

УДК 519.876.5; 621.313.33

В.В. Лишук

Луцький національний технічний університет

## ПОБУДОВА ЧАСОВИХ І ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК АСИНХРОННИХ МОТОРІВ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

У статті пропонуються моделі та методи побудови часових і електромеханічних характеристик елементів електромеханічної системи. Їх відмінність від традиційних полягає в тому, що це методи часової області. Тільки таким шляхом, що спирається на використання числових методів під час розв'язання диференціальних рівнянь електромеханічного стану системи, можна побудувати адекватні фізичному процесу математичні моделі, які оперують реальними фізичними величинами.

Ключові слова: математична модель, числові методи, електротехнічні пристрої.

**Постановка проблеми.** Традиційні методи не здатні розв'язати задачі розрахунку перехідних процесів у електротехнічних пристроях, зокрема асинхронних моторах. Перші спроби інтегрування рівнянь електромагнітного стану здійснювалися аналітичними методами. Труднощі такого розв'язання задач загальновідомі. А якщо розглядати перехідні процеси у вузлі навантаження, то ці методи взагалі позбавлені фізичних засад електродинаміки, оскільки заступні схеми елементів будуються для усталених станів.

**Основна частина.** Метод вузлових напруг є основним методом аналізу. Це зумовлено тим, що ці системи містять велику кількість контурів і вкрай обмежену кількість групових вузлів. Груповими називаємо вузли, утворені полюсами декількох багатополосників. Вузли, утворені полюсами одного й того ж багатополосника, назвемо усамітненими або відокремленими. Маючи полюсні напруги групових вузлів, вихідна система рівнянь, що складається зі структурних рівнянь і рівнянь елементів, розпадається на незалежні рівняння елементів. Це суттєво спрощує процес обчислень і дає змогу скористатися сучасними математичними моделями багатополосних елементів. Полюсні напруги групових вузлів простіше знайти на основі методу міжвузлових напруг і ці напруги в усамітнених вузлах є відомими.

Диференціальні рівняння елементів електромеханічної системи у методі вузлових напруг потрібно розв'язувати відносно перших похідних струмів за часом. Це задача Коші. Цій вимозі задовольняють *A*-моделі електромеханічних пристроїв, диференціальні рівняння яких записані в нормальній формі Коші. Саме ці моделі ми поклали в основу нашого аналізу.

Розглянемо електромеханічну систему, що містить силовий трансформатор і три асинхронних мотори та алгоритм розрахунку пуску системи трьох асинхронних моторів.

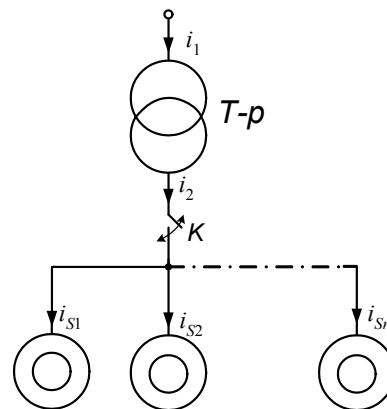


Рис. 1. Структурна схема електромеханічної системи.

Для розв'язання цієї задачі користуємось найдосконалішою *A*-моделлю в косокутних координатах. Диференціальні рівняння системи запишемо в нормальній формі Коші

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI_1}{dt} &= A_1(U_m - R_1 I_1) + A_{12}(U_2 - R_2 I_2); \\ \frac{dI_2}{dt} &= A_{21}(U_m - R_1 I_1) + A_2(U_2 - R_2 I_2). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dI_S}{dt} &= A_S(U_2 - R_S I_S) + A_{SR}(\Omega \Psi_R - R_R I_R); \\ \frac{di_R}{dt} &= A_{RS}(U_2 - R_S I_S) + A_R(\Omega \Psi_R - R_R I_R). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

