

УДК 539.3

М.В. Делявський¹, Н.В. Здолбіцька², А.П. Здолбіцький²¹Технологічно-природничий університет, м. Бидгош, Польща²Луцький національний технічний університет, м. ЛуцькМАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ
ТОНКИХ ОРТОТРОПНИХ ПЛИТ

Запропоновано спосіб моделювання роботи плитової конструкції довільної конфігурації за різних умов завантаження та закріплення. Моделювання полягає у записі крайових умов в різних точках контуру плити. Для цього побудовані координатні та силові функції переміщень, моментів і поперечних сил, а кожна з цих величин представлена як сума силової функції і координатної функції, помноженої на невідомі параметри розв'язку. Такий підхід дозволяє просто записувати крайові умови на криволінійному контурі плити і задовольняти їх за допомогою невідомих параметрів.

Ключові слова: ортотропна плита, математичне моделювання, напружено-деформований стан, крайові умови, вузлові точки.

Рис. 1. Форм. 24. Літ. 10.

М.В. Делявский, Н.В. Здолбицкая, А.П. Здолбицкий

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-
ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛИТ

Предложен способ моделирования работы плиточных конструкций произвольной конфигурации при различных условиях нагружения и заземления. Моделирование состоит в записи граничных условий в разных точках контура плиты. Построены координатные и силовые функции перемещений, моментов и поперечных сил. Каждая из этих величин представлена суммой силовой функции и ее координатной функции, умноженной на неизвестные параметры решения. Такой подход позволяет достаточно просто записывать граничные условия на криволинейном контуре плиты и удовлетворять их с помощью неизвестных параметров.

Ключевые слова: ортотропная плита, математическое моделирование, напряженно-деформированное состояние, граничные условия, узловые точки.

M.V. Delyavskyy, N.V. Zdolbitska, A.P. Zdolbitsky

MATHEMATICAL SIMULATION OF STATE OF STRESS AND STRAIN IN THIN
ORTHOTROPIC PLATES

The simulation of work of thin arbitrary configuration orthotropic plates under external loading and various boundary conditions has been suggested. The modeling consists in recording of boundary conditions in various points of plate contour. The coordinate and force functions of displacements, moments and transverse forces were constructed each of these magnitudes is represented as sum of force function and coordinate one multiplied by unknown parameters of solution. The suggested approach allows simply to record the boundary conditions at the curvelinear contour of the plate and to satisfy them with unknown parameters.

Keywords: orthotropic plate, mathematical modeling, stress-strained state, boundary conditions, the node points.

Постановка проблеми. Розглянемо тонку ортотропну плиту довільної конфігурації і віднесемо її до декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$ з початком у геометричному центрі плити. Вісь Ox_3 направляємо вниз, а осі Ox_1 і Ox_2 , розміщаємо в серединній площині плити так, щоб утворена система координат була правою (рис. 1). На верхній основі плита завантажена довільно розподіленим навантаженням інтенсивності $q(x_1, x_2)$, а її нижня основа є вільна від навантажень.

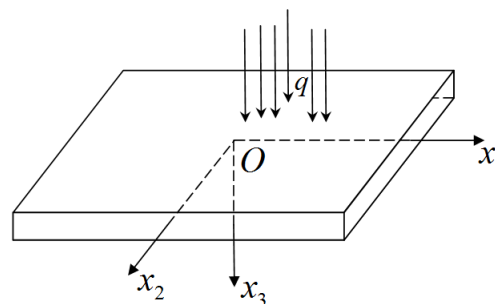


Рис. 1. Схема плити

Пружна рівновага такої плити описується диференціальним рівнянням в частинних похідних зі сталими коефіцієнтами:

$$L(x_1, x_2)w(x_1, x_2) = q(x_1, x_2), \quad (1)$$

де $L(x_1, x_2)$ є диференціальним оператором четвертого порядку

$$L(x_1, x_2) = D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2D_{33} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4}. \quad (2)$$

Тут D_{11} і D_{22} – жорсткості на згин матеріалу в головних осях ортотропії; $D_{33} = D_{12} + 2D_{66}$, де D_{66} є жорсткість на кручення ортотропного матеріалу, а D_{12} – змішана жорсткість.

