

УДК 519.876.5; 621.313.33

В.В. Лишук, М.М.Євсюк

Луцький національний технічний університет

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ ПРИ ПОЧЕРГОВОМУ ВИБІГУ АСИНХРОННИХ МОТОРІВ

*Пропонується математична модель електромеханічної системи з чотирма асинхронними моторами, що живляться від спільного трансформатора з їх пуском та подальшим почерговим вибігом. Отримана модель найбільш придатна для аналізу довготривалих перехідних процесів при змінній структурі системи.*

Для побудови математичної моделі використовуємо колові моделі трансформатора та асинхронних моторів у косокутних координатах. Відмінність розробленої математичної моделі від традиційних полягає в поданні диференціальних рівнянь електромеханічного стану в нормальній формі Коші, що усунуло операцію числового обертання матриці коефіцієнтів на кожному часовому кроці, а відповідно мінімізувало затрати комп'ютерного часу. Така форма запису рівнянь є вкрай необхідною для аналізу довготривалих перехідних процесів при змінній структурі електромеханічної системи. Робота є безпосереднім продовженням попередніх публікацій авторів [1, 2].

Математична модель електромеханічної системи складається зі структурних рівнянь і рівнянь елементів. На рис.1 показано схему пуску та почергового вибігу моторів у різні моменти часу. Перший мотор від-микається від вузла системи в момент комутації  $t_{k1} = 3,48$  с, другий при  $t_{k2} = 4,49$  с, третій при  $t_{k3} = 5,49$  с. Четвертий асинхронний мотор працює протягом всього перехідного процесу.

Структурні рівняння вузла живлення записуємо на підставі законів Кірхгофа для електричних кіл, тобто балансу струмів і напруг у вузлі та контурах

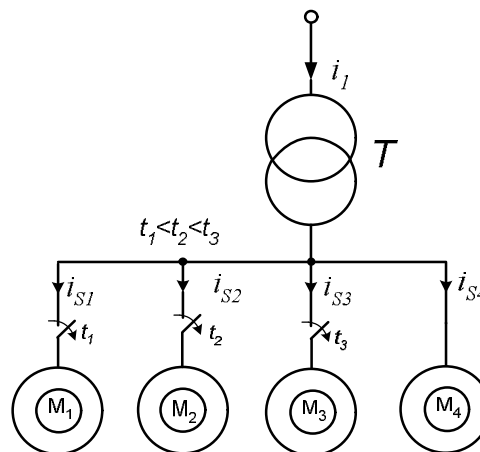


Рис. 1. Принципова схема електромеханічної системи

$$i_2 + \sum_{i=1}^n i_{Si} = 0, \quad u_2 = u_{Si} = V, \quad (1)$$

де  $i_2, i_S$  – колонки фазних струмів вторинної обмотки трансформатора, асинхронних моторів;  $u_2, u_S, V$  – колонки фазних напруг, трансформатора, асинхронних моторів і вузла живлення, відповідно. Тут і подальш струми фази С всіх елементів опущені, оскільки їх при потребі можна легко знайти за першим законом Кірхгофа.

Для спрощення моделі обмежимося диференціальними рівняннями ненасиченого трансформатора. Запишемо їх безпосередньо в нормальній формі Коші [1]

$$\begin{aligned} \frac{di_1}{dt} &= A_1(u_1 - r_1 i_1) + A_{12}(u_2 - r_2 i_2); \\ \frac{di_2}{dt} &= A_{21}(u_1 - r_1 i_1) + A_2(u_2 - r_2 i_2), \end{aligned} \quad (2)$$

де  $u_1 = (u_{1A}, u_{1B})_t$  – колонка напруг мережі,  $i_1 = (i_{1A}, i_{1B})_t$ ,  $i_2 = (i_{2A}, i_{2B})_t$  – колонки струмів;  $r_1, r_2$  – резистивні опори;  $A_1, A_{12}, A_{21}, A_2$  – матриці коефіцієнтів

$$A_1 = G_T \begin{bmatrix} \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_T) & 0 \\ 0 & \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_T) \end{bmatrix}; \quad A_{12} = A_{21} = G_T \begin{bmatrix} -\alpha_1\alpha_2 & 0 \\ 0 & -\alpha_1\alpha_2 \end{bmatrix}; \quad A_2 = G_T \begin{bmatrix} \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_T) & 0 \\ 0 & \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_T) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Тут  $G_T = 1/\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{b}_T$  де  $\bar{b}_1, \bar{b}_2$  – обернені індуктивності розсіяння первинної та вторинної обмоток,  $\bar{b}_T$  – основна обернена індуктивність трансформатора.

