

УДК 519.876.5; 621.313.33

В.В. Лишук

Луцький національний технічний університет

## СУЧАСНИЙ СТАН РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ЕЛЕКТРОТЕХНІЧНИХ ПРИСТРОЇВ

*Роботу присвячено математичному моделюванню перехідних процесів у електро-механічних системах, удосконаленню математичних моделей електромеханічних пристроїв.*

*Поєднання методів теорії електромагнітних кіл та теорії електромагнітного поля на практиці показує суттєві переваги даного способу розв'язання ряду складних задач теоретичної електротехніки. При такому підході запропоновані математичні моделі дають змогу описати складні фізичні процеси в згаданих пристроях та системах, а саме – насичення магнітопроводів, скін-ефект у струмопроводах, механічний обертовий рух електромагнітних контурів, змінну структуру та несиметрію тощо. Їх відмінність від відомих полягає в представленні системи диференціальних рівнянь електромеханічного стану в нормальній формі Коші, що усуває операцію числового обертання матриці коефіцієнтів на кожному часовому кроці інтегрування.*

Ключові слова: *математична модель, числові методи, електротехнічні пристрої.*

**Постановка проблеми.** Застарілі інженерні методи, побудовані на основі заступних колових електричних схем трансформаторів, асинхронних машин, на сьогоднішній час, не дають змоги отримати з достатньою точністю інформацію про струми та напруги вузла навантаження. Для відображення реальної фізичної картини роботи системи побудовано моделі елементів на основі фундаментальних законів електродинаміки та об'єднано ці моделі в єдину математичну модель вузла живлення асинхронних моторів.

Диференціальні рівняння традиційних моделей мають неявну форму, тому при чисельній реалізації у випадку довготривалих процесів обертання матриці коефіцієнтів призводить до суттєвих затрат комп'ютерного часу і накопичення похибок в процесі інтегрування. Цю складну проблему дисертант розв'язує в той спосіб, що диференціальні рівняння електромеханічного стану системи є нежорсткими і, що важливо, записує в нормальній формі Коші. Нормальна форма Коші є вкрай необхідною для аналізу систем зі змінною структурою, бо при змінні числа невідомих матриця коефіцієнтів суттєво перестроюється.

Врахування поверхневого ефекту в струмопроводах електротехнічних пристроїв здійснено на підставі методів теорії електромагнітного поля. Тут використано диференціальні рівняння з частинними похідними з їх подальшою дискретизацією за лінійними диференціальними рівняннями. Використання для цієї задачі методів теорії електричних кіл приводить до зростання порядку й жорсткості диференціальних рівнянь, зумовленої параметрами рекурентних кіл, що суттєво ускладнює алгоритми їх інтегрування й зумовлює втрату точності розрахунків.

**Основна частина.** Стрімкий розвиток сучасних технологій неминуче призводить до морального старіння електромеханічних пристроїв і систем. Очевидно, що розробка новітніх технологій та методів є невід'ємною задачею спеціалістів в області математичного моделювання. Якщо теоретична база, яка заснована на засадах електродинаміки є достатньо розроблена, то методи розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь вимагають все нових і нових підходів у залежності від комп'ютерної техніки. Тому теоретичний підхід до розв'язання задач математичного моделювання електромеханічних систем є об'єктивною реальністю.

Основними елементами таких систем зазвичай є силові трифазні трансформатори й асинхронні мотори як у звичайному виконанні так і з підвищеним пусковим моментом. У залежності від умов задачі та використання математичного апарата (звичайні диференціальні рівняння чи рівняння з частинними похідними) математичні моделі в математичному аспекті можна розглядати як задачу Коші або мішану задачу.

