УДК 620.1

І. Г. Грабар
Житомирський національний агроекологічний університет

ПЕРКОЛЯЦІЙНО-ФРАКТАЛЬНІ МОДЕЛІ В СУЧАСНОМУ МАТЕРІАЛОЗНАВСТВІ

Наведені результати досліджень перколяції на кінцевомірних метричних та фрактальних множинах, що дозволило отримати нові узагальнення для моделювання перколяційно-фрактальних середовищ (ПФС) в сучасному матеріалознавстві. Запропоновано інженерні залежності для конструювання надчутливих ПФС тензодатчиків та сенсорів. Розглянуто альтернативний метод оцінки фрактальної розмірності фрактальних та квазіфрактальних множин.

Ключові слова: *перколяційно-фрактальні середовища; надчутливі тензодатчики; з'єднуючий кластер; критична перколяція; фрактальна розмірність*

И. Г. Грабар

ПЕРКОЛЯЦИОННО-ФРАКТАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ В СОВРЕМЕННОМ МАТЕРИАЛОВЕДЕНИИ

Приведены результаты исследований перколяции на конечномерных метрических и фрактальных множествах, что позволило получить новые обобщения для моделирования перколяционно-фрактальных сред (ПФС) в современном материаловедении. Предложены инженерные зависимости для конструирования сверхчувствительных ПФС тензодатчиков и сенсоров. Рассмотрено альтернативный метод оценки фрактальной размерности фрактальных и квазифрактальных множеств.

Ключевые слова: *перколяционные-фрактальные среды; сверхчувствительные тензодатчики; соединяющий кластер; критическая перколяции; фрактальная размерность.*

I. G. Grabar

PERKOLYATION- FRACTAL MODELS IN MODERN MATERIALS SCIENCE

Results of researches of a perkolyation on finite-dimensional the metrical and fractal sets that allowed to receive new generalizations for modeling of the perkolyation-fractal environments (PFE) in modern materials science are given. Engineering dependences for designing of supersensitive PFE of strain gages and sensors are offered. It is considered an alternative method of an assessment of fractal dimension of fractal and quasifractal sets.

Keywords: *percolation-fractal environment; ultra-sensitive load cells; The clipping cluster; critical percolation; fractal dimension.*

Перколяція та фрактали відомі досить давно, але глибоке їх моделювання, теоретичне вивчення та впровадження в технології розпочалося в останній четверті 20 століття і на даний момент лише зростає. Це викликає нестримний інтерес науковців до більш глибокого вивчення перколяційно-фрактальних середовищ, що породжує нові задачі в сучасному матеріалознавстві [1-10].

Перколяція (англ. percolation – фільтрування, протікання) – стрибкоподібне виникнення нових фізичних властивостей при плавному збільшенні вмісту керуючої компоненти.

Фракта́л (лат. *fractus* — подрібнений, дробовий) — нерегулярна, самоподібна структура, мала частина якої в довільному збільшенні є подібною до неї самої.

В природі і явище перколяції, і фрактальні об'єкти існували завжди, і вивчали їх досить давно (див.Рон Еглаш *«Африканські Фрактали»*, де наводяться приклади фрактальних геометричних фігур в мистецтві тубільців; також див. Альбрехт Дюрер «Мистецтво художника», 1525), хоча власне термін *фрактал* запропонував Бенуа Мандельброт лише в 1975 році. «Рекурсивну самоподібність» запропонував ще Лейбніц. Карл Веєрштрас побудував функцію, скрізь неперервну, але ніде недиференційовану. В 1904 Кох розробив схожу, але більш образну функцію, яка тепер відома, як сніжинки Коха. До розробки теорії фракталів долучились такі відомі науковці, як Ґеорг Кантор, Анрі Пуанкаре, П'єр Фату, Ґастон Жюліа, а також згаданий вище Бенуа Мандельброт, що систематизував дослідження фрактальних множин, заклавши потужний фундамент до їх кількісного дослідження та впровадження в техніку [1]. В живій та неживій природі величезна кількість об'єктів мають фрактальну природу – корали, морські зірки, раковини, квіти і рослини, крони дерев, берегові лінії, гірські утворення, сніжинки, хмари, блискавки, тріщини, кордони географічних об'єктів і багато інших. Множина Кантора, килим Серпинського, Крива Коха, крива Пеано, траєкторія броунівського руху – відомі теоретичні моделі фрактальних множин.

