УДК 514.18

С.І. Пустюльга, В.П. Самчук, І.В. Прушко

ФОРМУВАННЯ ФРАКТАЛЬНИХ КРИВИХ, ЩО Є МОДЕЛЯМИ ПРОФІЛОГРАМ, СТАТИКО - ГЕОМЕТРИЧНИМ МЕТОДОМ

У роботі досліджується спосіб побудови фрактальних кривих на основі статико-геометричного методу. Запропоновано алгоритм формування дискретної структури із заданими фрактальними властивостями. Досліджено параметри навантаження, вираженого через фрактальну розмірність, яке дозволяє формувати фрактальну ДПК.

Ключові слова: фрактал, фрактальна розмірність, показник Херста, дискретне моделювання, шорсткість поверхні.

Рис. 3. Форм. 5. Літ. 6.

С.И. Пустюльга, В.П. Самчук, И.В. Прушко

ФОРМИРОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ КРИВЫХ, КОТОРЫЕ ЯВЛЯЮТСЯ МОДЕЛЯМИ ПРОФИЛОГРАММ, СТАТИКО - ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

В работе исследуется способ построения фрактальных кривых на основе статико-геометрического метода. Предложен алгоритм формирования дискретной структуры с заданными фрактальными свойствами. Исследованы параметры нагрузки, выраженной через фрактальную размерность, которая позволяет формировать фрактальную ДПК.

Ключевые слова: *фрактал, фрактальная размерность, показатель Херста, дискретное моделирование, шероховатость поверхности.*

S. Pustyulga, V. Samchuk, I. Prushko

FORMATION OF FRAKTAL CURVES ARE MODELS PROFILOHRAM, STATIC - DEOMETRIC METHOD

In the paper the method of constructing fractal curves based on static-geometric method. The algorithm for the formation of discrete structures with desired fractal properties. Investigated parameters load, expressed through the fractal dimension, which allows you to create fractal duodenum.

Keywords: *fractal, fractal dimension, Hurst parameter, discrete modeling, surface roughness.*

Постановка проблеми. Фрактали знаходять усе більше застосування при вирішенні сучасних науково-прикладних задач, зокрема у галузі машинобудування. Основна причина цього полягає у тому, що вони описують об'єкти реального світу іноді краще, ніж традиційні методи математики та геометрії [1].

Оскільки фрактали – це дискретні структури, то можна розробити способи їх моделювання за допомогою сучасних методів прикладної дискретної геометрії, зокрема, використовуючи математичний апарат статико-геометричного методу формоутворення[2]. Останній дозволяє будувати дискретні моделі об'єктів за наперед заданими множинами параметрів, враховуючи, при цьому, цілий ряд статичних та геометричних вимог.

Поряд із цим, у машинобудуванні для оцінки шорсткості поверхонь застосовують профілограми як геометричні відображення чистоти їх обробки. Моделями таких структур є фрактальні криві. Шорсткість як властивість реальної негладкої поверхні проявляється через сукупність окремих нерівностей, що утворюють мікроструктуру поверхні. Шорсткість є важливою характеристикою, з якою пов'язані такі властивості поверхні, як мікротвердість, тертя, аеро- і гідродинамічний опір і т.і.

Одним із часто використовуваних параметрів для опису мікроструктури поверхні є середньоквадратичне відхилення висоти нерівностей. А в якості кількісної міри структурності об'єктів використовується фрактальна розмірність.

Як відомо, в основі фрактальної теорії лежить розмірність Хаусдорфа [4]. Фрактальна розмірність завжди строго більша за топологічну, її слід розуміти як показник кількості або показник міри тієї чи іншої дискретної множини. Розмірність характеризує у якій степені зростає міра фрактала, що отримується при лінійній зміні масштабу [3].

На даний час запропоновано цілий ряд методів фрактального аналізу геометричних об'єктів, що є моделями, у тому числі, шорсткості оброблених поверхонь. Однак всі вони ефективні при розв'язанні тільки певного класу практичних задач і дозволяють наближено підраховувати фрактальну розмірність вже змодельованих геометричних об'єктів. Задача побудови фрактальної структури із вже заданою фрактальною розмірністю залишається нерозв'язаною.