У таких системах складність фізичного процесу зумовлюється наявністю великої кількості електричних контурів, майже половина яких знаходиться в обертовому русі, взаємними індуктивними зв'язками між рухомими і нерухомими контурами, насиченням шляхів магнітних потоків, явищем поверхневого ефекту в пазах рухомих контурів, частими змінами структури системи, то призводить до появи розривів першого роду досліджуваних функцій. Все це, як правило, в реальних системах є тривалим у часі. Цей останній фактор ставить ще одну складну проблему під кутом

зору обчислювальної математики. Значна тривалість в часі розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь накладає жорсткі обмеження на накопичення помилок, яку числовими методами практично не розв'язати. Але при цьому треба було відійти від традиційних підходів в області електромеханіки та сформувати нову систему нелінійних диференціальних рівнянь електромагнетного стану і нормальній формі Коші аби усунути найболючіше місце числового обертання – віднімання двох близьких величин, яке неминуче виникає на стадії приведення диференціальних рівнянь до нормальної форми Коші числовими методами.

Оскільки реальні електромеханічні системи містять значну кількість таких елементів, то їх математична модель описується нелінійними диференціальними рівняннями дуже високого порядку. Тому виникає практична проблема комп'ютерного інтегрування таких систем, аби модель була працездатною. Математичний апарат відомих традиційних моделей не завжди достатньо точно описує фізичні процеси в електромеханічних пристроях і ускладнює їх подальшу комп'ютерну реалізацію. Особливо це стосується систем із розподіленими параметрами. Тому проблема адекватності математичних моделей їх фізичним аналогам набуває особливої гостроти.

Аналіз показує, що вдосконалити методи математичного моделювання можна шляхом їх орієнтації на використання прийнятних числових методів, зокрема явного інтегрування. А це можна зробити лише за відмови від традиційних підходів на користь нових, розглянутих у дисертації. Це перш за все стосується переходу від використання методів теорії електричних кіл до методів електромагнітних кіл і методів електромагнітного поля в їх тісному поєднанні.

Сучасні комп'ютери дають змогу у багатьох випадках відмовитися від натурального макетування проєктованих виробів, замінивши його математичним моделюванням, що дуже важливо, коли таке макетування надто коштовне і практично неможливе. Але при цьому повинна бути істотно підвищена точність математичних моделей об'єктів і систем, що враховують багато фізичних ефектів та дестабілізуючих чинників, якими раніше нехтували. У результаті порядок диференціальних рівнянь і складність математичних моделей істотно зростають, а їх розв'язання в аналітичному вигляді стає неможливим [3].

Розробка методів математичного моделювання, а заодно й математичних моделей складних електромеханічних систем є визначальним в технічному поступі і належить до пріоритетних задач загальної теорії математичного моделювання. Аналіз таких систем немислимий без створення сучасних математичних моделей їхніх окремих пристроїв.

Розроблені математичні моделі на прикладах трифазного трансформатора та асинхронних моторів повинні сприяти розв'язанню таких практичних задач:

- використання у системах автоматизованого проєктування нових моделей пристроїв, які б задовольняли новим вимогам роботи в системі;
- застосування математичних моделей і пакетів комп'ютерних програм при проєктуванні та експлуатації електромеханічних систем;
- використання методів математичного моделювання та комп'ютерної симуляції дасть змогу відмовитись від натурних експериментів, які в багатьох випадках є складними і коштовними.

На початку свого розвитку методи математичного моделювання електромеханічних пристроїв розвивалися як методи в позачасовій області. Електричні машини розглядалися як ідеальні пристрої, у яких електромагнітні зв'язки були лінеаризовані, що, в результаті, призводило до якісно неправильних результатів. Тобто, математичний апарат неадекватно описував фізичний процес у цих пристроях. Тому в докомп'ютерний час обходилися наближеними розрахунками, які базувались на аналітичному розв'язуванні рівнянь електромеханічного стану, записаних без урахування насичення сталі магнетопроводів. Очевидно, що теорія ненасичених електромеханічних пристроїв була розроблена практично досконало.

Максимальне використання сталі магнітопроводів пристроїв призводило до того, що електромагнітні зв'язки у номінальних станах суттєво відрізнялися від лінійних. У цей час розроблялись методи розрахунку, які базувались на наближеному врахуванні нелінійностей. Але ці методи не задовольняли тодішніх вимог практики. Тому рівняння електромеханічної системи необхідно було розглядати як нелінійні. Такий підхід суттєво ускладнював інтегрування диференціальних рівнянь. Але, тільки такий підхід до математичного моделювання забезпечив би високу точність розрахунку перехідних процесів.