Розв'язок диференціального рівняння (1) вибираємо у вигляді суми двох розв'язків:

$$w = w_0 + w_* \quad (3)$$

загального розв'язку w_0 однорідного рівняння

$$L(x_1, x_2)w(x_1, x_2) = 0 \quad (4)$$

і якогось часткового розв'язку w_* рівняння (1).

Частковий розв'язок w_* вибираємо у вигляді суми подвійних тригонометричних рядів

$$w_*(x_1, x_2) = C_{pqmn} T_{pm}^{[j]}(x_j) \cdot T_{qn}^{[3-j]}(x_{3-j}). \quad (5)$$

Тут C_{pqmn} – невідомі коефіцієнти, які визначаються з розв'язку диференціального рівняння (1). Для цього зовнішнє навантаження подаємо у вигляді подібному до (5):

$$q(x_1, x_2) = Q_{pqmn} T_{pm}^{[j]}(x_j) \cdot T_{qn}^{[3-j]}(x_{3-j}), \quad (6)$$

де Q_{pqmn} – коефіцієнти розкладу функції $q(x_1, x_2)$ в подвійні тригонометричні ряди.

На коефіцієнти C_{pqmn} та відповідно і на коефіцієнти Q_{pqmn} накладаються обмеження, що $C_{pqmn} = C_{qpmn}$, якщо $p = q$.

Тут і далі використано правило сумування Ейштейна: в кожному доданку виконується сумування за індексом, який повторюється двічі: $j = 1, 2$; $p, q = 1 \div 4$; $m, n = 1 \div \infty$.

У формулах (5)-(6) прийнято позначення:

$$\begin{aligned} T_{1k}^{[j]}(x_j) &= \sin(\gamma_k^{[j]} x_j), & T_{2k}^{[j]}(x_j) &= \cos(\delta_k^{[j]} x_j), \\ T_{3k}^{[j]}(x_j) &= \sin(\delta_k^{[j]} x_j), & T_{4k}^{[j]}(x_j) &= \cos(\gamma_k^{[j]} x_j), \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$\gamma_k^{[j]} = \frac{k\pi}{a_j}; \quad \delta_k^{[j]} = \frac{(2k-1)\pi}{a_j}; \quad k = 1 \div \infty. \quad (8)$$

Надалі введемо параметр

$$\kappa_{pk}^{[j]} = \begin{cases} \gamma_k^{[j]}, & p = 1, 4; \\ \delta_k^{[j]}, & p = 2, 3. \end{cases} \quad (9)$$

Що дасть змогу записати єдиним чином зв'язки між $T_{pk}^{[j]}(x_j)$ та їх похідними.

$$\begin{aligned} T_{1k}^{[j]'}(x_j) &= \kappa_{1k}^{[j]} T_{4k}^{[j]}(x_j); & T_{2k}^{[j]'}(x_j) &= -\kappa_{2k}^{[j]} T_{3k}^{[j]}(x_j); \\ T_{3k}^{[j]'}(x_j) &= \kappa_{3k}^{[j]} T_{2k}^{[j]}(x_j); & T_{4k}^{[j]'}(x_j) &= -\kappa_{4k}^{[j]} T_{1k}^{[j]}(x_j); \\ T_{pk}^{[j]''}(x_j) &= -\kappa_{pk}^{[j]2} T_{pk}^{[j]}(x_j); \\ T_{1k}^{[j]'''}(x_j) &= -\kappa_{1k}^{[j]3} T_{4k}^{[j]}(x_j); & T_{2k}^{[j]'''}(x_j) &= \kappa_{2k}^{[j]3} T_{3k}^{[j]}(x_j); \\ T_{3k}^{[j]'''}(x_j) &= -\kappa_{3k}^{[j]3} T_{2k}^{[j]}(x_j); & T_{4k}^{[j]'''}(x_j) &= \kappa_{4k}^{[j]3} T_{1k}^{[j]}(x_j); \end{aligned}$$