Розглядаючи трансформатор як елемент електромеханічної системи будемо вважати, що первинна обмотка пристрою приведена до числа витків вторинної обмотки, що живить груповий вузол системи.

Рівняння асинхронного мотора запишемо подібно до рівнянь (2) трансформатора [1]

$$\begin{aligned} \frac{di_S}{dt} &= A_S(u_S - r_S i_S) + A_{SR}(\Omega \Psi_R - r_R i_R); \\ \frac{di_R}{dt} &= A_{RS}(u_S - r_S i_S) + A_R(\Omega \Psi_R - r_R i_R). \end{aligned} \quad (4)$$

де  $i_S = (i_{SA}, i_{SB})_t$ ,  $i_R = (i_{RA}, i_{RB})_t$  – колонки фазних струмів обмоток статора й приведених струмів ротора;  $r_S, r_R$  – опори обмоток статора й приведеної ротора;  $\Omega$  – матриця кутових швидкостей обертання

$$\Omega_R = \frac{\omega}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Матриці коефіцієнтів рівнянь моторів мають вигляд

$$A_S = \begin{bmatrix} \alpha_S(1 - \alpha_S(T + b_A i_A)) & -\alpha_S^2 b_B i_A \\ -\alpha_S^2 b_A i_B & \alpha_S(1 - \alpha_S(T + b_B i_B)) \end{bmatrix}; \quad A_{SR} = A_{RS} = \begin{bmatrix} -\alpha_S \cdot \alpha_R(T + b_A i_A) & -\alpha_S^2 b_B i_A \\ -\alpha_S^2 b_A i_B & -\alpha_S \cdot \alpha_R(T + b_B i_B) \end{bmatrix}; \quad (6)$$

$$A_R = \begin{bmatrix} \alpha_R(1 - \alpha_R(T + b_A i_A)) & -\alpha_R^2 b_B i_A \\ -\alpha_R^2 b_A i_B & \alpha_R(1 - \alpha_R(T + b_B i_B)) \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнти  $R, T, b_A, b_B, b$  знаходяться за такими формулами

$$R = \frac{1}{\alpha_S + \alpha_R + \rho}; \quad T = \frac{1}{\alpha_S + \alpha_R + \tau}; \quad b_A = b(2i_A + i_B); \quad b_B = b(i_A + 2i_B); \quad b = \frac{2}{3}(R - T)/i_m^2, \quad (7)$$

причому  $i_m$  – намагнечувальний струм машини;  $\alpha_S, \alpha_R$  – обернені індуктивності розсіяння;  $\tau, \rho$  – основні обернені статична та диференціальна індуктивності мотора

$$\tau = \left[ \frac{\Psi_m(i_m)}{i_m} \right]^{-1}; \quad \rho = \left[ \frac{d\Psi_m(i_m)}{di_m} \right]^{-1}. \quad (8)$$

Колонка повних потокозчеплень обмотки ротора  $\Psi_R = (\Psi_{RA}, \Psi_{RB})_t$  має вигляд

$$\Psi_R = \frac{i_S + i_R}{\alpha_m} + \frac{i_R}{\alpha_R}. \quad (9)$$

При відсутності насичення характеристика намагнечування вироджується в пряму

$$i_m = \alpha_m \Psi_m, \quad (10)$$

причому  $\tau = \rho = \alpha_m$ .

Модуль просторового вектора намагнечувальних струмів знаходимо за формулами

$$i_m = 2\sqrt{\frac{i_A^2 + i_A i_B + i_B^2}{3}}; \quad i_A = i_{SA} + i_{RA}; \quad i_B = i_{SB} + i_{RB}. \quad (11)$$

Рівняння електромагнетного стану мотора слід доповнити рівнянням механічного руху ротора для обчислення кутової швидкості, що фігурує в (5)

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p_0}{J}(M_E - M), \quad (12)$$

де  $p_0$  – число пар магнетних полюсів машини;  $J$  – момент інерції ротора;  $M_E$  – електромагнетний момент;  $M$  – механічний момент на валу.