Першим удалим кроком у розвитку теорії нелінійних електричних кіл було введення поняття диференціальних індуктивностей. Суть цього підходу полягала в тому, що із загальної системи алгебро-диференціальних рівнянь стану електромагнітних кіл несвідомо виключали

рівняння магнітного субкола, а отриманий результат диференціювали за часом. В результаті в рівняннях, що залишилися, коефіцієнтами були диференціальні само- і взаємоіндуктивності електричних контурів. Оскільки магнітної складової в математичній моделі не було, то для опису електромагнітних процесів у пристроях необхідно було обчислювати значну кількість статичних і диференціальних коефіцієнтів само- й взаємоіндукції. При такому підході виникала проблема запису диференціальних рівнянь електромеханічного стану в нормальній формі Коші. Другим недоліком згаданих моделей була необхідність обертання матриці коефіцієнтів на кожному часовому кроці, що створювало певні незручності під час інтегрування системи диференціальних рівнянь [3].

Пізніше зароджується більш сучасна і складніша теорія, яка якісніше враховує насичення магнітопроводів в електромеханічних пристроях, але на підставі не електричних, а електромагнітних кіл [3, 4]. Суть нового підходу полягала в тому, що із загальної системи алгебро-диференціальних рівнянь електромагнітного стану потрібно було виключати рівняння не магнітного, а електричного кола та диференціювати отриманий результат за часом. Це дало змогу не вводити в рівняння математичної моделі диференціальних і статичних параметрів. Отримана матриця інших коефіцієнтів є набагато простішою і її порядок відповідає кількості незалежних магнітних контурів, яка у більшості пристроїв є незначною. Звідси рівняння магнітного субкола легко записується в нормальній формі Коші.

Запропонована методика розв'язання рівнянь електромагнітного стану на основі електромагнітних кіл є значно ефективнішою як у плані побудови математичних моделей, так і в плані їх програмно-числової реалізації.

Традиційні методи не здатні розв'язати задачі розрахунку перехідних процесів у пристроях, що містять масивні струмо- та магнітопроводи, вихрові поля у тілі яких виконують робочі функції, а, значить, повинні бути враховані з високою точністю. Тому, тут необхідно залучати методи теорії електромагнітного поля, чому посприяв розвиток числових методів та сучасної комп'ютерної техніки [3]. Це дало змогу інтегрувати нелінійні диференціальні рівняння електромеханічного стану, застосовуючи апарат обчислювальної математики, який заснований на теорії диференціального числення. Для таких математичних моделей рівняння електромагнітних кіл неточно відтворюють фізичні процеси, тому для побудови таких моделей застосовують рівняння Ейлера для вектор-потенціалу [2] в лінійному (глибокий паз) та нелінійному (залізне осердя ротора) середовищах. Тобто, математичні моделі електромеханічних пристроїв можна розглядати як задачу Коші або мішану задачу. Перші спроби інтегрування рівнянь електромагнітного поля здійснювалися аналітичними методами. Труднощі такого розв'язання задач загальновідомі. А якщо розглядати перехідні процеси у вузлі навантаження, то ці методи взагалі позбавлені фізичних засад електродинаміки, оскільки заступні схеми елементів будуються для усталених станів. Для реальної фізичної картини необхідно будувати моделі елементів на основі фундаментальних законів електродинаміки та об'єднувати ці моделі в єдину математичну модель вузла навантаження, сумісно інтегруючи рівняння електромеханічного стану.

Основними недоліками згаданих моделей є:

– тут для розв'язання системи рівнянь електричної рівноваги відносно похідних струмів необхідно знаходити обернену матрицю індуктивностей трансформатора і множити коефіцієнти цієї матриці на відповідні праві частини рівнянь. Аж тоді ці рівняння будуть приведені до нормальної форми Коші і їх можна буде розв'язувати відомими числовими методами. Отже, для врахування насичення магнітопроводів ці моделі оперують поняттями диференціальних індуктивностей контурів, тому їх рівняння не можуть бути аналітично представлені у нормальній формі Коші.