Тому дослідження методів та розробка алгоритмів побудови геометричних об'єктів, які мають наперед задану фрактальну розмірність є актуальними задачами, вирішення яких дозволить формалізувати опис фрактальних множин методами прикладної дискретної геометрії.

Аналіз останніх досліджень. У відомих наукових роботах, присвячених методам побудови фрактальних структур, як правило, використовується два основних метода [1,3,5,6].

Перший із них полягає у використанні так званих L-систем**,** а *другий* – у використанні систем інтегрованих функцій. В основі обох методів лежать математичні алгоритми, які дозволяють відображати одну багатовимірну множину на іншу. Найбільш прості СІФ базуються на афінному перетворенні площини або простору.

Для побудови СІФ використовують й інші класи простих геометричних перетворень, які задаються невеликою кількістю параметрів, наприклад, проективні або квадратичні перетворення простору.

Кожна реалізація алгоритму побудови фрактальної структури на основі СІФ орієнтується на розв'язання певного виду практичних задач, і не завжди має зрозумілу для користувача структуру та наочну інтерпретацію. Крім того, як правило, фрактальний об'єкт спочатку моделюється, а потім, для кількісного опису, за допомогою різноманітних методів визначається його розмірність. Такий підхід має очевидний недолік, який полягає у тому, що розмірність фрактальної структури можна визначати різними методами [4], кожен з яких має певні обмеження на область застосування. Це, в свою чергу, зумовлює необхідність додаткового аналізу з метою вибору методу найбільш адаптованого до характерних особливостей фрактала.

Оскільки методи побудови фракталів як з використанням L-структур так і систем ітерованих функцій оперують дискретною інформацією про об'єкт, то доцільно спробувати пов'язати їх з методами дискретного геометричного моделювання для відтворення фрактальних структур.
В літературі, присвяченій прикладним геометричним дослідженням, є достатньо добре розроблені методи дискретного геометричного моделювання, серед яких особливу увагу заслуговує статико-геометричний метод [2], оскільки останній дозволяє формувати дискретні моделі як неперервних образів із заданими геометричними властивостями, так і дискретних образів з невизначеними дискретними аналогами диференціальних характеристик.

Однак, зовсім відсутні роботи з дослідження можливостей використання статико-геометричного методу для моделювання фрактальних геометричних образів із заданими властивостями.

Формування цілей роботи є дослідження математичного апарату статико-геометричного методу щодо можливостей моделювання геометричних структур із заданими фрактальними характеристиками.

Основна частина. В основу статико-геометричного методу покладена статична інтерпретація методу скінчених різниць. Основна суть його полягає у тому, що будь-яку дискретну систему, яка складається з вузлів та зв'язків між ними, можна представити як зрівноважену систему сил, у якої зовнішнє навантаження, прикладене до вузлів системи, урівноважується внутрішніми зусиллями у в'язях.

Якщо зовнішнє формоутворююче навантаження розподіляється за певною функціональною залежністю, то під дією такої множини сил утворюється дискретні моделі неперервних образів з визначеними геометричними властивостями. У кожній точці такої дискретної моделі однозначно визначені дискретні аналоги їх диференціальних характеристик. На відміну від такого підходу, при моделюванні фрактальних структур, які можна інтерпретувати як дискретні множини, функція зовнішнього навантаження у вузлах моделі не має визначеного закону зміни, і потребує зміни знаків прикладеного навантаження.

Якщо мова іде про моделювання фрактальних кривих на площині, то закон розподілу формоутворюючого навантаження повинен визначатися наступним чином: чим більша різниця модулів сусідніх векторів на заданому інтервалі, тим більш розрізана структура сформується, фрактальна розмірність якої, як відомо з [4], наближається до 2. Прикладаючи зусилля до вузлів дискретної структури за певним принципом, можна формувати об'єкти за заданими фрактальними властивостями, при яких зберігатиметься персистентна або антиперсистентна поведінка фрактальних множин.

Тому основною задачею при формуванні таких фрактальних кривих статико-геометричним методом є визначення такого розподілу навантажень, який забезпечить побудову фрактальної множини з прогнозованою геометрією.