Вираз для електромагнетного моменту  $M_E$  має вигляд

$$M_E = \sqrt{3}p_0(i_{RA}i_{SB} - i_{RB}i_{SA})/\alpha_m. \quad (13)$$

Змоделюємо пуск і почерговий вибіг моторів. Рівняння рівноваги магнеторушійних сил з урахуванням (10), (11), отримаємо

$$\alpha_{mk} \cdot \Psi_k = i_{mk} = i_{Sk} + i_{Rk} = \alpha_{Sk}(\Psi_{Sk} - \Psi_k) + \alpha_{Rk}(\Psi_{Rk} - \Psi_k). \quad (14)$$

З рівняння (14) визначимо основні потокозчеплення

$$\Psi_k = G_k \cdot (\alpha_{Sk} \Psi_{Sk} + \alpha_{Rk} \Psi_{Rk}), \quad (15)$$

де  $G$  – матриця, що має вигляд

$$G = \begin{array}{|c|c|} \hline T + b_A i_A & b_B i_A \\ \hline b_A i_B & T + b_B i_B \\ \hline \end{array}. \quad (16)$$

Рівняння вузла живлення до комутації має вигляд (1). Після комутації (вимикається перший мотор)

$$i_2(+0) + \sum_{k=2}^n i_{Sk}(+0) = 0. \quad (17)$$

Принцип збереження неперервності потокозчеплень окремих елементів дає змогу встановлювати зв'язок між докомутаційним і після комутаційним процесами. Згідно з цим принципом стрибкоподібна зміна повних потокозчеплень можлива лише з тієї сторони елемента, якою він під'єднаний до ефективного вузла індуктивностей. Урахуємо закон комутації для нашого випадку. Потокозчеплення первинної обмотки трансформатора і потокозчеплення роторів  $k$ -их моторів у момент комутації не може змінитися стрибком

$$\Psi_1(+0) = \Psi_1(-0); \quad \Psi_{Rk}(+0) = \Psi_{Rk}(-0), \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (18)$$

Повні потокозчеплення  $\Psi_{Sk}(-0)$  і  $\Psi_{Rk}(-0)$  відомі з попереднього стану.

Струми фаз статорів і роторів моторів знаходимо із таких співвідношень

$$i_S = \alpha_S(\Psi_S - \Psi_S); \quad i_R = \alpha_R(\Psi_R - \Psi_R). \quad (19)$$

Підставляючи (15) у (19), згідно з (18) отримаємо вирази для струмів статора й ротора

$$i_{Sk}(+0) = A_{Sk} \cdot \Psi_{Sk}(+0) + A_{SRk} \Psi_{Rk}(-0); \quad i_{Rk}(+0) = A_{RSk} \Psi_{Sk}(+0) + A_{Rk} \Psi_{Rk}(-0). \quad (20)$$

Підставляючи (20) у (18), одержимо

$$\sum_{k=1}^n A_{Sk} \Psi_{Sk}(+0) = - \sum_{k=1}^n A_{SRk} \Psi_{Rk}(-0). \quad (21)$$

Запишемо рівняння (17) аналогічно до (21)

$$A_{21} \Psi_1(+0) + A_2 \Psi_2(+0) + \sum_{k=2}^n (A_{Sk} \Psi_{Sk}(+0) + A_{SRk} \Psi_{Rk}(-0)) = 0. \quad (22)$$

Задача полягає у знаходженні потокозчеплення вторинної обмотки трансформатора  $\Psi_2(+0)$  після комутації, як базової сторони.

Урахувавши рівняння (18), рівняння (22) буде

$$A_{21}\Psi_1(-0) + A_2\Psi_2(+0) + \sum_{k=2}^n A_{Sk}\Psi_{Sk}(+0) + \sum_{k=2}^n A_{SRk}\Psi_{Rk}(-0) = 0. \quad (23)$$

Вибравши коло вторинної обмотки трансформатора за базисну сторону елемента системи, запишемо неперервність замкнених контурів, утворених обмотками статорів кожного з  $n-1$  решти моторів

$$\Psi_{Sk}(+0) = \Psi_2(+0) - \Psi_2(-0) + \Psi_{Sk}(-0), \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (24)$$

Підставляючи (26) в (25), одержимо

$$B\Psi_2(+0) = X, \quad (25)$$

де

$$B = \left( A_2 + \sum_{k=2}^n A_{Sk} \right); \quad X = -A_{21}\Psi_1(-0) - \sum_{k=2}^n \left( A_{Sk}(\Psi_2(-0) - \Psi_{Sk}(-0)) - \sum_{k=2}^n A_{SRk}\Psi_{Rk}(-0) \right). \quad (26)$$

У випадку наявності батареї конденсаторів, під'єднаних до вузла, у системі зберігається умова неперервності струму

$$i_k(+0) = i_k(-0), \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (27)$$

Розв'язавши рівняння (25), знаходимо матрицю-стовпець  $\Psi_2(+0)$ , а затим згідно з (24) решту відповідних матриць-стовпців окремих моторів  $\Psi_{Sk}(+0)$ .