$$T_{pk}^{[j](IV)}(x_j) = \kappa_{pk}^{[j]4} T_{pk}^{[j]}(x_j). \quad (10)$$

Загальний розв'язок $w_0(x_1, x_2)$ однорідного рівняння (4) вибираємо у вигляді:

$$w_0(x_1, x_2) = f_{pk}^{[j]}(x_j) \cdot T_{pk}^{[3-j]}(x_{3-j}), \quad (11)$$

де $f_{pk}^{[j]}(x_j)$ є невідомі функції, які визначаються в процесі розв'язку задачі.

Підставимо розв'язок (11) до рівняння (4). Отримаємо:

$$\begin{aligned} & D_{11} \left[f_{pk}^{[1](IV)}(x_1) \cdot T_{pk}^{[2]}(x_2) + f_{pk}^{[2]}(x_2) \cdot T_{pk}^{[1](IV)}(x_1) \right] + \\ & + 2D_{33} \left[f_{pk}^{[1]''}(x_1) \cdot T_{pk}^{[2]''}(x_2) + f_{pk}^{[2]''}(x_2) \cdot T_{pk}^{[1]''}(x_1) \right] + \\ & + D_{22} \left[f_{pk}^{[1]}(x_1) \cdot T_{pk}^{[2](IV)}(x_2) + f_{pk}^{[2](IV)}(x_2) \cdot T_{pk}^{[1]}(x_1) \right] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Залежності (10) дозволяють розділити змінні в рівнянні (12). В результаті приходимо до двох незв'язних систем звичайних однорідних диференціальних рівнянь відносно невідомих функцій $f_{pk}^{[j]}(x_j)$.

$$\begin{aligned} & D_{11} f_{pk}^{[1](IV)}(x_1) - 2D_{33} \kappa_{pk}^{[2]2} f_{pk}^{[1]''}(x_1) + D_{22} \kappa_{pk}^{[2]4} f_{pk}^{[1]}(x_1) = 0, \\ & D_{22} f_{pk}^{[2](IV)}(x_2) - 2D_{33} \kappa_{pk}^{[1]2} f_{pk}^{[2]''}(x_2) + D_{11} \kappa_{pk}^{[1]4} f_{pk}^{[2]}(x_2) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Кожна з цих систем містить два незалежні рівняння, що відповідають значенням параметра $p = 1$ і $p = 2$. Рівняння для $p = 1; 3$ і $p = 2; 4$ такі ж самі.

Розв'язки цих рівнянь вибираємо у вигляді:

$$f_{pk}^{[j]}(x_j) = R_{pk}^{[j]} \exp(\lambda_{pk}^{[j]} x_j). \quad (14)$$

Очевидно, що:

$$\lambda_{1k}^{[j]} = \lambda_{4k}^{[j]}, \quad \lambda_{2k}^{[j]} = \lambda_{3k}^{[j]}.$$

У результаті приходимо до чотирьох лінійних алгебраїчних (так званих характеристичних) рівнянь відносно невідомих параметрів $\lambda_{pk}^{[j]}$:

$$\begin{aligned} & D_{11} \lambda_{pk}^{[1]4} - 2D_{33} \lambda_{pk}^{[1]2} \kappa_{pk}^{[2]2} + D_{22} \kappa_{pk}^{[2]4} = 0, \\ & D_{22} \lambda_{pk}^{[2]4} - 2D_{33} \lambda_{pk}^{[2]2} \kappa_{pk}^{[1]2} + D_{11} \kappa_{pk}^{[1]4} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Проведені дослідження показали, що для всіх реальних матеріалів корені цих рівнянь є комплексно-спряженими. Позначимо їх

$$\begin{aligned} & \lambda_{1k}^{[j]} = \alpha_{1k}^{[j]} + i \cdot \beta_{1k}^{[j]}, \quad \lambda_{2k}^{[j]} = -\lambda_{1k}^{[j]}, \\ & \lambda_{3k}^{[j]} = \bar{\lambda}_{1k}^{[j]}, \quad \lambda_{4k}^{[j]} = -\bar{\lambda}_{1k}^{[j]}. \end{aligned} \quad (16)$$