Основними недоліками традиційних моделей є:

– урахування скін-ефекту у струмопроводах машин здійснюється на основі теорії електричних кіл. Тут використано багатоконтурну заступну схему, визначення параметрів якої ускладнене за рахунок зростання кількості ланок. Це збільшує порядок диференціальних рівнянь та їх жорсткість, що приводить до втрати точності результатів.

Аналіз окремих електромеханічних пристроїв не задовольняє теперішнім вимогам практики. Зараз все ширше й ширше аналізуються складні електромеханічні системи, до складу яких входять ці пристрої [1, 4]. Диференціальні рівняння математичних моделей таких систем також повинні бути записані у нормальній формі Коші. Це було зроблено методом вузлових напруг, який вдалось адаптувати до часових областей.

У результаті цього виникли так звані коло-польові математичні моделі [2, 4]. Зараз

створилися усі реальні умови для практичного використання у математичному моделюванні цих моделей. Вони націлені на числові методи, для яких використовується якісно новий математичний апарат, що ґрунтується на засадах загальної теорії нелінійних диференціальних рівнянь як у звичайних, так і частинних похідних.

Досвід показує, що такі моделі доцільно використовувати для аналізу фізичних процесів у масивних конструктивних елементах – струмо- і магнітопроводах. Такими елементами в пристроях з рухомими масивними струмо- і магнітопроводами є струмопровідні частини із значною глибиною паза (глибокопазні мотори) або із складною конфігурацією паза (фігурні пази) та феромагнітні ділянки магнітопроводів, у яких індукуються значні вихрові струми. Всі ці фактори суттєво впливають на значення функціональних залежностей досліджуваних пристроїв.

Під час аналізу електромеханічних систем методами електромагнітного поля необхідно диференціальні рівняння із звичайними і частинними похідними інтегрувати в єдиному часовому просторі. Для цього рівняння з частинними похідними потрібно дискретизувати за методами скінченних різниць або скінченних елементів. У наших задачах використано метод скінченних різниць [1], оскільки просторова зона інтегрування має правильну геометричну (прямокутну) форму.

Отже, важливим завданням є створення нових принципів побудови математичних спроможних задовольняти суперечливі вимоги щодо необхідності математично просто і й адекватно описати складні фізичні явища в електромеханічних пристроях. Нові моделі повинні бути простішими від існуючих, не повинні поступатися їм у точності і давати змогу описати не лише окремі елементи, але й складні системи.

Ці вимоги будуть виконані тоді, коли фізичні процеси будуть описуватись мінімальною зв'язною системою нелінійних диференціальних рівнянь, представлених, представлених у вигляді, розв'язаному відносно перших похідних шуканих функцій за часом, тобто представлених у нормальній формі Коші. Основи такого підходу викладені в працях [2, 4] і по сьогоднішній день не втратили своєї актуальності.

Математичні моделі електромеханічних пристроїв по своїй структурі розділені на чотири типи: *L*-, *Ш*-, *N*-, *A*- моделі, кожна з яких максимально придатна до того чи іншого методу аналізу. Наприклад, *L*-моделі призначені для використання в методі контурних струмів, *A*-моделі – в методі вузлових напруг. Якщо поміняти їх місцями аналіз суттєво ускладниться.

Поєднання методів теорії кіл та теорії електромагнітного поля, покладена в основу наших досліджень, на практиці показує суттєві переваги даного способу розв'язання ряду складних задач електромеханіки. У запропонованому підході рівняння обмоток статора асинхронної машини описуються методами теорії нелінійних електромагнітних кіл (рівняння із звичайними похідними), а рівняння ротора – методами теорії електромагнітного поля (рівняння з частинними похідними).

Результати комп'ютерних експериментів показують, що тут доцільно використовувати явні методи числового інтегрування диференціальних рівнянь, як такі що забезпечують простоту алгоритму і його високу швидкодію.