де  $U_m$  – колонка напруг мережі;  $U_2$  – колонка напруг вузла навантаження системи;  $i_1 = (i_{1A}, i_{1B})_t$ ,  $i_2 = (i_{2A}, i_{2B})_t$ ,  $i_S = (i_{SA}, i_{SB})_t$ ,  $i_R = (i_{RA}, i_{RB})_t$  – колонки фазних струмів обмоток трансформатора, статора й перетворених струмів ротора мотора;  $A_{11}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$  – матриці коефіцієнтів трансформатора

$$A_T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_T + \alpha_1 + \alpha'_2} \begin{bmatrix} \alpha_1(\alpha'_2 + \alpha_T) & 0 & -\alpha_1\alpha'_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1(\alpha'_2 + \alpha_T) & 0 & -\alpha_1\alpha'_2 \\ -\alpha_1\alpha'_2 & 0 & \alpha'_2(\alpha_1 + \alpha_T) & 0 \\ 0 & -\alpha_1\alpha'_2 & 0 & \alpha'_2(\alpha_1 + \alpha_T) \end{bmatrix}; \quad (3)$$

$R_1, R_2$  – матриці опорів трансформатора

$$R_j (j = 1, 2) = \text{diag}(r_{jA}, r_{jB}, r_{jC}), \quad (4)$$

$R_S, R_R$  – матриці опорів моторів

$$R_j = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2r_{jA} + r_{jA} & r_{jC} - r_{jB} \\ r_{jC} - r_{jA} & 2r_{jB} + r_{jC} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$\Omega$  – матриця кутової швидкості

$$\Omega_R = \frac{\omega}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Для  $n$ -моторів їх матриці  $A_S, A_R, A_{RS}, A_{SR}$  будуть поверхневими (кубічними).

$$A_{Si} = \alpha_{Si}(1 - \alpha_{Si}G_i); \quad A_{SRi} = A_{RSi} = -\alpha_{Si}\alpha_{Ri}G_i; \quad A_{Ri} = \alpha_{Ri}(1 - \alpha_{Ri}G_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7)$$

де  $G_i$  – матриці моторів, які знаходяться за формулою

$$G = \begin{bmatrix} T + b_A I_A & b_B I_A \\ b_A I_B & T + b_B I_B \end{bmatrix}. \quad (8)$$

де  $b_A, b_B, b, R, T$  – коефіцієнти

$$b_A = b(2I_A + I_B); \quad b_B = b(I_A + 2I_B); \quad b = \frac{2}{3}(R - T)/I_m^2; \quad (9)$$

$$R = \frac{1}{\alpha_S + \alpha_R + \rho}; \quad T = \frac{1}{\alpha_S + \alpha_R + \tau}; \quad b = \frac{R - T}{\Psi_m^2}; \quad b_A = \frac{2}{3}b(2\Psi_A + \Psi_B); \quad b_B = \frac{2}{3}b(\Psi_A + 2\Psi_B). \quad (10)$$

Для врахування насичення магнітопроводів моторів користуємось їхніми характеристиками намагнічування  $\Psi_m = \Psi_m(I_m)$ .

Залежно від струму намагнічування, маємо:

$$\tau = \left[ \frac{\Psi_m(I_m)}{I_m} \right]^{-1}; \quad \rho = \left[ \frac{d\Psi_m(I_m)}{dI_m} \right]^{-1}, \quad (11)$$

де  $\tau$  і  $\rho$  – основні обернені статична та диференціальна індуктивності мотора.

