

Г.Т. Сулим¹, О. П. Ясній², Я. М. Пастернак³

¹ Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна

² Тернопільський національний технічний університет ім. Івана Пулюя, Тернопіль, Україна

³ Луцький національний технічний університет, Луцьк, Україна

РІСТ ВТОМНИХ ТРІЩИН В АНІЗОТРОПНИХ ПЛАСТИНКАХ ЗА ТЕПЛОВОГО НАВАНТАЖУВАННЯ

У роботі на основі застосування граничноелементного методу функцій стрибка розроблено числовий алгоритм вивчення траєкторій квазістатичного розвитку втомних тріщин в анізотропних пластинчастих елементах конструкцій та оцінювання відповідних коефіцієнтів інтенсивності напружень у їхніх вершинах. Завдяки використанню інтегральних рівнянь, розв'язування задачі на кожному кроці обчислення напрямку підростання і приросту довжини тріщини зводиться до виключно граничноелементного розбиття межі області, що дає істотні переваги порівняно з існуючими підходами, що враховують термопружні впливи за допомогою інтегралів по області із необхідністю відповідної об'ємної дискретизації. Таким чином підростання тріщини моделюється додаванням нових граничних елементів у вершинах без необхідності перерахунку скінченноелементної сітки, яка у даному алгоритмі не потрібна. Напрямок поширення тріщин в анізотропному матеріалі визначається на підставі критерію густини енергії деформації Сі. Здійснено аналіз числових прикладів, виявлено характерні ефекти термопружного підростання втомних тріщин.

Ключові слова: термопружний, анізотропний, тріщина, втома, теплове навантаження.

Г. Т. Сулим, О. П. Ясній, Я. М. Пастернак

РОСТ УСТАЛОСТНЫХ ТРЕЩИН В АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНКАХ ПРИ ТЕПЛОМ НАГРУЖЕНИИ

В работе на основании применения граничноэлементного метода функций скачка разработан численный алгоритм исследования траекторий квазистатического развития усталостных трещин в анизотропных пластинчатых элементах конструкций и определения соответствующих коэффициентов интенсивности напряжений в их вершинах. Благодаря использованным интегральным уравнениям, решение задачи на каждом шаге вычисления направления подрастания и прироста длины трещины сводится к исключительно граничноэлементному разбиению границы области, что дает существенные преимущества по сравнению с существующими подходами, которые учитывают эффекты термоупругости с помощью интегралов по области с необходимостью соответствующей объемной дискретизации. Таким образом, подрастание трещины моделируется добавлением новых граничных элементов в вершинах без необходимости пересчета конечноэлементной сетки, которая в данном алгоритме не требуется. Направление распространения трещин в анизотропном материале определяется на основании критерия плотности энергии деформации Си. Осуществлен анализ численных примеров, выяснены характерные эффекты термоупругого подрастания усталостных трещин.

Ключевые слова: термоупругий, анизотропный, трещина, усталость, тепловое нагружение.

Н. Т. Sulym, О. Р. Yasniy, Ya. M. Pasternak

FATIGUE CRACK GROWTH IN ANISOTROPIC PLATES UNDER THERMAL LOADING

The paper utilizes the discontinuity function boundary element method for development of a numerical approach for determination of quasi-static fatigue crack paths in anisotropic plate-like structural elements and corresponding stress intensity factors at their tips. Due to the integral equations used, the solution of the problem at each step of determination of the crack growth direction and length is reduced to the boundary element mesh only, which is advantageous comparing to existing approaches that account for the thermoelastic effects with domain integrals, which demand volume mesh. Thus, the crack growth is modeled by adding two new boundary elements at its tips without the necessity of remeshing the finite element mesh, which is unnecessary in the proposed algorithm. The direction of the crack growth in the anisotropic material is determined based on the Sih's strain energy density criterion. The numerical analysis is performed, and the peculiarities of the thermoelastic fatigue crack growth are discussed.