У роботі математичні моделі асинхронних моторів пропонуються у косокутних координатах [1, 4]. Побудова згаданих моделей здійснюється шляхом координатних перетворень у теорії асинхронних машин. Такі моделі дають змогу автоматично подати систему диференціальних рівнянь пристроїв у нормальній формі Коші. При цьому зменшується жорсткість цих рівнянь та значно спрощується використання математичних моделей електромеханічних пристроїв як повноцінних елементів електромеханічної системи [4].

Фундаментальну роль в теорії електромеханічних систем відіграє аналіз перехідних станів. Сучасний технологічний процес підприємств зазвичай пов'язаний з частими комутаціями в електричних колах таких систем, тому більшість експлуатаційних станів є перехідними. Крім цього, до перехідних відносяться будь-які аварійні стани (аварійне зникнення напруги, короткі замикання, обриви фаз, зміна навантаження, вимкнення окремих пристроїв тощо). Сюди слід також віднести комутаційні перенапруги, що виникають при вимкненні електромеханічних пристроїв з мережі. Тобто, математичні моделі повинні враховувати змінну структуру таких систем.

У традиційних підходах імітацію комутаційних станів, а саме розриви (вимкнення) пристроїв у системах зі змінною структурою виконують введенням великого опору (одиниці, десятки МОм). Це приводить до того, що диференціальні рівняння системи стають жорсткими потребують застосування складних неявних числових методів, внаслідок чого задача суттєво ускладнюється. У наших роботах використовуються узагальнені закони комутації для електричних кіл, які усувають жорсткість диференціальних рівнянь і їх інтегрування проводиться явними методами.

**Висновки.** Підсумовуючи, можемо констатувати, що найбільш перспективним напрямком математичного моделювання на сьогодні є поєднання методів теорій електромагнітних кіл та електромагнітного поля, що базуються на загальних засадах теорії нелінійних диференціальних рівнянь. Це усуває проблему обертання будь-яких матриць коефіцієнтів на кожному часовому кроці інтегрування. Це методи часової області. Тільки таким шляхом можна побудувати адекватні фізичному процесу математичні моделі, які оперують реальними фізичними величинами.

Явище скін-ефекту у масивних струмопроводах асинхронних машин, що описуються мішаною системою диференціальних рівнянь, потрібно враховувати з використанням методів електромагнітного поля. Заміна струмопроводу ланцюжковими схемами, що характерні для методів електричних кіл, спричиняє різке зростання порядку жорстких диференціальних рівнянь, втрату точності та неоптимальне використання часу комп'ютера.

Імітацію вимкнення пристроїв у колах електромеханічних систем зі змінною структурою слід проводити на підставі узагальнених законів комутації для електричних кіл, що дасть змогу усунути жорсткість диференціальних рівнянь і застосувати для їх розв'язання явні методи інтегрування.

Основною перевагою сформованих математичних моделей електромеханічної системи асинхронного приводу є те, що диференціальні рівняння стану записані в нормальній формі Коші. Це максимально спрощує найважливіший етап дослідження – обчислювальний процес в процесі комп'ютерної симуляції. Саме завдяки цьому одержано практичну можливість аналізу тривалих перехідних процесів, які мають місце на практиці.

Розроблений на основі запропонованих моделей та методів програмний комплекс успішно застосовується в навчальному процесі Луцького національного технічного університету на кафедрі «Електропостачання» в дисципліні «Математичні задачі електроенергетики» при підготовці інженерів-електриків, а також може бути використаний для дослідження різноманітних станів роботи електромеханічних систем як на стадіях проектування так і експлуатації.

1. Чабан В. Математичне моделювання електромеханічних процесів / В. Чабан. – Л.: В-во Держуні-верситету «Львівська політехніка», 1997. – С. 342.
2. Чабан В. Електромагнетне поле. / В. Чабан. – Львів : В-во Т. Сороки, 2006. – С. 394.
3. Хвищун І.О. Програмування і математичне моделювання: Підручник. / І.О. Хвищун. - К. : Видав-ничий Дім "Ін Юре", 2007. – С. 544.
4. Лишук В.В. Математична модель вузла живлення асинхронних моторів з перемінною структурою. / Лишук В.В. // Технічні вісті. – 2008. – № 1 (27), 2 (28). – С. 67 – 70.