УДК 514.18

С.І. Пустюльга, В.П. Самчук, Ю.В. Клак, І.В. Прушко

ДИСКРЕТНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФРАКТАЛЬНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ У МАШИНОБУДУВАННІ

У роботі проаналізовані відомі методи формування фрактальних структур стосовно проблем моделювання мікрогеометрії поверхонь оброблюваних деталей. Визначені переваги та недоліки кожного методу при розв'язанні конкретних практичних задач. Сформовані напрями удосконалення дискретних методів моделювання геометричних образів з фрактальною структурою.

Ключові слова: *фрактал, дискретне моделювання, мікрогеометрія поверхні.*
Рис. 2. Форм. 4. Літ. 5.

С.И. Пустюльга, В.П. Самчук, Ю.В. Клак, И.В. Прушко

ДИСКРЕТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФРАКТАЛЬНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКЫХ ОБЬЕКТОВ В МАШИНОСТРОЕНИИ

В работе проанализированы известные методы формирования фрактальных структур относительно проблем моделирования микрогеометрии поверхностей обрабатываемых деталей. Определены преимущества и недостатки каждого метода при решении конкретных практических задач. Сформированы направления совершенствования дискретных методов моделирования геометрических образов с фрактальной структурой.

Ключевые слова: *фрактал, дискретное моделирование, микрогеометрия поверхности.*

S. Pustyulga, V. Samchuk, U. Klak, I. Prushko

DISCRETE MODELING OF FRACTAL GEOMETRY OBJECTS IN ENGINEERING

This paper analyzes the known methods of fractal structures on the problems of modeling micro-geometry of surfaces in workpieces. Identify the advantages and disadvantages of each method in the solution of specific practical problems. Formed discrete areas of improvement of methods of modeling of geometric forms with fractal structure.

Keywords: *fractal, discrete modeling, surface microgeometry.*

Постановка проблеми. Традиційно до останнього часу геометричні моделі різних технічних об'єктів, явищ та процесів будувалися на основі комбінацій простих геометричних фігур: прямих, багатокутників, відомих кривих ліній, багатогранників, елементарних криволінійних поверхонь. Проте очевидно, що цей класичний набір складно пристосувати для моделювання та аналізу таких геометрично складних об'єктів як контури берегових ліній материків, форми хмар або сніжинок, розрядів блискавки в повітрі, а особливо складних технічних поверхонь, зокрема мікрогеометрії оброблюваних деталей.

В останні 20-25 років для моделювання цих і подібних до них утворень учені все частіше використовують таке геометричне поняття як фрактали. Фрактал походить від латинського прикметника "fractus" і в перекладі означає той, що складається з фрагментів. Мандельброт [1] запропонував попередньо формулювати визначення фрактала у наступній формі: фракталом називається множина, розмірність Хаусдорфа якого строго більша його топологічної розмірності (топологічна розмірність завжди дорівнює цілому числу). Пізніше Мандельброт звузив його, запропонувавши замінити наступним: фракталом називається структура, що складається з частин, які в якомусь сенсі подібні до цілого.

Основна властивість фракталів – самоподібність, що припускає незмінність основних геометричних особливостей при зміні масштабу. Властивість самоподібності характерна лише для регулярних фракталів. Якщо замість детермінованого способу побудови включити в алгоритм створення деякий елемент випадковості, то виникнуть, так звані, стохастичні фрактали.

Проте, загальною характеристикою всіх фрактальних утворень є їх дискретна природа, тобто усі вони є дискретними множинами з дробовою (відмінною від топологічної) розмірністю.

Тому актуальними є дослідження геометричних характеристик таких дискретних множин та аналіз можливостей їх ефективного застосування при моделюванні достатньо широкого спектру складних геометричних задач, у тому числі у галузі машинобудування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У публікаціях, присвячених методам побудови фрактальних об'єктів, прийнято розділяти їх на три основні класи: геометричні, алгебраїчні та стохастичні [2].

