q^R dt + \int_L f_2^I \bar{q}^R d\bar{t} = 2S^I,
\end{aligned} \tag{7}$$

тут перші два інтеграли є у розумінні головного значення; S^R, S^I – відомі функції.

Для чисельної реалізації алгоритму дослідження напружено-деформівного стану нескінченної пластинки з системою отворів, що утворюється вирізанням областей, які обмежені границями L_1 та L_2 , проведемо параметризацію контурів у вигляді: $x_1^{(1)} = \varphi_1(\theta)$; $x_2^{(1)} = \psi_1(\theta)$, $x_2^{(2)} = \varphi_2(\theta)$; $x_2^{(2)} = \psi_2(\theta)$, $0 < \theta < 2\pi$. Тоді на границі $t^{(1)} = \varphi_1(\theta) + i\psi_1(\theta) = g_1(\theta)$, $t^{(2)} = \varphi_2(\theta) + i\psi_2(\theta) = g_2(\theta)$.

для розв'язування інтегральних рівнянь (6)–(7) застосуємо метод механічних квадратур. Для інтегралів, що мають особливість типу Коші, використаємо квадратурні формули виду [2]:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{q}{t-z_v} dt = h \sum_{n=1}^K q_n \frac{g'_n}{t_n - z_v}, \quad t_n = g(\theta_n), \quad g'_n = g'(\theta_n), \quad \theta_n = hn, \\
z_v = z(\tilde{\theta}_v), \quad \tilde{\theta}_v = \theta_v + h/2, \quad v = \overline{1, K}, \quad q_n = q(t_n), \quad h = 2\pi / K,
\end{aligned}$$

а для решти інтегралів – наступні квадратурні співвідношення [2]:

$$\int_{\Omega} qf(t, z_v) dt = h \sum_{n=1}^K q_n f_{vn} g'_n,$$

де $f_{vn} = f(t_n, z_v)$.

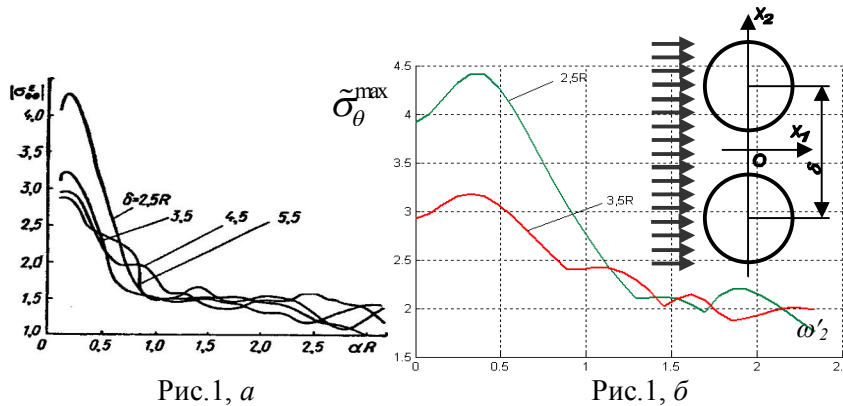
Після заміни інтегралів вказаними квадратурними формулами, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) для визначення невідомих $q_n^{R(1)} = q^{R(1)}(t_n)$, $q_n^{R(2)} = q^{R(2)}(t_n)$, $q_n^{I(1)} = q^{I(1)}(t_n)$, $q_n^{I(2)} = q^{I(2)}(t_n)$:

$$\begin{aligned} & \bar{q}_v^{I(2)} + h \sum_{n=1}^K f_{1vn}^{R(2,1)} q_n^{I(1)} g'_{1n} + h \sum_{n=1}^K f_{2vn}^{R(2,1)} \bar{q}_n^{I(1)} \bar{g}'_{1n} + h \sum_{n=1}^K f_{1vn}^{I(2,1)} q_n^{R(1)} g'_{1n} + \\ & + h \sum_{n=1}^K f_{2vn}^{I(2,1)} \bar{q}_n^{R(1)} \bar{g}'_{1n} + h \sum_{n=1}^K f_{1vn}^{R(2,2)} q_n^{I(2)} g'_{2n} + h \sum_{n=1}^K f_{2vn}^{R(2,2)} \bar{q}_n^{I(2)} \bar{g}'_{2n} + \\ & + h \sum_{n=1}^K f_{1vn}^{I(2,2)} q_n^{R(2)} g'_{2n} + h \sum_{n=1}^K f_{2vn}^{I(2,2)} \bar{q}_n^{R(2)} \bar{g}'_{2n} = 2S_v^{I(2)} \\ & \bar{q}_v^{I(1)} + h \sum_{n=1}^K f_{1vn}^{R(1,1)} q_n^{I(1)} g'_{1n} + h \sum_{n=1}^K f_{2vn}^{R(1,1)} \bar{q}_n^{I(1)} \bar{g}'_{1n} + h \sum_{n=1}^K f_{1vn}^{I(1,1)} q_n^{R(1)} g'_{1n} + \\ & + h \sum_{n=1}^K f_{2vn}^{I(1,1)} \bar{q}_n^{R(1)} \bar{g}'_{1n} + h \sum_{n=1}^K f_{1vn}^{R(1,2)} q_n^{I(2)} g'_{2n} + h \sum_{n=1}^K f_{2vn}^{R(1,2)} \bar{q}_n^{I(2)} \bar{g}'_{2n} + \\ & + h \sum_{n=1}^K f_{1vn}^{I(1,2)} q_n^{R(2)} g'_{2n} + h \sum_{n=1}^K f_{2vn}^{I(1,2)} \bar{q}_n^{R(2)} \bar{g}'_{2n} = 2S_v^{I(1)}, \end{aligned}$$