*Вхідна інформація для розрахунку перехідних процесів.*

Трансформатор:  $U_{lm} = 5150$  В,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 4000$  Гн<sup>-1</sup>,  $r_1 = r_2 = 0,015$  Ом,  $\alpha_T = 40$  Гн<sup>-1</sup>;

АМ1, АМ 3: (А12-52-8А):  $r_{S4} = r_{S8} = r_{S8} = 1,27$  Ом,  $\alpha_S = 39$  Гн<sup>-1</sup>,  $\alpha_R = 35,7$  Гн<sup>-1</sup>,  $\alpha_m = 1,16$  Гн<sup>-1</sup>,  $r_R = 1,31$  Ом,  $J = 64$  кг·м<sup>2</sup>,  $p_0 = 4$ ;  $P_{ном} = 350$  кВт.

АМ2, АМ 4: (А13-62-8):  $r_{S4} = r_{S8} = r_{S8} = 0,76$  Ом,  $\alpha_S = 79$  Гн<sup>-1</sup>,  $\alpha_R = 65,8$  Гн<sup>-1</sup>,  $\alpha_m = 2,02$  Гн<sup>-1</sup>,  $r_R = 0,72$  Ом,  $J = 138$  кг·м<sup>2</sup>,  $p_0 = 4$ ;  $P_{ном} = 620$  кВт.

Моменти навантаження на валах моторів:  $M_1 = 2,257\omega_1 + 74 \cdot 10^{-6}\omega_1^3 - 21 \cdot 10^{-12}\omega_1^5 + 40,6$  Нм;  $M_2 = 8,59\omega_2 + 116 \cdot 10^{-6}\omega_2^3 - 24 \cdot 10^{-11}\omega_2^5 + 81$  Нм;  $M_3 = 900$  Нм,  $M_4 = 2000$  Нм.

Характеристики кривих намагнечування першого і третього мотора  $\psi_m = \psi_m(i_m)$ :

$$\psi_m = \begin{cases} a_1 i_m, & \text{якщо } i_m \leq b_1, \\ a_2 + a_3 k + a_4 \cdot k^2 + a_5 k^3, & \text{якщо } b_1 < i_m < b_2, \\ a_6 i_m + a_7, & \text{якщо } i_m \geq b_2, \end{cases} \quad (28)$$

де  $k = i_m - b_1$ .

Характеристики кривих намагнечування другого і четвертого мотора  $\psi_m = \psi_m(i_m)$ :

$$\psi_m = \begin{cases} c_1 i_m + c_2 i_m^3 + c_3 i_m^5, & \text{якщо } i_m > d_1, \\ i_m / \alpha_m, & \text{якщо } i_m \leq d_1 \end{cases}, \quad (29)$$

Коефіцієнти кривих:  $a_1 = 0,8182$ ,  $a_2 = 9$ ,  $a_3 = 0,818$ ,  $a_4 = 0,064$ ,  $a_5 = 0,000147$ ,  $a_6 = 0,2375$ ,  $a_7 = 23,19$ ,  $b_1 = 11$ ,  $b_2 = 40$ ;  $c_1 = 2,057$ ,  $c_2 = -0,8082 \cdot 10^{-3}$ ,  $c_3 = 0,8271 \cdot 10^{-5}$ ,  $d_1 = 8,33$ .

Інтегрування диференціальних рівнянь електромеханічного стану системи здійснено на алгоритмічній мові Visual FORTRAN методом Рунге-Кутта четвертого порядку.

На рис. 2 показано кутові швидкості обертання моторів як функції часу. Час входу всіх чотирьох електроприводів в усталений процес такий: перший електропривід – 1,7 с, другий – 1,88 с, третій – 2,48 с і четвертий – 3,0 с. При цьому спостерігається незначне перерегулювання по швидкості кожного електропривода (до 5 рад.), що є можливим в реальних системах. Усталені значення кутових швидкостей обертання перших двох моторів становить 312 рад., 3-го і 4-го – 314 рад.