Теоретичні та експериментальні дослідження [1–10] показали надзвичайну перспективність застосування перколяційно-фрактальних систем в сучасному матеріалознавстві та нанотехнологіях. Наразі виникла необхідність створення аналітичної моделі поведінки перколяційно-фрактальних середовищ. Використання перколяційних та фрактальних уявлень дає можливість створити моделі для нового рівня прогнозування критичних явищ в різних галузях фізики, біології, механіки та інших науках.

Розроблено комплекс алгоритмів та програм на мові програмування С++ та в середовищі Excel для кількісного аналізу перколяційно-фрактальних середовищ, що дозволяє моделювати виникнення перколяції на двох- та трьохмірних як в метричних, так і фрактальних множинах.

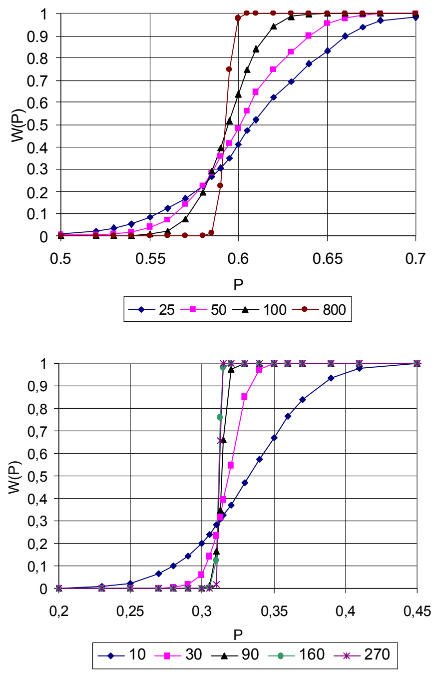
В усіх випадках використовувалося декартове розбиття області. Підобласті заповнюються за допомогою генератора випадкових чисел. Методом статистичного моделювання на базі 100-, 1000- та 10000-разового повторення проводився статистичні розіграші виникнення з'єднуючого кластера, як функції розмірів області LxL, рівня фрактальності простору (покоління фрактала) **j** та ймовірності **W(P)** заповнення гратки компонентою **X** в компоненті **Y** або навпаки.

Основні результати наших досліджень:

1. Комп’ютерне моделювання явищ перколяції на кінцевомірних областях дозволило отримати ймовірність виникнення з’єднуючого кластера (рис.1)

$$W(P)=\frac{1}{1+\exp\,(L(P_{*}-P))} \tag{1}$$

де P_* - значення критичної ймовірності, L – розмір всієї області. Вірогідність такої статистики – не гірша 0,96.



а

Рис. 1. **Залежність критичної ймовірності від ймовірності заповнення середовища для плоских моделей L×L (а), і для об’ємних L×L×L (б).**

При цьому, як видно з рис.1, лише при L → ∞ ймовірність з’єднуючого кластера наближається до ступінчастої. При цьому P_* також залежить від розмірів кінцевомірної моделі.Поріг перколяції P_* визначається як така імовірність р, при якій з'являється перший нескінченний кластер на нескінченній гратці. Однак для кінцевої гратки зі стороною L, завжди існує ненульова імовірність того, що буде з'являтися кластер, що зв'язує одну сторону гратки з іншою навіть при р<< P_*.

2.Наведено результати статистичного моделювання ймовірності виникнення з’єднуючих кластерів на фрактальних та квазіфрактальних множинах (рис.2)

Виявлено, що інтегральні гістограми виникнення з'єднуючого кластера значною мірою залежать від рівня покоління фрактала j килима Серпинського, залишаючись при цьому близькими до розподілу (1). При цьому були виявлені наступні закономірності:

- критична ймовірність P_*. зростає при збільшенні рівня фрактальності (покоління) **j** (рис. 2);
- зростає розсіювання від $P_*(L)$ при j = const;
- зростає розсіювання P_* від j (рис. 2);

P_* (L) для різних j спадає зі збільшенням L та утворює квазіпучок (2).