Модуль вектора намагнічувальних струмів  $I_m$  знаходимо за формулою

$$I_m = 2\sqrt{\frac{I_A^2 + I_A I_B + I_B^2}{3}}, \quad (12)$$

де

$$I_A = I_{SA} + I_{RA}; \quad I_B = I_{SB} + I_{RB}. \quad (13)$$

Матриця коефіцієнтів  $A$  моторів має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_S(1 - \alpha_S(T + b_A I_A)) & -\alpha_S^2 b_B I_A & -\alpha_S \cdot \alpha_R(T + b_A I_A) & -\alpha_S^2 b_B I_A \\ -\alpha_S^2 b_A I_B & \alpha_S(1 - \alpha_S(T + b_B I_B)) & -\alpha_S^2 b_A I_B & -\alpha_S \cdot \alpha_R(T + b_B I_B) \\ -\alpha_S \cdot \alpha_R(T + b_A I_A) & -\alpha_S^2 b_B I_A & \alpha_R(1 - \alpha_R(T + b_A I_A)) & -\alpha_R^2 b_B I_A \\ -\alpha_S^2 b_A I_B & -\alpha_S \cdot \alpha_R(T + b_B I_B) & -\alpha_R^2 b_A I_B & \alpha_R(1 - \alpha_R(T + b_B I_B)) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Таким чином ми отримали найпростішу математичну модель асинхронного мотора.

Колонка повних потокозчеплень обмотки ротора  $\Psi_R = (\Psi_{RA}, \Psi_{RA})_t$ , що фігурує в (2) має вигляд

$$\Psi_{Rj} = \frac{I_j}{\tau} + \frac{I_{Rj}}{\alpha_R}; \quad j = A, B. \quad (15)$$

Запишемо структурні рівняння для рис.1 на підставі першого та другого законів Кірхгофа

$$I_2 + \sum_{i=1}^n I_{Si} = 0, \quad U_2 = U_{Si} = V, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (16)$$

Диференціюючи перший вираз (16), одержимо

$$\frac{dI_2}{dt} + \sum_{i=1}^n \frac{dI_{Si}}{dt} = 0. \quad (17)$$

Задача полягає у знаходженні напруг  $V_A, V_B$  в перехідних процесах, що є фазними напругами вузла навантаження. Як бачимо з (17), електрично тільки пов'язані вторинна обмотка трансформатора та статорні обмотки моторів. Підставимо рівняння (1), (2) в рівняння (17)

$$A_{21}(U_m - R_1 I_1) + A_{22}(V - R_2 I_2) + \sum_{i=1}^n A_{Si}(V - R_{Si} I_{Si}) + \sum_{i=1}^n A_{SRi}(\Omega \Psi_{Ri} - R_{Ri} I_{Ri}) = 0. \quad (18)$$

Надамо виразу (18) такого вигляду

$$\left( A_{22} + \sum_{i=1}^n A_{Si} \right) V = -A_{21}(U_m - R_1 I_1) + A_{22} R_2 I_2 + \sum_{i=1}^n A_{Si} R_{Si} I_{Si} - \sum_{i=1}^n A_{SRi}(\Omega \Psi_{Ri} - R_{Ri} I_{Ri}). \quad (19)$$

Розв'язуючи рівняння (19) стосовно невідомих напруг вузла, одержимо

$$V = M^{-1} \cdot \left[ -A_{21}(U_m - R_1 I_1) + A_{22} R_2 I_2 + \sum_{i=1}^n A_{Si} R_{Si} I_{Si} - \sum_{i=1}^n A_{SRi}(\Omega \Psi_{Ri} - R_{Ri} I_{Ri}) \right], \quad (20)$$