Геометричні (регулярні) фрактали самі наочні. Побудова ведеться рекурсивно. У двовимірному випадку їх отримують за допомогою певної ламаної чи поверхні, яка називається генератором. За один крок алгоритму кожен з відрізків, що складає ламану, замінюється на ламану-генератор у відповідному масштабі. В результаті нескінченного повторення цієї процедури, отримується геометричний фрактал. Прикладами геометричних фракталів є сніжинка Коха, килим Серпінського, тощо.

Алгебраїчні фрактали будуються на основі ітерації нелінійних відображень, що задаються простими алгебраїчними формулами:

$$z_{n+1} = F(z_n), \;\; z_{n+2} = F(F(z_n)). \qquad (1)$$

Прикладом алгебраїчного фракталу є множина Мандельброта.

Стохастичні фрактали формуються у випадку, коли в ітераційному процесі випадковим чином змінюються певні параметри. При цьому утворюються об'єкти дуже схожі на природні – несиметричні дерева, берегові лінії, тощо. Найпростішим випадковим фракталом є траєкторія частинки, яка здійснює броунівський рух.

Найбільш близькою до проблем моделювання мікрогеометрії поверхонь оброблюваних деталей є робота [3], у якій було запропоновано методику та алгоритми побудови фрактальних об'єктів на основі методів дискретного векторного формоутворення. Проте в ній не проводився аналіз відомих методів моделювання фрактальних структур стосовно можливості їх застосування в галузі машинобудування.

Формування цілей роботи. Проаналізувати відомі методи моделювання фрактальних структур стосовно можливості їх застосування в галузі машинобудування. Визначити переваги та недоліки кожного при розв'язанні конкретних практичних задач, в моделях яких використовуються фрактальні геометричні об'єкти. Визначити напрями удосконалення дискретних методів моделювання геометричних образів з фрактальною структурою.

Основна частина. Існує два основних способи побудови фракталів [4], які можна порівняно ефективно застосовувати при моделюванні мікрогеометрії поверхонь оброблюваних деталей. Перший спосіб – використання L-систем, другий спосіб – використання систем ітерованих функцій (детермінованих та рандомізованих).

L-системи являють собою формалізовану мову, що застосовується для побудови різноманітних геометричних фракталів. Фактично, для використання цієї мови необхідно побудувати інтерпретатор, який буде розуміти команди мови L-системи і виконувати їх із застосуванням машинної графіки для візуального представлення результату.

Для побудови фракталів за допомогою L-системи, необхідно спочатку здійснити ініціалізацію, задати аксіому або ініціатор – набір правил, що вказують як слід виконувати перетворення при переході від рівня до рівня (від ітерації до ітерації). Таким чином, найбільш важливою частиною будь-якої L-системи є правила, які задають перетворення. Саме вони забезпечують багаторазове ускладнення фігури в процесі роботи L-системи і, разом з тим, забезпечують самоподібність цієї фігури.

Системи ітерованих функцій (СІФ) представляють собою системи функцій з певного фіксованого класу, які відображають одну багатовимірну множину на іншу. Найбільш проста СІФ полягає в афінному перетворенні площини. Якщо обмежитись лише двовимірним випадком, тоді будь-яке афінне перетворення *T*, яке переводить точку з координатами (x, y) в точку (x', y'), можна представити у вигляді [2]:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Тут матриця з коефіцієнтами a, b, c, d відповідає за масштабування і повороти, а матриця-стовпець з коефіцієнтами e та f – за паралельний перенос. Проілюструємо роботу СІФ на прикладі побудови серветки Серпінського (рис. 1). Зауважимо, що перехід від вихідної фігури (рівносторонній зафарбований трикутник) до результату першої ітерації (множини з трьох менших трикутників) можна здійснити за допомогою використання трьох наступних афінних перетворень (по одному на кожен новий трикутник):

$$T_1\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$T_2\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/2\\0\end{bmatrix}$$

$$T_3\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1/2 & 0\\0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1/4\\\sqrt{3}/4\end{bmatrix} \qquad (3)$$

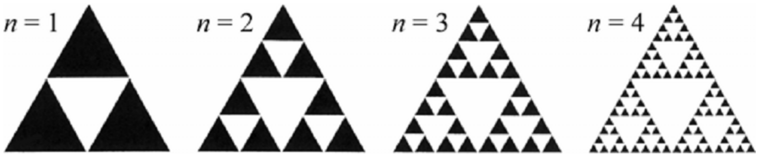

Рис. 1. **Побудова серветки Серпінського за допомогою систем ітерованих функцій**

Для побудови СІФ застосовують й інші класи простих геометричних перетворень, які задаються невеликою кількістю параметрів, наприклад, проективні або квадратичні перетворення площини.