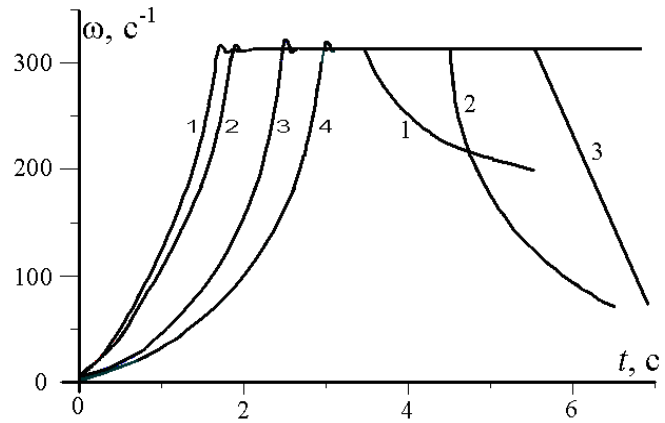


Рис. 2. Кутові швидкості обертання чотирьох моторів при пуску та почерговому вибігу перших

На рис. 3 – 4 показано струми фази А вторинної обмотки трансформатора та першого мотора. На графіку на проміжку часу  $t \in (1,7 \div 3,0)$  с. помітні сходинки струму, що відповідають моментам входження кожного з моторів на усталений процес. В номінальному стані, коли всі мотори вийшли на усталений процес ( $t > 3$  с), струм вторинної обмотки сягає  $i_{2A} = 150$  А. Після аварійного вимкнення першого мотора струм у трансформаторі зменшується стрибкоподібно на величину струму першого мотора  $i_{SA1} = 30$  А і становить  $i_{2A} = 120$  А.

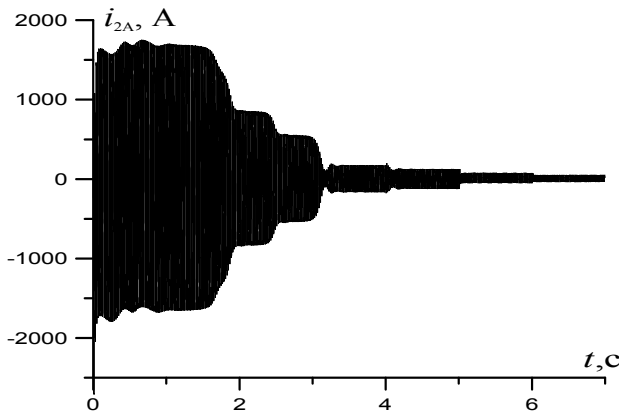


Рис. 3. Перехідний струм вторинної обмотки трансформатора для переходного процесу, зображеного на рис. 2

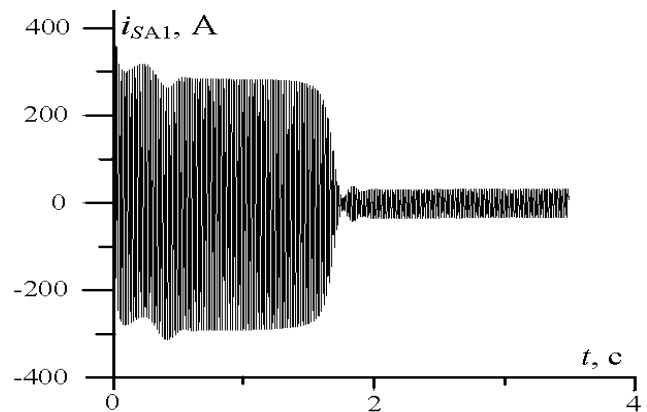


Рис. 4. Перехідний фазний струм статора першого мотора для переходного процесу, зображеного на рис. 2

Усереднені значення пускових струмів обмоток статорів моторів:  $i_{нSA1} = 275$  А,  $i_{нSA2} = 545$  А,  $i_{нSA3} = 280$  А,  $i_{нSA4} = 550$  А.

Струми моторів в усталеному процесі:  $i_{SA1} = 30$  А,  $i_{SA2} = 58$  А,  $i_{SA3} = 18$  А,  $i_{SA4} = 42$  А. У моменти вимкнення другого і третього моторів номінальний струм трансформатора ще двічі зменшується стрибкоподібно. При  $t_{k2} = 4,48$  с  $i_{2A} = 61$  А і при  $t_{k3} = 5,48$  с  $i_{2A} = 53$  А.

На рис. 5 показано стрибок кривої струму вторинної обмотки трансформатора в момент комутації ( $t_{k1} = 3,48$  с).