Keywords: thermoelastic, anisotropic, crack, fatigue, thermal loading.

Вступ. Як зазначено в монографії [1], вивчення законів квазістатичного розвитку тріщин та обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень уздовж відповідних траєкторій є вихідним етапом при розрахунку на міцність та довговічність елементів конструкцій, на які діють циклічні навантаження. У [1] також здійснено значну кількість числових досліджень втомного росту тріщин в ізотропних пластинчастих тілах за дії силового навантаження. У роботах [2, 3] вивчено критерії вибору напрямку та траєкторії підростання втомних тріщин в анізотропних пластинчастих елементах конструкцій за механічного навантаження. Аналізу ж дії теплового циклічного

навантаження приділено значно менше уваги дослідників. Зокрема, дуже часто термopружну задачу зводять до суто пружної, заступаючи теплове навантаження еквівалентним йому силовим [4]. Проте такі підходи мають істотні обмеження внаслідок того, що у випадку тіл складної форми із неоднорідними тепловими та різноманітними механічними крайовими умовами на межі досить важко підібрати еквівалентне силове навантаження, яке загалом, необхідно враховувати через розподілені по об'єму тіла фіктивні теплові зусилля.

Окремою особливістю моделювання підростання тріщин за допомогою числових методів є необхідність переозначення геометрії дефекту на кожному кроці циклу навантажування. Тому для розв'язування таких задач, як правило, використовують напіваналітичні підходи, зокрема, розширений метод скінченних елементів (XFEM) [5] чи метод граничних елементів (МГЕ). Останній має значні переваги, оскільки не потребує розбиття області сіткою скінченних елементів, а вимагає лише граничноелементної дискретизації її межі та осьової лінії тріщини.

Проте при вивченні впливу теплового розширення на напружений стан тіл за допомогою МГЕ у числовій схемі слід обчислювати додатковий об'ємний інтеграл, що часто нівелює великою мірою переваги методу. У випадку ізотропного тіла цей об'ємний інтеграл можна перетворити до граничного. Такий спосіб використано у роботах [6, 7] при дослідженні термopружної рівноваги ізотропних тіл із тріщинами. Однак, у випадку анізотропних тіл зведення об'ємного інтегралу до поверхневого стає досить громіздким завданням. У роботі [8] для випадку неоднорідних ортотропних площин, півплощин та смуг задача термopружності зведена до інтегрального рівняння Вольтерра. Для розв'язування задачі у випадку області довільної геометрії було запропоновано низку підходів. Скажімо, у роботі [9] розроблено «particular integral approach», який передбачає розбиття зайнятої тілом області на комірки, у кожній з яких температура апроксимується поліномом. У праці [10] запропоновано алгоритм перетворення об'ємного інтегралу до контурного. Цей підхід успішно використано при аналізі термонапруженого стану анізотропних тіл із тріщинами у роботі [11]. Однак, деякі з контурних інтегралів слід обчислювати у певним чином відображеній області, а це ускладнює алгоритм МГЕ. І лише нещодавно у роботі [12] вдалося побудувати суто граничні інтегральні рівняння плоских крайових задач стаціонарних теплопровідності та термopружності анізотропних тіл із тріщинами та відповідну схему методу граничних елементів для їхнього розв'язування.

Тому у даній роботі результати попередніх досліджень [12] застосовано до задачі вивчення квазістатичних траєкторій підростання втомних тріщин в анізотропних пластинчастих елементах конструкцій.

Формулювання задачі та загальна схема розв'язування. Розглянемо двовимірну задачу стаціонарної термopружності лінійно анізотропного тіла для пошкодженої тріщиною пластинки скінченних розмірів із теплоізолюваними бічними поверхнями. На межі пластинки та поверхнях тріщини задані певні квазістаціонарні теплові та механічні крайові умови, що визначаються конкретними умовами її експлуатації.