де  $M^{-1}$  – обернена матриця до матриці  $M$  розміром  $(2 \times 2)$

$$M = A_2 + \sum_{i=1}^n A_{Si}. \quad (21)$$

Запишемо остаточно рівняння (20) у матричному вигляді

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = M^{-1} \cdot \left[ \begin{array}{cc|c} a_{t31} & a_{t32} & \left( \frac{U_m \sin \omega t}{U_m \sin(\omega t - 2\pi/3)} - R_1 \cdot \frac{I_{1A}}{I_{1B}} \right) \\ a_{t41} & a_{t42} & \frac{I_{2A}}{I_{2B}} \end{array} \right] + \begin{bmatrix} a_{t33} & a_{t34} \\ a_{t43} & a_{t44} \end{bmatrix} \cdot R_2 \cdot \begin{bmatrix} I_{2A} \\ I_{2B} \end{bmatrix} + \\ + \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} a_{11i} & a_{12i} \\ a_{21i} & a_{22i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_{SAi} \\ R_{SBi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{SAi} \\ I_{SBi} \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} a_{13i} & a_{14i} \\ a_{23i} & a_{24i} \end{bmatrix} \cdot \left( \frac{\omega}{\sqrt{3}} \begin{array}{cc|c} -1 & -2 & \Psi_{RAi} \\ 2 & 1 & \Psi_{RBi} \end{array} - \begin{bmatrix} R_{RAi} \\ R_{RBi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_{RAi} \\ I_{RBi} \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

Вирази (2), (15) утворюють повну систему диференціальних рівнянь електромагнітного стану асинхронної машини в косокутних координатах. До них слід додати рівняння руху ротора

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{p_0}{J} (M_E - M); \quad (23)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega, \quad (24)$$

де  $p_0$  – число пар магнітних полюсів машини;  $J$  – момент інерції ротора;  $M_E$  – електромагнітний момент;  $M$  – механічний момент;  $\gamma$  – кут повороту ротора в електричних радіанах.

Вираз для моменту  $M_E$  має вигляд [1]

$$M_E = \sqrt{3} p_0 (I_{RA} I_{SB} - I_{RB} I_{SA}) / \tau. \quad (25)$$

Для практичного користування даною моделлю необхідно знати резистивні опори обмоток статора і ротора  $R_S, R_R$ , обернені індуктивності дисипації  $\alpha_S, \alpha_R$  обмоток, криву намагнічування, момент інерції  $J$ , кількість пар магнетних полюсів  $p_0$ , зовнішні дії – напруги  $U_S$  і механічний момент на валу ротора  $M$ .

Вхідна інформація для розрахунку пуску системи. Трансформатор:  $S_n = 1000$  кВА;

$U_{1m} = 5150$  В,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 4000$  Гн<sup>-1</sup>,  $r_1 = r_2 = 0,015$  Ом,  $\alpha_T = 40$  Гн<sup>-1</sup>;

АМ1, АМ3: (А12-52-8А):  $r_{SA} = r_{SB} = r_{SC} = 1,27$  Ом,  $\alpha_S = 39$  Гн<sup>-1</sup>,  $\alpha_R = 35,7$  Гн<sup>-1</sup>,  $\alpha_m = 1,16$  Гн<sup>-1</sup>,  
 $r_R = 1,31$  Ом,  $J = 64$  кг·м<sup>2</sup>,  $p_0 = 4$ ;  $P_{ном} = 350$  кВт.

АМ2: (А13-62-8):  $r_{SA} = r_{SB} = r_{SC} = 0,76$  Ом,  $\alpha_S = 79$  Гн<sup>-1</sup>,  $\alpha_R = 65,8$  Гн<sup>-1</sup>,  $\alpha_m = 2,02$  Гн<sup>-1</sup>,  
 $r_R = 0,72$  Ом,  $J = 138$  кг·м<sup>2</sup>,  $p_0 = 4$ ;  $P_{ном} = 620$  кВт.

Моменти навантаження на валах моторів статичні:  $M_1 = 1000$  Нм,  $M_2 = 4000$  Нм,  $M_3 = 1200$  Нм.

Характеристики кривих намагнічування першого і третього мотора  $\Psi_m = \Psi_m(i_m)$ :

$$\Psi_m = \begin{cases} a_1 i_m, & \text{якщо } i_m \leq b_1, \\ a_2 + a_3 k + a_4 \cdot k^2 + a_5 k^3, & \text{якщо } b_1 < i_m < b_2, \\ a_6 i_m + a_7, & \text{якщо } i_m \geq b_2, \end{cases} \quad (26)$$

де  $k = i_m - b_1$ .