Фрактальна розмірність тісно пов'язана із поняттям подібності, тобто можна констатувати, що кожен фрактальний об'єкт складається із частин, подібних самому об'єкту.

Хоча розмірність подібності одна із найголовніших характеристик фрактального об'єкту, однак на практиці не всі складні фрактальні структури достатньо просто можна розділити на самоподібні об'єкти. У більшості випадків геометричні моделі складаються із частин у яких усереднений розподіл геометричних характеристик є таким же як і в цілому фрактальному об'єкті. Такі фрактали прийнято називати статистично самоподібними. Тому поряд із поняттям самоподібних фрактальних об'єктів існує поняття самоафінних фракталів, тобто таких, які при побудові окремих частин, що подібні цілому об'єкту, використовують різні масштабні коефіцієнти по різних осях координат.

Враховуючи це, можна сказати, що при формуванні статико-геометричним методом геометричного образу з формальним знакозмінним формоутворюючим навантаженням можна завжди виявляти їх самоафінність на певному інтервалі скейлінгу.

Однак при цьому проблема визначення фрактальної розмірності самоафінного об'єкту залишається, оскільки визначити її достатньо не просто, хоча вона є, як зазначалось вище, визначальною геометричною характеристикою модельованого об'єкту. Тому завдання полягає у підборі такого розподілу навантаження у вузлах дискретної моделі, яке б вже на початковому етапі моделювання, обумовлювало розмірність формованого образу.

Фрактальна розмірність D [6] тісно пов'язана з показником Херста:

$$D = 2 - H,$$

де H – показник Херста.

Поведінка фрактальної кривої при цьому прогнозована. Чим більший параметр D, (менший H), тим крива має складніший, розрізаний, високо "осцилюючий" характер, і навпаки, чим менше D – крива більш гладка.

Статична інтерпретація скінченних різниць статико-геометричного методу при моделюванні дискретно представлених кривих з рівномірним кроком вузлів на площині має вид:

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} + P_i = 0. \qquad (1)$$

При цьому значення ординат сусідніх трьох вузлів $i-1$, i, $i+1$ прямо пов'язані з розподілом формоутворюючого навантаження P_i. Використовуючи результати наведені у роботі [4], де алгоритм моделювання броунівського руху частинки базувався на обчисленні значень центральних вузлів відносно сусідніх за формулою:

$$\frac{1}{2^{(j+1)/2}}\sigma g, \qquad (2)$$

де j – номер процедури згущення;

σ – додатна константа (параметр вертикального масштабу);

g – випадкова величина з нормальним розподілом.

яка дає можливість сформувати самоафінну структуру, пропонується силу P_i виразити через показник Херста наступним чином:

$$P_i = 2^{(1-jH)}\sigma\rho g, \qquad (3)$$

де: $\rho = \left(1 - 2^{2H-2}\right)^{0,5}$.

Якщо показник Херста буде приймати значення 0.5, тобто фрактальна розмірність рівна 1.5, то вираз (3) перетворюється у вираз (2), що відповідає моделі класичного броунівського руху частинки на площині.

Оскільки у роботі поставлено завдання побудови не стохастичних, а самоафінних фрактальних структур, то параметри σ та g перетворюються в константи.

Отже, процес формування самоафінної структури на основі статико-геометричного методу полягає у визначенні складових навантаження P_i^w у n внутрішніх вузлах на інтервалі [0; 1] із заданими крайовими умовами.

Для того, щоб формований фрактальний об'єкт мав властивість самоафінності необхідним є, так звана, "пам'ять" зміни сил дискретної структури на певних етапах згущення вузлів. Тільки така умова зможе забезпечити подібність окремих ділянок скейлингу фрактальному об'єкту в цілому. І найголовніше – розподіл сил для формування об'єкту апріорі повинен враховувати фрактальну розмірність майбутньої структури.

Ще одним важливим моментом є знакозмінність формоутворюючих сил, тобто напряму вектора формуючого навантаження у вузлах формованої структури. Тут можливі ряд схем знакозмінності, тобто чергування векторів сил різного напряму. Прикладом може слугувати черговість напрямів векторів через один, два, або *i* вузлів.