Відповідно до [12] сформульована двовимірною задачею термopружності зводиться до розв'язування таких систем дуальних інтегральних рівнянь теплопровідності

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma \theta(\mathbf{y}) &= \int_{\Gamma} \Theta^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma h_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} H^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \theta(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \\ \frac{1}{2} \Delta h_n(\mathbf{y}) &= n_i^+(\mathbf{y}) \left[\int_{\Gamma} \Theta_i^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma h_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} H_i^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \theta(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

та термopружності

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma u_i(\mathbf{y}) &= \int_{\Gamma} U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_j(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ &+ \int_{\Gamma} R_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \theta(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} V_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma h_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}), \\ \frac{1}{2} \Delta t_i(\mathbf{y}) &= n_j^+(\mathbf{y}) \left[\int_{\Gamma} D_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma t_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \int_{\Gamma} S_{ijk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u_k(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \right. \\ &\left. + \int_{\Gamma} Q_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \theta(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} W_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma h_n(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) \right], \end{aligned} \quad (2)$$

де \mathbf{x}, \mathbf{y} – точки інтегрування та колокації, відповідно; $\Sigma(\square) = (\square)^+ + (\square)^-$, $\Delta(\square) = (\square)^+ - (\square)^-$; h_i – компоненти вектора густини теплового потоку; u_i – компоненти вектора переміщень; θ – зміна

температури порівняно з відліковою; $t_i = \sigma_{ij} n_j$ – компоненти вектора напружень; $\Sigma h_n = h_n^+ n_i^+ + h_n^- n_i^-$; n_j^\pm – компоненти вектора нормалей \mathbf{n}^\pm до поверхонь Γ^\pm ; $\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^-$; $d\Gamma$ – дійсний диференціал дуг $\Gamma = \bigcup_j \Gamma_j$, що моделюють розрізи (тріщини) та межу тіла. Усі ядра інтегральних співвідношень (1), (2) означені у замкнутій формі у праці [12].

Потрібно наголосити, що сингулярні інтеграли слід обчислювати в сенсі головного значення, а гіперсингулярні – в сенсі скінченної частини Адамара. Якщо серед контурів Γ_j є замкнуті, то для них слід вважати [12], що $\theta^+ = \theta$, $\theta^- \equiv 0$, $h_n^+ = h_n$, $h_n^- \equiv 0$ тощо, тобто у формулах (1) та (2) на замкнутих контурах необхідно зважати на рівності $\Delta\theta = \Sigma\theta = \theta$, $\Sigma h_n = \Delta h_n = h_n$, $\Sigma t_j = \Delta t_j = t_j$, $\Delta u_j = \Sigma u_j = u_j$, $\Delta\theta = \theta$, $\Sigma h_n = h_n$.

Разом із заданими крайовими умовами інтегральні рівняння (1), (2) дають можливість обчислити функції стрибків температури $\Delta\theta$ та переміщень Δu_i на тріщині, а відтак на основі [12] обчислити коефіцієнти інтенсивності теплових потоків та напружень у їхніх вершинах:

$$K_{hI} = - \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} k_t \Delta\theta(s), \quad \mathbf{k}^{(1)} = \lim_{s \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\pi}{8s}} \mathbf{L} \cdot \Delta \mathbf{u}(s) \quad (3)$$

де K_{hI} – коефіцієнт інтенсивності теплового потоку; $\mathbf{k}^{(1)} = [K_{II}, K_{I}]^T$ – вектор коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН); \mathbf{L} – дійсний тензор Barnett–Lothe [12], що залежить від пружних властивостей матеріалу та обчислюється в локальній системі координат у вершині тріщини.