Використовуючи ці залежності записуємо загальні розв'язки рівнянь (15):

$$f_{pk}^{[j]}(x_j) = R_{vpk}^{[j]} E_{vpk}^{[j]}(x_j), \quad v = 1 \div 4. \quad (17)$$

Функції $E_{vpk}^{[j]}(x_j)$, які названо базовими функціями розв'язку визначаються так:

$$\begin{aligned} & E_{1pk}^{[j]}(x_j) = \frac{\cosh(\alpha_{pk}^{[j]} x_j) \cos(\beta_{pk}^{[j]} x_j)}{\exp(\alpha_{pk}^{[j]} a_j)}, \\ & E_{2pk}^{[j]}(x_j) = \frac{\cosh(\alpha_{pk}^{[j]} x_j) \sin(\beta_{pk}^{[j]} x_j)}{\exp(\alpha_{pk}^{[j]} a_j)}, \end{aligned}$$

$$E_{3pk}^{[j]}(x_j) = \frac{\sinh(\alpha_{pk}^{[j]} x_j) \cos(\beta_{pk}^{[j]} x_j)}{\exp(\alpha_{pk}^{[j]} a_j)};$$

$$E_{4pk}^{[j]}(x_j) = \frac{\sinh(\alpha_{pk}^{[j]} x_j) \sin(\beta_{pk}^{[j]} x_j)}{\exp(\alpha_{pk}^{[j]} a_j)}.$$
(18)

Враховуючи формули (3), (5), (11), (17) запишемо вираз на прогин тонкої ортотропної плити:

$$w(x_1, x_2) = R_{vpk}^{[j]} W_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2) + W_*(x_1, x_2). \quad (19)$$

Функції $W_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2)$ названо координатними, а $W_*(x_1, x_2)$ – силовими функціями прогину плити. Останні є частковим розв'язком рівняння (1).

Координатні функції прогину плити запишемо згідно формул (11), (17):

$$W_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2) = E_{vpk}^{[j]}(x_j) T_{pk}^{[3-j]}(x_{3-j}). \quad (20)$$

Маючи вираз на прогин плити за допомогою відомих в теорії плит співвідношень [5,9] визначаємо тангенціальні переміщення:

$$u_1(x_1, x_2) = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} = R_{vpk}^{[j]} \cdot U_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2, x_3) + U_*(x_1, x_2, x_3),$$

$$u_2(x_1, x_2) = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} = R_{vpk}^{[j]} \cdot V_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2, x_3) + V_*(x_1, x_2, x_3). \quad (21)$$

Моменти:

$$M_{11}(x_1, x_2) = -\left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = R_{vpk}^{[j]} \cdot X_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2) + X_*(x_1, x_2),$$

$$M_{22}(x_1, x_2) = -\left(D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) = R_{vpk}^{[j]} \cdot Y_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2) + Y_*(x_1, x_2),$$

$$M_{12}(x_1, x_2) = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} = R_{vpk}^{[j]} \cdot Z_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2) + Z_*(x_1, x_2), \quad (22)$$

і поперечні сили:

$$Q_1(x_1, x_2) = -\left(D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial x_2^2} \right) = R_{vpk}^{[j]} \cdot T_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2) + T_*(x_1, x_2),$$

$$Q_2(x_1, x_2) = -\left(D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial x_2^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) = R_{vpk}^{[j]} \cdot G_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2) + G_*(x_1, x_2), \quad (23)$$

у плиті.

Вирази для узагальнених поперечних сил отримуються із формул (23), в яких множник $(D_{12} + 2D_{66})$ замінюється на $(D_{12} + 4D_{66})$.