Для прикладу виберемо схему черговості напрямів векторів навантаження (рис. 1).

В залежності від необхідної кількості точок майбутнього фрактального об'єкту, вибирається сітка вузлів. Кількість ділянок сітки на проміжку [0; 1] буде рівним 2^w . Кількість внутрішніх вузлів - $2^w - 1$; x_i, y_i - координати *i* вузла. P_i^w - формоутворююче навантаження у *i* вузлі. Відтак - $i \le 2^w - 1$.

Для визначення номерів вузлів фрактальної структури приймемо вираз:

$$i = 2^{w-(w-k)} + n \cdot 2^{w-(w-(k+1))}, \tag{4}$$

де: $k = 0...(w-1)$, а $n = 0...(2^{w-1} - 1)$

Тоді формоутворююче навантаження у вузлах для моделювання фрактальної кривої із заданою розмірністю, враховуючи (3), прийме вид:

$$P_i^w = \frac{2^{[1-(w-k)\cdot H]}}{2^{[w-(w-k)]}} \cdot \sigma\rho, \tag{5}$$

де: *H* – показник Херста.

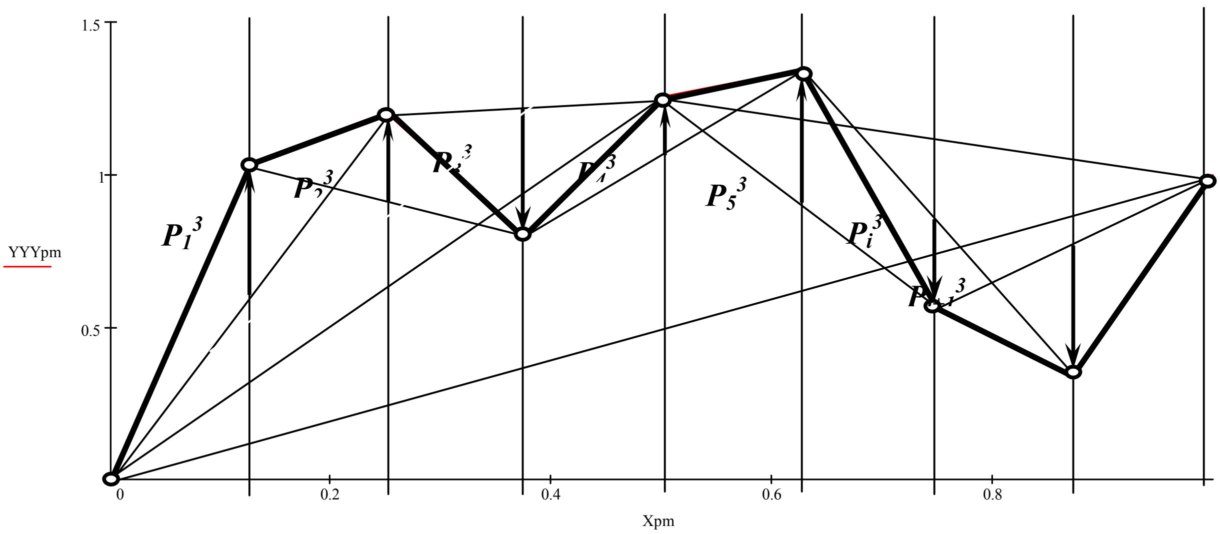

Рис. 1.

Враховуючи вибрану схему *(рис. 1)* розподілу знакозмінних векторів навантаження у вузлах, будемо вважати додатним вектор навантаження у вузлі при *n* рівним парним числам, а від'ємним – при непарних *n*. Визначивши значення навантаження і напрям сили у кожному вузлі дискретної моделі складаємо систему скінченно-різницевих лінійних рівнянь виду (1). Кількість рівнянь системи – рівна кількості внутрішніх вузлів фрактальної структури.