Оскільки розглядається задача незв'язаної термопружності, то рівняння (1) можна розв'язувати незалежно від (2). Для побудови МГЕ-моделі задачі, криві Γ апроксимуємо за допомогою n прямолінійних відрізків – граничних елементів Γ_q . На кожному елементі виберемо по 3 вузлові точки: одну в центрі, а дві інші – на відстані $1/3$ довжини елемента по обидва боки від центральної (розривний тривузловий граничний елемент). Крайові функції h_n , θ , t_j та u_j апроксимуємо на елементі за їхніми вузловими значеннями:

$$[h_n, \theta, t_j, u_j](\xi) \approx \sum_{p=1}^3 [h_n^{q,p}, \theta^{q,p}, t_j^{q,p}, u_j^{q,p}] \phi_p(\xi). \quad (4)$$

Тут ξ – параметр розташування точки на елементі, означений на проміжку $-1 \leq \xi \leq 1$ так: $d\Gamma_q = J_q d\xi$, де J_q – модуль якобіана заміни змінних на елементі Γ_q .

У цей спосіб система сингулярних інтегральних рівнянь (1), (2) зводиться до системи лінійних алгебричних рівнянь стосовно шуканих вузлових значень $h_n^{q,p}$, $\theta^{q,p}$, $t_j^{q,p}$ та $u_j^{q,p}$ крайових функцій h_n , θ , t_j та u_j . При цьому, якщо точка колокації потрапляє на замкнутий контур, то оскільки вважається, що на ньому $\theta^- = h_n^- = u_j^- = t_j^- = 0$, слід використовувати лише перші з рівнянь (1) (на температуру) та (2) (на переміщення). Якщо точка колокації потрапляє на розімкнутий контур, то для визначення не заданих крайовими умовами функцій h_n або θ , t_j або u_j на обох берегах Γ_q^+ та Γ_q^- граничного елемента Γ_q слід використовувати усі рівняння (1) і (2).

Базові функції (функції форми) $\phi_p(\xi)$ для (4) у випадку граничних елементів, що не лежать на кінцях розімкнутих дуг задаються поліномами Лагранжа. У вершині тріщини напруження та теплові потоки мають кореневу особливість. Тому для підвищення точності методу та зручності обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) базові функції для розривів переміщень Δu_j виберемо згідно [12] у формі

$$\phi_p^{\Delta u} = \Phi_{p1}^{\Delta u} \sqrt{\rho} + \Phi_{p2}^{\Delta u} \rho + \Phi_{p3}^{\Delta u} \rho^{3/2} \quad (p=1, 2, 3), \quad (5)$$

де $\rho = 1 \pm \xi$; $\Phi_{pj}^{\Delta u}$ – матриця сталих, що визначаються з рівнянь $\phi_p(\xi_p) = 1$, $\phi_p(\xi_{j \neq p}) = 0$, де ξ_p – координати вузлових точок на граничному елементі.

Для теплоізольованих тріщин функції форми для стрибків температури також вибираються у вигляді (5). Якщо на берегах тріщини задано температуру, то функції форми для розривів Σh_n теплового потоку на тріщині запишемо у вигляді [12]

$$\phi_p^{\Sigma h} = \Phi_{p1}^{\Sigma h} \rho^{-1/2} + \Phi_{p2}^{\Sigma h} + \Phi_{p3}^{\Sigma h} \sqrt{\rho} \quad (p=1,2,3). \quad (6)$$

Числові методи інтегрування сингулярних та гіперсингулярних інтегралів, а також поліноміальні відображення для згладжування підінтегральних виразів із базовими функціями (5), (6) подано у роботі [12].

МГЕ-розв'язок задачі стосовно функцій стрибків і відповідних значень КІН виконується для кожного умовного циклу навантажування. Далі для визначення напрямку підростання тріщини застосовується енергетичний критерій Дж. Сі [13], який вважає, що руйнування зароджується в тілі біля вершин тонкого дефекту при полярному куті θ_* , за якого коефіцієнт S густини енергії деформації набуває мінімального значення (потенціальна енергія протилежна за знаком до силової функції, тому максимум силової функції відповідає мінімуму потенціальної енергії)

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_*} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_*} > 0. \quad (7)$$

Причому коефіцієнт S густини енергії деформації є функцією лише полярного кута та КІН: $S = S(\theta, K_I, K_{II})$.