Величини $X_{vpk}^{[j]}(x_1, x_2)$ і т. д. названо координатними, а величини з «*» – силовими функціями переміщень, моментів і поперечних сил.

Силіві функції визначаються зі співвідношень (21)–(23), в яких замість функції $w_*(x_1, x_2)$ слід підставити функцію прогину $W_*(x_1, x_2)$.

Координатні функції теж визначаються з цих співвідношень і мають вигляд:

$$X_{vpk}^{[1]}(x_1, x_2) = -\left[D_{11} E_{vpk}^{[1]^2}(x_1) \cdot T_{pk}^{[2]}(x_2) + D_{12} E_{vpk}^{[1]}(x_1) \cdot T_{pk}^{[2]^2}(x_2) \right],$$

$$X_{vpk}^{[2]}(x_1, x_2) = -\left[D_{11} E_{vpk}^{[2]}(x_2) \cdot T_{pk}^{[1]^2}(x_1) + D_{12} E_{vpk}^{[2]^2}(x_2) \cdot T_{pk}^{[1]}(x_1) \right],$$

$$Y_{vpk}^{[1]}(x_1, x_2) = -\left[D_{12} E_{vpk}^{[1]^2}(x_1) \cdot T_{pk}^{[2]}(x_2) + D_{22} E_{vpk}^{[1]}(x_1) \cdot T_{pk}^{[2]^2}(x_2) \right],$$

$$Y_{vpk}^{[2]}(x_1, x_2) = -\left[D_{12} E_{vpk}^{[2]}(x_2) \cdot T_{pk}^{[1]^2}(x_1) + D_{22} E_{vpk}^{[2]^2}(x_2) \cdot T_{pk}^{[1]}(x_1) \right],$$

$$\begin{aligned}
Z_{vpk}^{[1]}(x_1, x_2) &= -2D_{66} \left[E_{vpk}^{[1]}(x_1) \cdot T_{pk}^{[2]}(x_2) \right], \\
Z_{vpk}^{[2]}(x_1, x_2) &= -2D_{66} \left[E_{vpk}^{[2]}(x_2) \cdot T_{pk}^{[1]}(x_1) \right], \\
T_{vpk}^{[1]}(x_1, x_2) &= - \left[D_{11} E_{vpk}^{[1]}(x_1) \cdot T_{pk}^{[2]}(x_2) + (D_{12} + 2D_{66}) E_{vpk}^{[1]}(x_1) \cdot T_{pk}^{[2]}(x_2) \right], \\
T_{vpk}^{[2]}(x_1, x_2) &= - \left[D_{11} E_{vpk}^{[2]}(x_2) \cdot T_{pk}^{[1]}(x_1) + (D_{12} + 2D_{66}) E_{vpk}^{[2]}(x_2) \cdot T_{pk}^{[1]}(x_1) \right], \\
G_{vpk}^{[1]}(x_1, x_2) &= - \left[D_{22} E_{vpk}^{[1]}(x_1) \cdot T_{pk}^{[2]}(x_2) + (D_{12} + 2D_{66}) E_{vpk}^{[1]}(x_1) \cdot T_{pk}^{[2]}(x_2) \right], \\
G_{vpk}^{[2]}(x_1, x_2) &= - \left[D_{22} E_{vpk}^{[2]}(x_2) \cdot T_{pk}^{[1]}(x_1) + (D_{12} + 2D_{66}) E_{vpk}^{[2]}(x_2) \cdot T_{pk}^{[1]}(x_1) \right].
\end{aligned} \tag{24}$$

Маючи координатні та силові функції на підставі співвідношень (19)-(24) отримуємо вирази переміщень, моментів і поперечних сил в плиті.