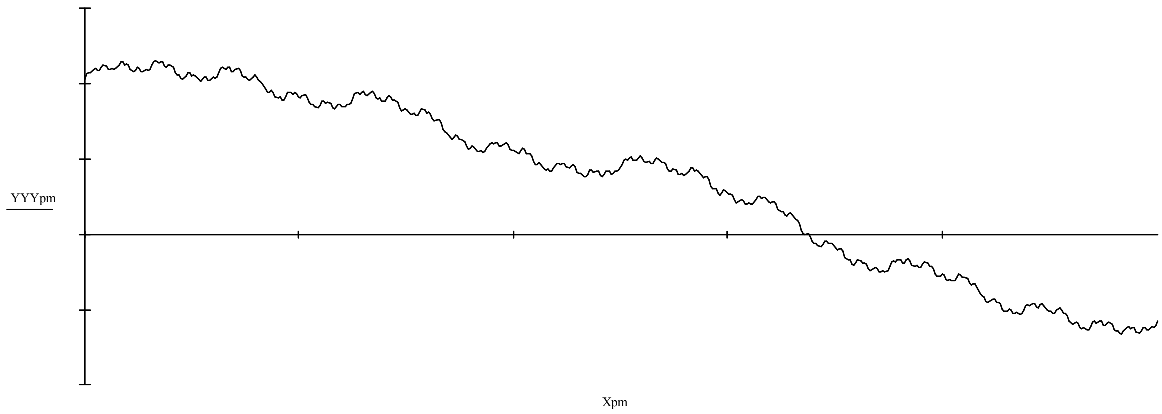
YYYpm
Xpm

Рис. 2.

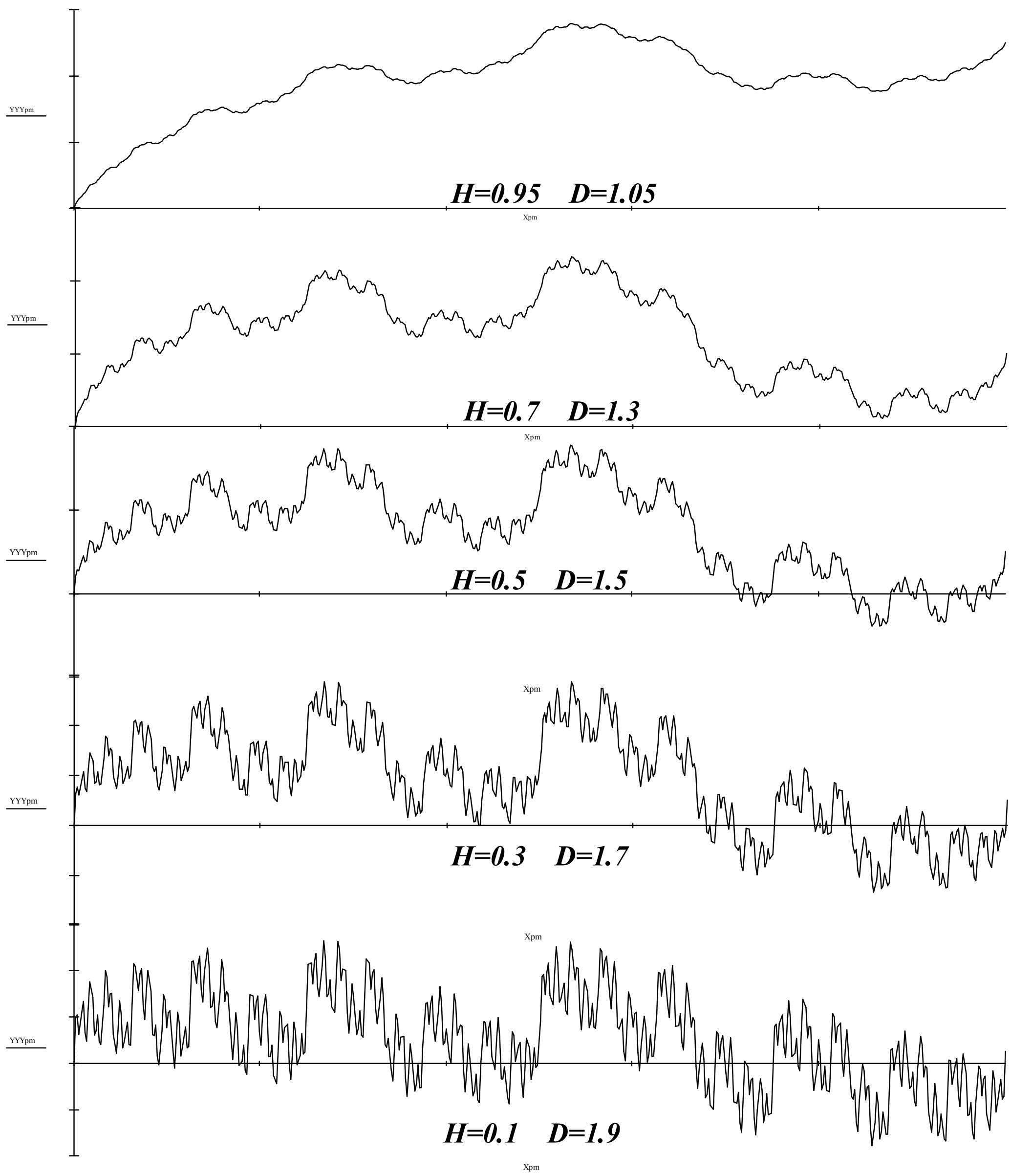
YYYpm
H=0.95 D=1.05
Xpm
YYYpm
H=0.7 D=1.3
Xpm
YYYpm
H=0.5 D=1.5
Xpm
YYYpm
H=0.3 D=1.7
Xpm
YYYpm
H=0.1 D=1.9
Xpm