Підхід на основі СІФ представляє хорошу теоретичну базу для математичного дослідження процесів формування різноманітних фрактальних структур, у тому числі, як моделі геометрії поверхонь оброблюваних деталей (рис. 2), а також їх узагальнення.

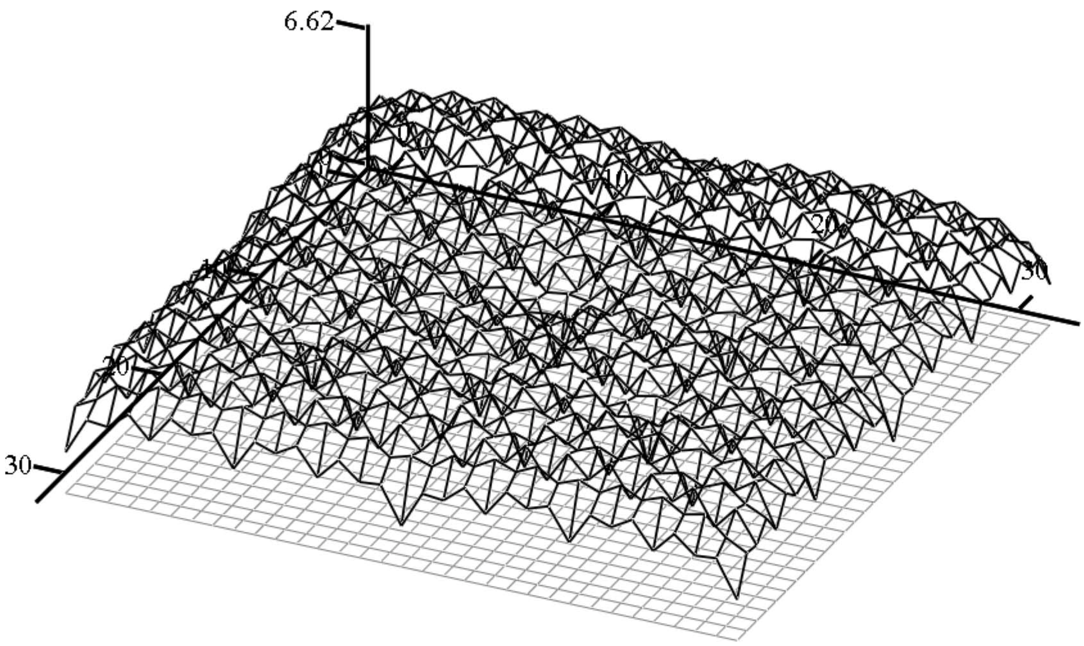

Рис. 2. **Модель поверхні обробленої деталі**

Кожна реалізація алгоритму побудови фрактального об’єкту на основі СІФ орієнтується на розв’язання певного класу практичних задач, і не завжди має зрозумілу для користувача структуру та наочну інтерпретацію. Крім того, як правило, фрактальний об’єкт спочатку моделюється, а потім, для кількісного опису, за допомогою різноманітних методів визначається його розмірність. Такий підхід має очевидний недолік, який полягає у тому, що розмірність фрактальної структури можна визначати саме різними методами [4], кожен з яких має певні обмеження на область застосування. Це, в свою чергу, зумовлює необхідність додаткового аналізу з метою вибору методу найбільш адаптованого до характерних особливостей фрактала.

Оскільки методи побудови фракталів, що є моделями такої складної геометрії оброблювальних поверхонь (рис. 2), як з використанням L-структур так і систем ітерованих функцій оперують дискретною інформацією про створюваний об'єкт, то доцільно узагальнити можливості їх використання при формоутворенні таких структур із наперед заданою фрактальною розмірністю.