де $f_{jvn}^{R(m,k)} = f_j(x_{1v}^{(m)}, x_{1v}^{(m)}, x_{1n}^{0(k)}, x_{1n}^{0(k)})$, $f_{jvn}^{I(m,k)} = f_j(x_{1v}^{(m)}, x_{1v}^{(m)}, x_{1n}^{0(k)}, x_{1n}^{0(k)})$, $g'_{jn} = g'_j(\theta_n)$, $z_v^{(m)} = x_{1v}^{(m)} + ix_{2v}^{(m)}$, $t_n^{(k)} = x_{1n}^{0(k)} + ix_{2n}^{0(k)}$, $z_v^{(m)} \in L_m$, $t_n^{(k)} \in L_k$, $q_v^{(j)} = q^{(j)}(z_v)$, $j, m, k = 1, 2$.

Після розв'язування СЛАР напруження на границях отворів пластинки можна визначити на основі відомих формул [2], виділивши особливості типу Коші та здійснивши граничний перехід.

Для тестування запропонованої методики побудуємо графік залежності максимальних динамічних напружень на отворі від частоти для задачі дифракції пружної падаючої хвилі стиску у нескінченній пластинці з двома круговими отворами, центри яких розміщені на відстані δ вздовж осі Ox_2 (рис.1, б), та порівняємо його з відомими, отриманими методом рядів та наведеним у [3] (рис.1, а).



Дифракція пружних хвиль стиску на кругових отворах

При порівнянні результатів розрахунку видно, що напруження відрізняються на 5-7%.

На основі розробленої методики вивчимо питання взаємовпливу отворів при дії падаючої хвилі стиску, що задається потенціалами (*). Розглянемо задачу про дослідження динамічної концентрації напружень на системі кругових отворів радіусу R , центри яких розміщені на осі Ox_1 . На основі розробленої методики проведемо дослідження для випадків, коли відстань між центрами отворів становить $\delta = 2,5R, 3R, 4R$. (рис. 2) при 100 точках розбиття границі. Тут суцільним кривим відповідає розподіл динамічних напружень на границі лівого отвору, пунктирним — правого. Для порівняння наведемо результати розрахунку для випадку, коли пластинка послаблена одним круговим отвором [3]: на рис. 2. цьому випадку відповідає штихпунктирна крива.

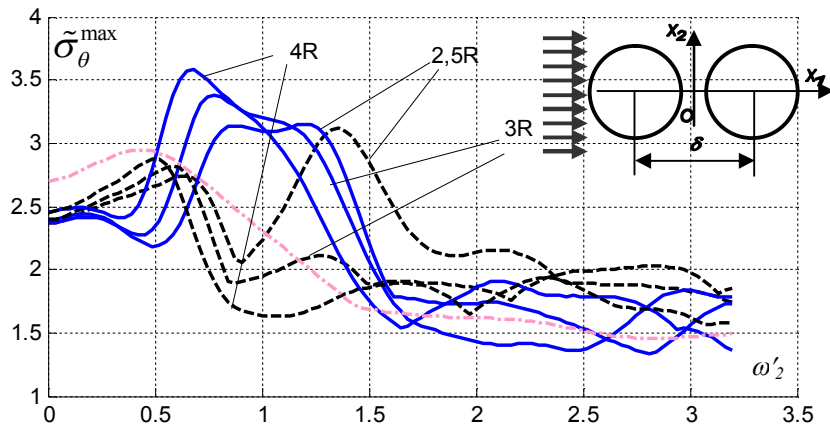


Рис.2. Дифракція пружних хвиль стиску на системі послідовно розміщених кругових отворів

З рисунку видно, що розподіл максимальних динамічних напружень на отворах має складний коливний характер. При малих частотах $\omega'_2 \in (0; 0,6)$ динамічні напруження на границі отворів є меншими у порівнянні з випадком, коли пластинка послаблена одним отвором. Проте значене зростання динамічної концентрації напружень спостерігається в діапазоні частот $\omega'_2 \in (0,6; 1,5)$.