Рис. 3.

Приклад. Побудувати самоафінну фрактальну структуру з рівномірним кроком на інтервалі [0; 1] із $2^9 - 1$ внутрішніми вузлами, заданими крайовими умовами $y_0 = 4.1$, $y_{2^9-1} = -2.3$ та заданою фрактальною розмірністю D=1.46.

Якщо до модельованої дискретної структури відсутні додаткові геометричні вимоги (проходження через задані вузли, забезпечення певних кутів нахилу ланок, тощо), то для будь-якої схеми побудови самоафінної фрактальної кривої навантаження у вузлах обчислюється за формулою (5) при g=1, та H=2-D.

Для визначення координат внутрішніх вузлів записується система лінійних рівнянь виду (1), із якої визначаються координати вузлів самоафінної фрактальної структури за заданою фрактальною розмірністю.

Результати роботи алгоритму наведені на рис. 2.

Алгоритм дозволяє ефективно моделювати, за допомогою фрактальної інтерполяції, профілограми шорсткості обробки поверхонь деталей, причому із заданою основною геометричною характеристикою структури – фрактальною розмірністю. Приклади їх побудови при різних значеннях показника Херста, а значить і різних значення фрактальної розмірності наведені на рис. 3.

Висновки. У роботі, на основі статико-геометричного методу, запропоновано спосіб побудови самоафінних фрактальних геометричних структур із заданою фрактальною розмірністю. Визначені обмеження на множину початкових параметрів для формування фрактальних кривих з заданою розмірністю. В перспективі є розробка алгоритмів для формування самоафінних дискретно представлених фрактальних поверхонь із заданою фрактальною розмірністю.

1. *Мандельброт Б.Б.* Фрактальная геометрия природы /Б.Б. Мандельброт.–М.: Институт компьютерных исследований,2002.–656 с.
2. *Ковалёв С.Н.* Формирование дискретных моделей поверхностей пространственных архитектурных конструкций / С.Н. Ковалёв // Дис. докт. техн. наук. 05.01.01 / М.: МАИ, 1986. – 348 с.
3. *Перерва Л.М., Юдин В.В.* Фрактальное моделирование: учебное пособие / под общ. ред. В.Н. Гряника. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2007. – 186 с.
4. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. / Р.М. Кроновер. Москва: Постмаркет, 2000. – 352 с.
5. *Федер Е.* Фракталы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 254 с. ил.
6. *Шишкин Е.И.* Моделирование и анализ пространственных и временных фрактальных объектов. / Е.И.Шишкин. – Екатеринбург, 2004. – 88 с.

Стаття надійшла до редакції 27.04.2013.