Характеристики кривих намагнічування другого і четвертого мотора  $\Psi_m = \Psi_m(i_m)$ :

$$\Psi_m = \begin{cases} c_1 i_m + c_2 i_m^3 + c_3 i_m^5, & \text{якщо } i_m > d_1, \\ i_m / \alpha_m, & \text{якщо } i_m \leq d_1. \end{cases} \quad (27)$$

Коефіцієнти кривих:  $a_1 = 0,8182$ ,  $a_2 = 9$ ,  $a_3 = 0,818$ ,  $a_4 = 0,064$ ,  $a_5 = 0,000147$ ,  $a_6 = 0,2375$ ,  $a_7 = 23,19$ ,  $b_1 = 11$ ,  $b_2 = 40$ ;  $c_1 = 2,057$ ,  $c_2 = -0,8082 \cdot 10^{-3}$ ,  $c_3 = 0,8271 \cdot 10^{-5}$ ,  $d_1 = 8,33$ .

Інтегрування диференціальних рівнянь електромеханічного стану системи здійснено явним методом Ейлера.

На рис. 2 показано кутові швидкості обертання моторів як функції часу. Час входу першого мотора в усталений процес – 1,7 с, третього – 2,6 с. У момент часу  $t = 2$  с навантаження на валу першого мотора збільшується до 10000 Нм. У момент часу  $t = 1,5$  с на вал другого мотора накидається навантаження 11200 Нм. Тобто, другий мотор на усталений процес ( $\omega \approx 314$  рад.) не

виходить. Його швидкість становить 200 рад. і така робота мотора неможлива. Це й замітно на рис. 7, де амплітудне значення струму становить 560 А, що набагато більше номінального 60 А. Це негативно позначається на мережі, оскільки спостерігається значний спад напруги у вузлі навантаження і на ізоляції обмоток статора мотора.

Усталені значення кутових швидкостей обертання першого мотора становить 311 рад., після накиду навантаження – 305 рад., другого – 200 рад., третього – 310 рад. Тобто ковзання першого і третього мотора лежить в межах номінального.  $s_1 = 0,028$  в.о.,  $s_3 = 0,013$  в.о, що становить 2,8% і 1,3 % від синхронної швидкості обертання магнітного поля статора  $\omega_0 = 314$  рад. При цьому спостерігається незначне перерегулювання по швидкості (до 5 рад.), що є можливим в реальних системах.

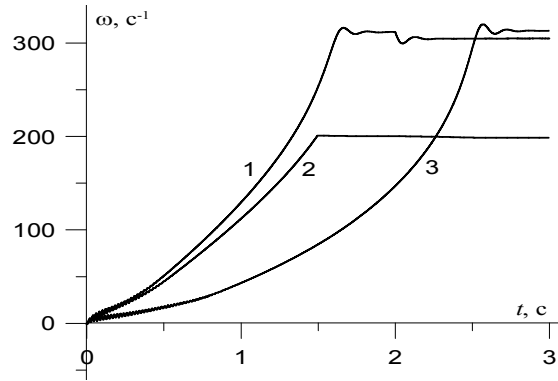


Рис. 2. Кутові швидкості обертання трьох моторів при їх

На рис. 3 – 5 показано механічні характеристики трьох моторів  $\omega = f(M)$ . Як видно звідси, пускові моменти трьох моторів становлять  $M_{п1} = 2500$  Нм,  $M_{п2} = 5000$  Нм,  $M_{п3} = 2500$  Нм,