Фрактальну розмірність, як основну характеристику фрактальних структур можна тісно пов'язати із поняттям подібності. Відповідно до [5] можна визначити, що якщо кожен фрактальний об'єкт, який складається із a^D частин, подібних самому об'єкту з коефіцієнтом подібності $1/a$, то показник *D* повністю характеризує фрактальну розмірність, або розмірність подібності. Така розмірність не є цілим числом. Якщо фрактальна структура складається із b подібних їй фігур з розміром $1/a$, то фрактальна розмірність визначається із виразу:

$$D = \frac{log\, b}{log\, a}. \quad (4)$$

Розмірність подібності достатньо важлива характеристика будь-якого фрактального об'єкту, у тому числі, частини обробленої поверхні (рис. 2). Але на практиці такі складні геометричні образи не завжди можна розділити на самоподібні об'єкти. Часто геометричні форми складаються із частин, у яких усереднений розподіл геометричних характеристик є таким же як і в цілому фрактальному об'єкті. Такі структури прийнято називати статистично самоподібними. В загальному випадку, поряд із поняттям самоподібних фрактальних об'єктів вводять поняття самоафінних фракталів, тобто таких, які при побудові окремих частин, що подібні цілому об'єкту використовують різні масштабні коефіцієнти по окремих осях. Класичним прикладом таких фрактальних структур і є мікрогеометрія поверхонь оброблюваних деталей.

Ще однією проблемою моделювання фрактальних структур є визначення їх фрактальної розмірності, яку, як правило, визначати досить не просто, але яка, як зазначено вище, є визначальною геометричною характеристикою фрактального об'єкту.

Відомо [4], що фрактальна розмірність *D* при моделюванні фрактальних кривих та фрактальних поверхонь тісно пов'язана з показником Херста, відповідно:

для фрактальних кривих – $D = 2 - H$,

для фрактальних поверхонь – $D = 3 - H$,

де *H* – показник Херста.

Оскільки розмірність таких модельованої фрактальних структур знаходиться в діапазоні:

для фрактальних кривих – $1 < D < 2$,

для фрактальних поверхонь – $2 < D < 3$,

то в задачах побудови вищеназваних самоафінних фрактальних об'єктів показник Херста повинен задовольняти умові:

$$0 < H < 1.$$

Поведінка таких фрактальних утворень цілком прогнозована. Чим більший параметр *D*, (менший *H*), тим об'єкт (мікрогеометрія обробленої поверхні) має складніший, значно "осцилюючий" характер, і навпаки, чим менше *D*, тим фрактальний образ має більш гладку структуру.

Висновки. У роботі проаналізовані відомі методи моделювання фрактальних структур стосовно можливості їх застосування в галузі машинобудування. Визначені переваги та недоліки кожного при розв'язанні конкретних практичних задач, моделями яких є фрактальні геометричні об'єкти. Визначені напрями удосконалення дискретних методів моделювання геометричних образів з фрактальною структурою стосовно галузі машинобудування.

1. *Мандельброт Б.Б.* Фрактальная геометрия природы /Б.Б.Мандельброт.–М.: Институт компьютерных исследований, 2002.– 656 с.
2. *Перерва Л.М., Юдин В.В.* Фрактальное моделирование: учебное пособие / под общ. ред. В.Н. Гряника. – Владивосток: Изд-во ВГУЭС, 2007. – 186 с.
3. *Пустюльга С.І.* Дискретне векторне формування фрактальних структур. // С.І. Пустюльга, В.М. Придюк, І.В. Прушко / Зб. наук. пр. Наукові нотатки − Луцьк, 2012. – Вип. 37. – С. 275-279.
4. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. / Р.М. Кроновер. Москва: Постмаркет, 2000. – 352 с.
5. *Шишкин Е.И.* Моделирование и анализ пространственных и временных фрактальных объектов. / Е.И. Шишкин. – Екатеринбург, 2004. – 88 с.

Стаття надійшла до редакції 27.04.2013