В результаті статистичного моделювання для килима Серпинського різних поколінь нами отримано:

$$P_* = 0,59 - 0,00002 * L; j = 0$$
$$P_* = 0,6127 - 0,00008 * L; j = 1 \qquad (2)$$
$$P_* = 0,6513 - 0,00032 * L; j = 2$$
$$P_* = 0,7214 - 0,0005 * L; j = 3$$

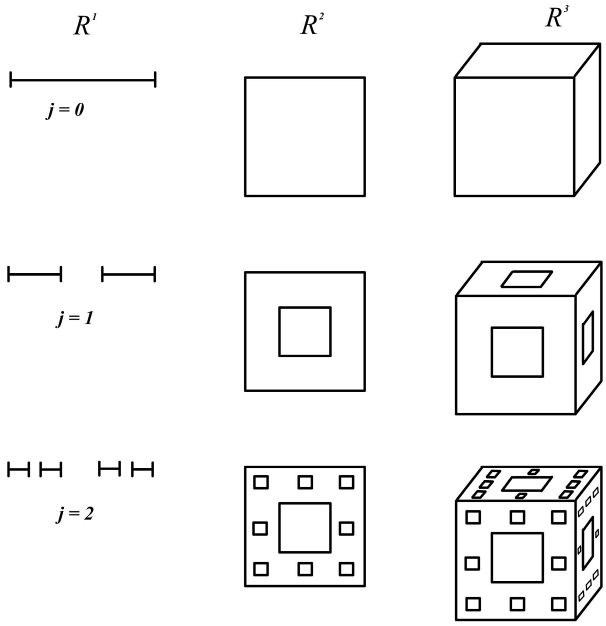


Рис. 2. **Множина Кантора та її 2D (килим Серпинського) та 3D (губка Серпинського) варіанти**

3. Вперше показана можливість оцінити критичну перколяцію P_* , як функцію розмірності простору D:

$$P_* = 1 - \ln\frac{D+1}{2} \qquad (3)$$

Виявлення залежності (3) дозволило запропонувати альтернативний метод визначення фрактальної розмірності фракталів та особливо – квазіфракталів. Для цього на заданій області методами статистичних розіграшів (при декартовому розбитті) визначається P_* та за допомогою (3) визначається D.