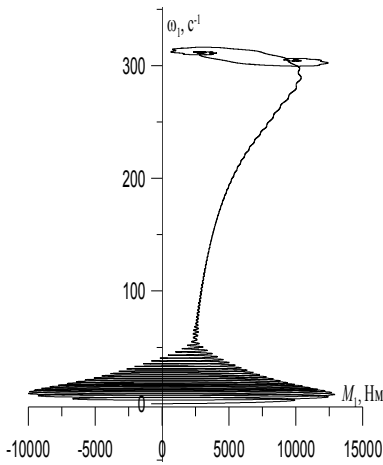


Рис. 3. Механічна характеристика першого асинхронного двигуна

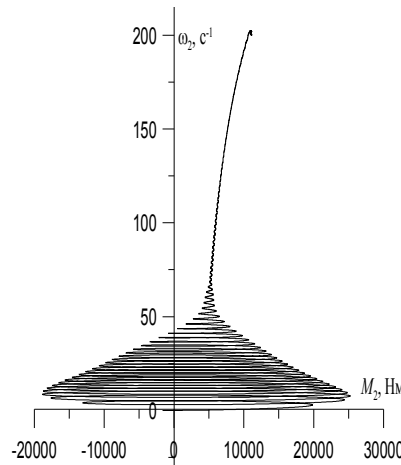


Рис. 4. Механічна характеристика другого асинхронного двигуна

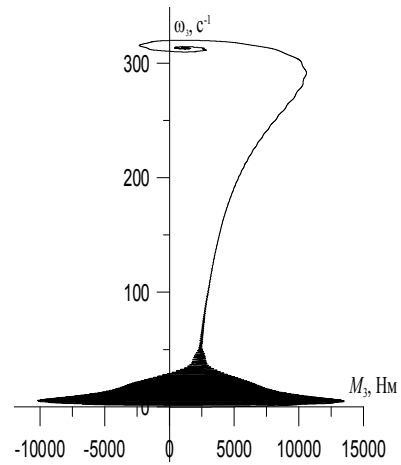


Рис. 5. Механічна характеристика третього асинхронного двигуна

На рис. 6-8 показано часові залежності струмів однієї з фаз статора трьох моторів. Усереднені значення пускових струмів обмоток статорів моторів:  $i_{нс41} = 275$  А,  $i_{нс42} = 545$  А,  $i_{нс43} = 280$  А. Струми моторів в усталеному процесі:  $i_{с41} = 38$  А, після накиду навантаження  $i_{с41} = 115$  А,  $i_{с42} = 560$  А,  $i_{с43} = 21$  А.

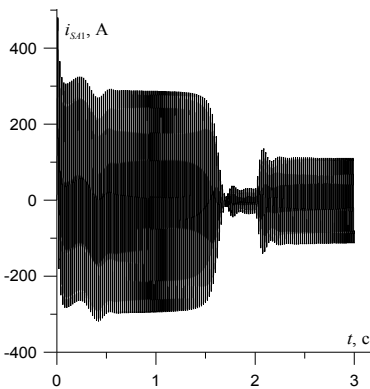


Рис. 6. Струм фази А обмотки статора першого мотора

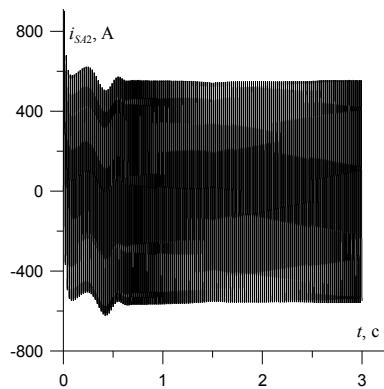


Рис. 7. Струм фази А обмотки статора другого мотора

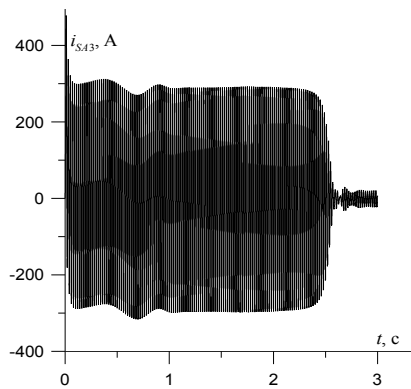


Рис. 8. Струм фази А обмотки статора третього мотора

На рис. 9 показано перехідний струм у вторинній обмотці трансформатора, де в кінці перехідного процесу струм трансформатора не є номінальним і становить приблизно 620 А. Трансформатор так як і другий мотор в такому випадку є перевантаженим. Перший закон Кірхгофа у вузлі живлення в будь-який момент часу справджується, що підтверджується програмним комплексом *Visual Fortran + Grapher 7*.