Далі на основі формули Періса [14] обчислюється довжина ділянки підростання тріщини у кожній із вершин. За знайденими значеннями кута поширення та відповідної довжини здійснюється зміна геометрії задачі для нового кроку моделювання циклічного навантажування. Для цього необхідно лише у кожній із вершин додати по одному новому граничному елементі. Для забезпечення стійкості цієї схеми, крок за кількістю циклів вибирався з огляду на те, щоб нові граничні елементи мали приблизно однаковий розмір із вже існуючими (фізично цей розмір визначається характерним розміром зерна, волокон композиту, міжфазною відстанню тощо). Тобто, фактично при розв'язуванні задачі формула Періса використовується оберненим чином в сенсі її числового інтегрування зі сталим кроком за приростом довжини тріщини, а не за кількістю циклів навантажування. Отже, остання величина визначається як функція довжини тріщини чи коефіцієнта інтенсивності напружень. Тобто, фактично застосовується обернена до формули Періса залежність, що звісно, не накладає жодних обмежень на використання алгоритму при вивченні траєкторій квазістатичного втомного підростання тріщин в анізотропних термопружних пластинчатих елементах конструкцій за комбінованого термосилового навантажування.

Числовий приклад. Розглянемо виготовлену з анізотропного склопластику квадратну пластину зі стороною $2W$, що містить центральну тріщину завдовжки $2a$, нахилена під кутом γ до осі абсцис (рис. 1). Властивості матеріалу пластинки є такими [11]: $E_{11} = 55$ ГПа, $E_{22} = 21$ ГПа, $\nu_{12} = 0,25$, $G_{12} = 9,7$ ГПа, $\alpha_{11} = 6,3 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$, $\alpha_{22} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$, $k_{11}/k_{22} = 3,46/0,35$. Вертикальні бічні поверхні пластинки є теплоізольованими та вільними від навантажень, а горизонтальні підтримуються (в сенсі циклічного навантажування) при різних сталих температурах (змішані теплові та механічні крайові умови). Крім того, горизонтальні поверхні не можуть переміщуватися уздовж вертикального напрямку.

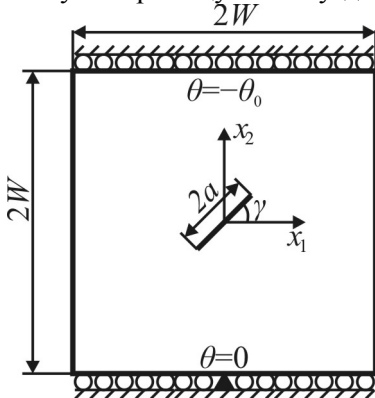


Рис. 1. Схема задачі

Вивчимо траєкторію підростання тріщини та КІН у випадку, коли $\gamma = 45^\circ$, $a = 0,2W$, $\theta_0 = 10$ К. Коефіцієнт нормування КІН дорівнює $K_0 = E_{22} \alpha_{22} \theta_0 \sqrt{\pi a}$, де a – початкова півдовжина тріщини. Вважається, що тріщина на кожному кроці обчислень підростає на сталу величину $\Delta a = 0,1a$. При цьому кількість циклів, за яку цей приріст здійснено можна обчислювати за формулою Періса (чи NASGRO) за властивостями даного матеріалу та обчисленими значеннями КІН. Для розбиття межі квадрата використано 80 тривузлових граничних елементів, і 10 граничних елементів використано для дискретизації початкової поверхні тріщини. Розраховану траєкторію поширення термовтомної тріщини зображено на рис. 2 ліворуч, а обчислені

значення КІН у лівій та правій її вершинах для кожного кроку підростання подано на рис. 2 праворуч.