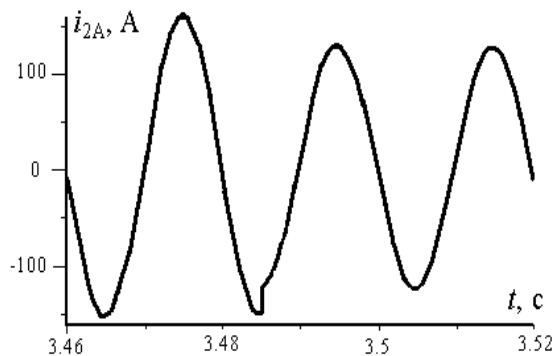


Рис. 5. Стрибок струму вторинної обмотки трансформатора в момент першої комутації

Для зручності комутаційні стрибки струмів у моменти комутацій зведемо в табл. 1.

Таблиця 1

	Трансформа- тор		АМ4		АМ3		АМ 2		АМ 1	
$t_k$	$i_2(-0)$	$i_2(+0)$	$i_{S4}(-0)$	$i_{S4}(+)$	$i_{S3}(-0)$	$i_{S3}(+0)$	$i_{S2}(-0)$	$i_{S2}(+0)$	$i_{S1}(-0)$	$i_{S1}(+0)$
3,485 с	- 150,1	-120,3	-39,25	-39,54	17,84	17,96	62,1	62,8	30,9	0
4,495 с	101,1	61,2	-38,8	-40,4	-20,3	-20,8	-41,5	0	0	0
5,495	80,1	53,2	52,6	53,2	-27,5	0	0	0	0	0

На рис. 6 показано перехідну фазну напругу у вузлі живлення асинхронних машин. Номінальне амплітудне значення фазної напруги вторинної обмотки трансформатора становить  $u_{2A} = 5150\text{В}$ . При пуску моторів на проміжку часу  $t \in [0 \div 1,7\text{с}]$  огинаюча фазної напруги у вузлі спадає до  $u_{2A} = 4830\text{В}$ , що у процентному співвідношенні від номінальної напруги становить 94%.

На рис. 7 показаний перебіг електромагнетного моменту першого мотора в пере-хідному процесі, показаному на рис. 2.

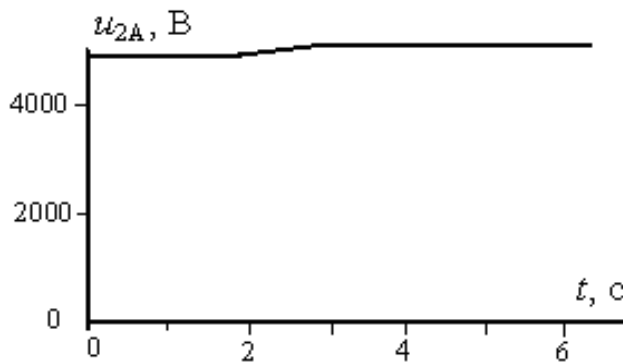


Рис. 6. Огинаюча фазної напруги у вузлі навантаження

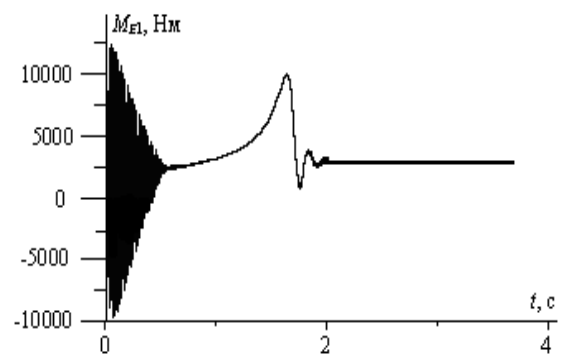


Рис. 7. Електромагнетний момент першого мотора

Аналіз комутаційних процесів в електромеханічних пристроях і системах є серйозною проблемою, адже перенапруги призводять до значних пошкоджень ізоляційних матеріалів моторів і, як наслідок, до передчасного виходу останніх з ладу. Тому математичне моделювання перехідних процесів у вузлі навантаження асинхронних машин, що мають перемінну структуру, з урахуванням узагальнених законів комутації набуває особливої актуальності.

1. Чабан В. Математичне моделювання електромеханічних процесів. – Л.: В-во Держуніверситету „Львівська політехніка”, 1997. – 342 с.
2. Лишук В. Математична модель вузла живлення асинхронних моторів з перемінною структурою // Технічні вісті. – 2008. – № 1 (27), 2 (28). – С. 67 – 70.