При збільшенні відстані між отворами відбувається зменшення впливу відбитих від границі лівого отвору хвиль на правому отворі.

Дослідимо дію падаючої хвилі стиску на систему послідовно розміщених отворів різних розмірів. На рис. 3 наведено залежність максимальних динамічних напружень від частоти для випадку, коли пластинка послаблена двома круговими отворами з радіусами $0,5R$ та R , відстань між центрами яких $2,5R$. На рис. 4 відображено результати для випадку отворів з радіусами $0,1R$ та R з аналогічною відстанню між центрами. Тут суцільними лініями відображено розподіл максимальних динамічних напружень на границі меншого отвору, а пунктирними — більшого. Аналогічно до попереднього випадку для порівняння на графіку наведено результати розрахунку для випадку одного кругового отвору [3] — штих-пунктирна крива.

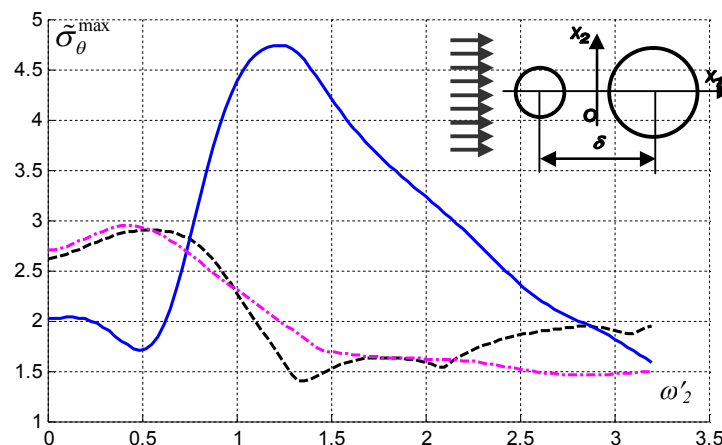


Рис. 3. Розподіл максимальних динамічних напружень на отворах різних розмірів

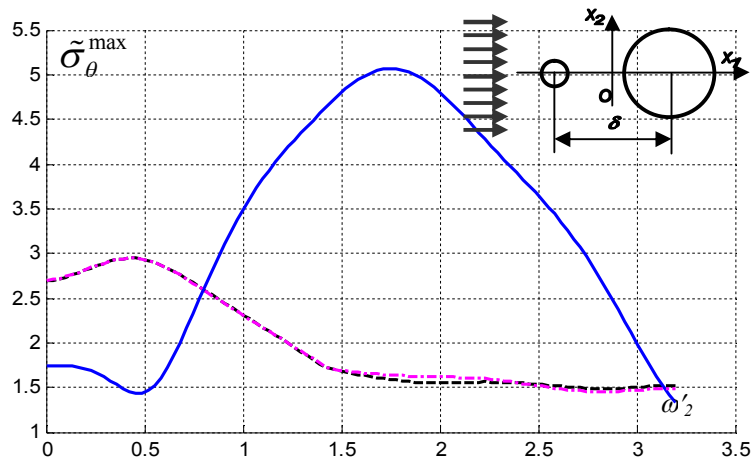


Рис. 4. Динамічна концентрація напружень біля отворів різних розмірів

З рис. 3-4 видно, що для випадку, коли отвори мають різні розміри максимальні динамічні напруження на отворі більшого розміру практично не перевищують випадку, коли пластинка послаблена одним отвором. Проте спостерігається значне зростання динамічної концентрації напружень на отворів меншого розміру у діапазонах частот $\omega'_2 \in (1; 1,5)$ та $\omega'_2 \in (1,5; 2)$, що пов'язано з відбиттям хвиль від границь отвору більшого розміру.

Висновки. У роботі запропонований алгоритм дослідження дифракції пружних хвиль у пластинках, що послаблені системами отворів та вивчено питання впливу відбиття хвиль від границь отворів на розподіл динамічної концентрації напружень у пластинці. Проведені тестові розрахунки для пластинок з системою кругових отворів вказують на ефективність розробленого підходу. На основі розробленої методики досліджено динамічний розподіл напружень у пластинках з системи отворів різної форми у випадку дії падаючої хвилі стиску.

1. Божидарнік В.В., Сулим Г.Т. Елементи теорії пружності. — Л.: Світ, 1994. — 560с.
2. Бреббиа К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. Пер. с англ. / Под ред. Григолюка Э.И. — М.: Мир, 1982. — 248 с.
3. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн.— К.: Наук. думка, 1978. — 308 с.
4. О.А. Мікуліч Концентрація напружень у пластинці з двома отворами від дії осцилюючого тиску // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла.— Дніпропетровськ, 2008, Вип. 9. — С. 138-148.