Із рис. 2 видно, що траєкторія підростання тріщини не є стійкою. Вона тричі змінює напрям свого руху в обох вершинах, що не простежується за суто силового навантаження пластинки однорідним полем напружень. Причому зміна напрямку поширення відбувається послідовно в обох вершинах із деяким зміщенням по кроках ітерації. При цьому різко змінюються КІН зсувної моди. Стосовно обчислених значень КІН, то простежується деяка їхня асиметрія в двох вершинах. Це пов'язано з тим, що кінчики тріщини розташовані в областях із різними температурами. Такий вплив особливо помітний на КІН зсувної моди. КІН моди нормального відриву спочатку зростають, а потім дещо навіть зменшуються за модулем до досягнення другого зламу траєкторії. Із подальшим наближенням тріщини до межі тіла ці КІН знову зростають. КІН зсувної моди у лівій і правій вершинах тріщини починають істотно різнитися із наближенням її траєкторії до точок зламу, внаслідок неоднорідності розподілу температур в тілі. Оскільки КІН моди нормального відриву є близькими в обох вершинах, то обраний алгоритм моделювання підростання сталими ділянками, однаковими в обох вершинах, є згідно формули Періса [14] цілком прийнятним.

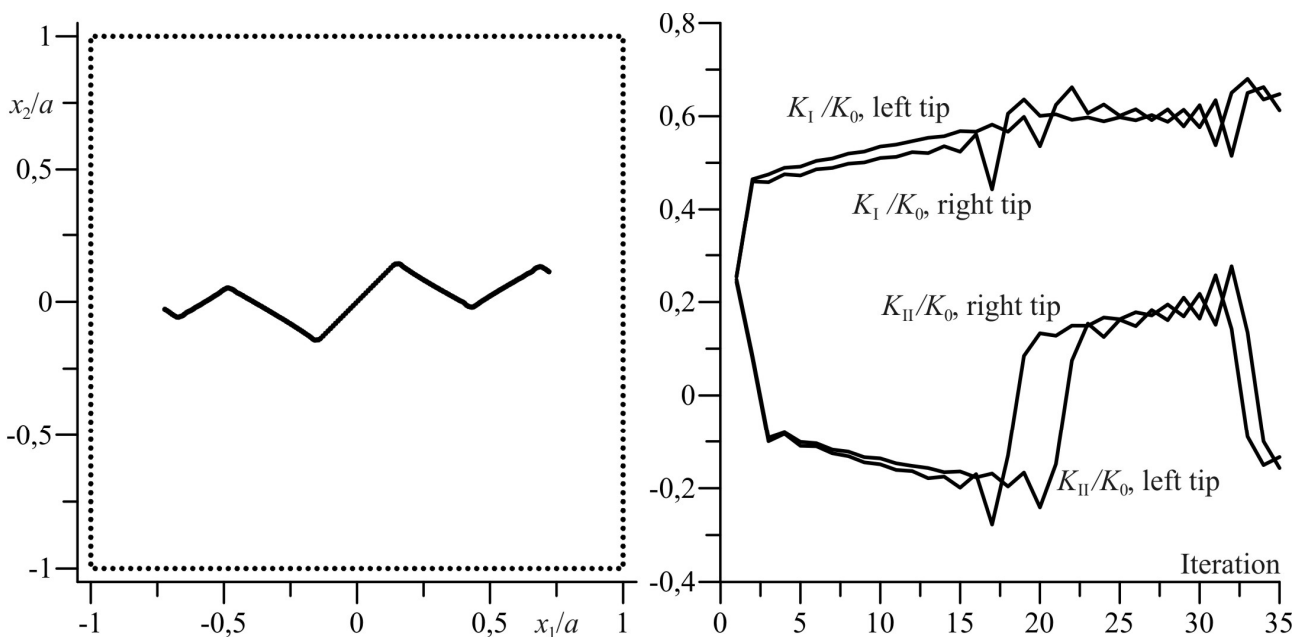


Рис. 2. Траєкторія поширення втомної тріщини (ліворуч) та КІН у її вершинах на кожному кроці підростання (праворуч)