На рис. 10 показано перехідну фазну напругу у вузлі живлення асинхронних машин. Номінальне амплітудне значення напруги вторинної обмотки трансформатора становить  $u_{2A} = 5150$  В. При пуску огинаюча напруги спадає до  $u_{2A} = 4810$  В, що у процентному співвідношенні від номінальної напруги становить 92 %. Внаслідок великого навантаження на валу другого мотора напруга протягом перехідного процесу не піднімається до необхідних 95-97 %.

На рис. 11 показано перебіг електромагнітного моменту першого мотора, де

Тому змітоване навантаження на валу другого мотора є завеликим і на практиці такий режим роботи мотора а заодно й системи експлуатувати не можна.

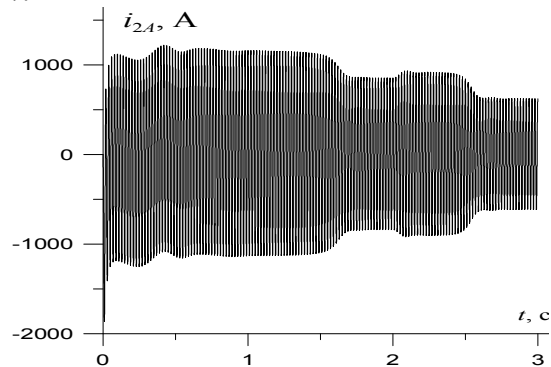


Рис. 9. Перехідний струм фази А вторинної обмотки трансформатора

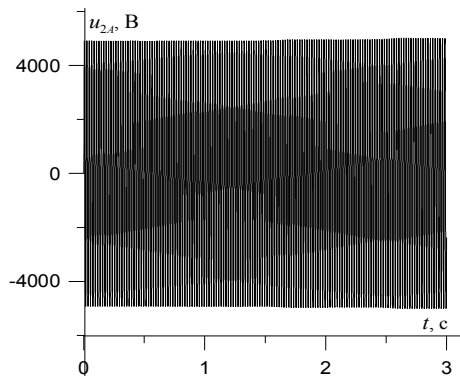


Рис. 10. Напруга фази А у вузлі навантаження

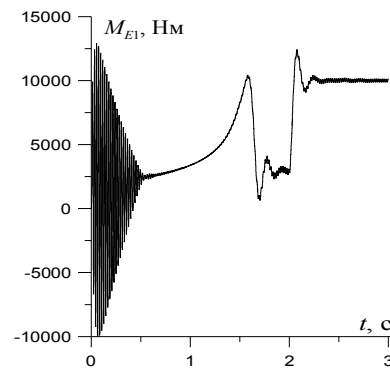


Рис. 11. Перехідний електромагнітний момент першого мотора

**Висновки.** Запропоновані рівняння електромеханічного стану динамічної системи уможливають відтворювати всеможливі аварійні й несиметричні стани, а заодно дають можливість аналізувати перехідні процеси.

Розроблений на основі побудованих математичних моделей програмний комплекс за обсягом пам'яті, обчислень, структурою економніший та простіший за існуючі й розширив можливості аналізу довготривалих перехідних процесів. Результати числових розрахунків та натурних експериментів підтвердили правильність прийнятих у основу аналізу допущень, що забезпечують достатню точність отримуваних результатів.

1. Чабан В. Математичне моделювання електромеханічних процесів. – Л.: В-во Держуніверситету „Львівська політехніка”, 1997. – С. 342.