Далі моделюємо працю конструкції шляхом запису краєвих умов в окремих точках контуру, які названо вузловими точками. Вузлові точки обов'язково повинні бути пронумеровані, причому нумерація має бути неперервною і задані їх координати. Розбиття контуру плити зазвичай є рівномірним, якщо задані однорідні краєві умови або частково рівномірним (рівномірним на окремих сегментах), якщо на контурі задані змішані краєві умови. Краєві умови записуються в кожній вузловій точці тільки в криволінійній системі координат. Збільшення точності розв'язку досягається шляхом збільшення кількості вузлових точок на контурі плити та їх оптимального розміщення. Допускається запис однієї групи краєвих умов в різних вузлових точках (наприклад згинального моменту в вершині плити, а прогину – в її околі.

Можливі два способи розміщення вузлових точок на контурі плити:

1. вузлові точки розміщуються в кутових точках плити, а також в місцях прикладення зосереджених опор і в місцях розриву краєвих умов;

2. вузлові точки розміщуються в околі вказаних точок асимптотично наближаючись до них.

Кожен спосіб має свої переваги над іншим і недоліки.

На наш погляд оптимальним є змішаний спосіб, при якому вузлові точки розміщуються в кутових точках плити і в місцях дії зосереджених опор, а також в околі точок розриву краєвих умов.

1. Делявський М.В., Здолбіцька Н.В., Здолбіцький А.П. Метод конструкційних елементів у розрахунку плит складної конфігурації на пружній основі. Монографія. – Луцьк: ЛНТУ, 2012. – 102 с.
2. Здолбіцька Н. В. Моделювання напружено-деформованого стану плит на пружних основах методом конструкційних елементів / Н. В. Здолбіцька, М. В. Делявський // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник (за галузями знань „Машинобудування та металообробка”, „Інженерна механіка”, „Металургія та матеріалознавство”). – Луцьк, 2010. – Вип. 27. – С. 105 – 109.
3. Здолбіцька Н.В. Матричний метод розрахунку плит на пружній основі Вінклера / Н. В. Здолбіцька, М. В. Делявський // Сільськогосподарські машини. Зб. наук. ст. Вип. 19. – Луцьк: Ред.-вид. відділ ЛНТУ, 2009. – 63-71 с.
4. Здолбіцька Н.В. Напружено-деформований стан тонкої ортотропної плити на трипараметричній пружній основі / Н.В. Здолбіцька, М.В. Делявський // Вісник Донецького національного університету. Сер. А: Природничі науки. – Донецьк. – 2009. – Вип. 1. – С. 134–140.
5. Тимошенко С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер – М.: Гос. изд. физ.-мат. гиз, 1963. – 636 с.
6. Delyavskyy M., Olejniczak M., Zdolbicka N. Computational model of orthotropic slab reinforced with space truss // Bridges: Traditional and future. University of Technology and Life Sciences Press. – Bydgoszcz. – 2011. – С. 57-68.
7. Delyavskyy M. Model obliczeniowy płyty ortotropowej wzmocnionej kratownicą przestrzenną / Delyavskyy M., Olejniczak M., Zdolbicka N., Nitka J. // II Międzynarodowa konferencja mostowa im. Rudolfa Modrzejewskiego „Mosty. Tradycja i Nowoczesność”. Streszczenia. – Bydgoszcz. – 2010. – С. 21.
8. Delyavskyy M. Rozwiązanie płyty ortotropowej na podłożu sprężystym typu Pasternaka / M. Delyavskyy, N. Zdolbicka, A. Zdolbicki // Матеріали VI Польсько-Українського Наукового Симпозіуму “Актуальні Задачі Механіки Неоднорідних Середовищ”. – Варшава. – 2005. – С. 35–36.
9. Huber M.T. Die Grundlagen einer rationellen Berechnung der Eisenbetonplatten / M.T. Huber Zeitschr. Der Österr. Ing. u. Archit. Vereins, 1914. – 557 с.
10. Mykhaylo Delyavskyy, Nina Zdolbicka. Nowe podejście do rozwiązywania konstrukcji Płytowych // IV konferencja inżynierskie i przestrzenne aspekty zabudowy obszarów niezurbanizowanych. – Warszawa. – 2010. – С. 23.

Стаття надійшла до редакції 08.02.2014.