Висновки. На основі застосування раніше розроблених інтегральних рівнянь термопружності анізотропних тіл розроблено ефективну числову реалізацію методу граничних елементів для дослідження траєкторій термовтомного підростання тріщин в пластинчастих елементах конструкцій. З'ясовано, що методи заміни теплового навантаження еквівалентним силовим, унаслідок його істотно неоднорідного і наперед невідомого розподілу в тілі з тріщиною, є вкрай грубим наближенням при вивченні задач термовтоми, а особливо квазістатичних траєкторій поширення тріщин. На основі аналізу числових прикладів продемонстровано, що траєкторія підростання тріщини за теплового циклічного навантажування може бути нестійкою, різко змінювати напрям свого руху, що свідчить про проблематичність її прогнозування за допомогою існуючих інженерних підходів при аналізі конкретних технічних завдань.

1. Саврук М. П. Численный анализ в плоских задачах теории трещин / М. П. Саврук, П. Н. Осив, И. В. Прокопчук. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.
2. Божидарнік В. В. Визначення напрямків росту тріщин у композитних пластинках із тріщинами / В.В. Божидарнік, К. Я. Бортник, О. В. Максимович // Наукові нотатки. – 2012. – Вип. 37. – С. 38–44.
3. Божидарнік В. В. Дослідження процесу розвитку втомних крайових та внутрішніх тріщин у пластинках складної форми / Божидарнік В. В., Максимович О. В. // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій / Під заг. ред. В. В. Панасюка. – Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, 2009. – С. 235–240.

4. Kamaya M. A study on the evolution of crack networks under thermal fatigue loading / M. Kamaya, S. Taheri // Nuclear Engineering and Design. – 2008. – Vol. 238, № 9. – P. 2147–2154.
5. Bhattacharya S. Mixed-mode fatigue crack growth analysis of functionally graded materials by XFEM / S. Bhattacharya, I. V. Singh, B. K. Mishra // International Journal of Fracture. – 2013. – Vol. 183, No. 1. – P. 81–97.
6. Prasad N. N. V. The dual boundary element method for thermoelastic crack problems / N. N. V. Prasad, M.H. Aliabadi, D.P. Rooke // Int. J. Fract. – 1994. – 66. – P. 255–272.
7. Mukherjee Y. X. Thermoelastic fracture mechanics with regularized hypersingular boundary integral equations / Y. X. Mukherjee, K. Shah, S. Mukherjee // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 1999. – 23. – P. 89–96.
8. Tokovyy Y. An explicit-form solution to the plane elasticity and thermoelasticity problems for anisotropic and inhomogeneous solids / Y. Tokovyy, C.-C. Ma // International Journal of Solids and Structures. – 2009. – 46, № 21. – P. 3850–3859.
9. Deb A. BEM for general anisotropic 2D elasticity using particular integrals / A. Deb, P.K. Banerjee // Commun. Appl. Num. Meth. – 1990. – 6. – P. 111–119.
10. Shiah Y. C. Exact boundary integral transformation of the thermoelastic domain integral in BEM for general 2D anisotropic elasticity / Y. C. Shiah, C.L. Tan // Computational Mechanics. – 1999. – 23. – P. 87–96.
11. Shiah Y. C. Fracture mechanics analysis in 2-D anisotropic thermoelasticity using BEM / Y.C. Shiah, C.L. Tan // CMES. – 2000. – Vol. 1, No. 3. – P. 91–99.
12. Pasternak Ia. Boundary integral equations and the boundary element method for fracture mechanics analysis in 2D anisotropic thermoelasticity / Ia. Pasternak // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2012. – 36, No. 12. – P. 1931–1941.
13. Sih G. C. Mechanics of fracture initiation and propagation: surface and volume energy density applied as failure criterion / G. C. Sih. – The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991 – 410 p.
14. Paris P. A critical analysis of crack propagation laws / P. Paris, F. Erdogan // Journal Basic Engineering. – 1963. – P. 528–534.

Стаття прийнята до редакції 12.03.2015.