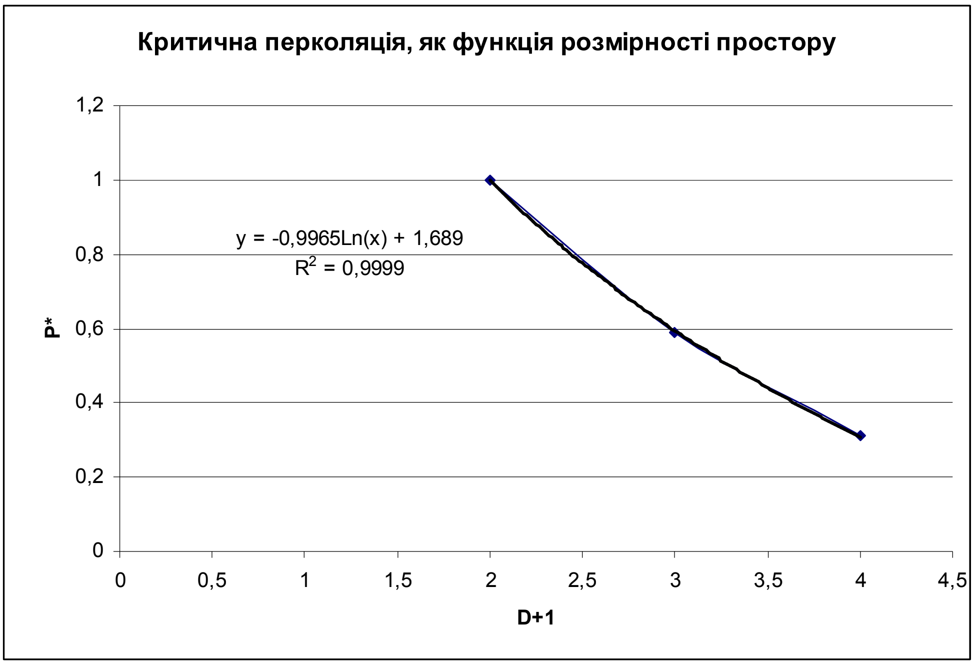


Рис. 3. **Залежність критичної перколяції від розмірності простору (вузли, декартове розбиття)**

4. Отримано в загальному випадку кількість перколяційних кластерів m, що можна побудувати з n елементів в просторі розмірністю D

$$m = D^{n-1} - (D-1)^{n-1}(n-1) + (D-1)^{n-3}(D-2)\ (n-2) \tag{4}$$

5. Започатковано велику програму експериментально-теоретичних досліджень деформованих перколяційно-фрактальних середовищ .

Широке застосування в задачах тензометрії знайшли провідникові, фольгові та плівкові тензодатчики опору. Але малі значення вимірюваних деформацій та переміщень, низька чутливість та необхідність підсилення вихідного сигналу накладають ряд обмежень на використання датчиків даного типу.

Як відомо, електричний опір суцільного середовища

$$R = \frac{\rho \cdot l}{S}, \tag{5}$$

де ρ - питомий опір, l, S – довжина та площа провідника.

Для тензодатчика опору (l >> d) це дає:

$$R_{\varepsilon} / R = (1+\varepsilon)...(1+2\varepsilon), \tag{6}$$

де ε - деформація. При $\varepsilon_{max} < 5$ % це дає максимально можливе значення зміни вимірюваної величини лише в 1,1 раза, що й викликає вказані вище недоліки.

Показано, що досить значний прорив як з теоретичної, так і з практичної точок зору може бути досягнуто в даній проблемі, якщо чутливий елемент перетворювача виготовляти із перколяційних або перколяційно-фрактальних середовищ.

Наприклад, запропоновано перетворювач, що складається з еластичної підкладки необхідних розмірів, на яку тонким шаром наноситься та закріплюється (приклеюється) двокомпонентна перколяційно-фрактальна суміш невзаємодіючих (квазіневзаємодіючих) мікрочастинок типу "провідник-діелектрик", причому концентрація провідникової компоненти P більше критичної концентрації P^* (для плоскої перколяції $P^* = 0{,}59$) .

У недеформованому стані підкладки опір датчика можна оцінити, як:

$$\frac{R_P}{R_0} = \left[\frac{1-P^*}{P-P^*}\right]^{v}. \tag{7}$$

Як буде вести себе перколяційна система, коли підкладку деформувати? Очевидно, при деформації змінюється площа підкладки, що призводить до зміни (перенормування) ефективного значення концентрації P провідникової компоненти (збільшення площі при деформації підкладки при $P = const$ призведе до зменшення провідникової та збільшення діелектричної концентрації).

Тоді, при деформації підкладки в наближенні квазіневзаємодіючих мікрочастинок, залежність опору від концентрації провідникової компоненти та величини деформації матиме вигляд:

$$\frac{R_\varepsilon}{R_0} = \left[\frac{1-P^*}{\dfrac{P}{(1+\varepsilon)(1-\mu\varepsilon)} - P^*}\right]^{v}, \tag{8}$$

де R_0 та R_ε, R_0 – електричний опір перетворювача в деформованому та недеформованому стані відповідно, ε –деформація підкладки, μ — коефіцієнт Пуассона матеріалу підкладки, v – критичний індекс перколяційної системи (для двомірної перколяції $v \sim 0{,}5$).

На основі (3), (7), (8) побудовано методологію конструювання суперчутливих тензодатчиків та сенсорів, оскільки (8) – гіперболічного типу, і при значеннях Р, близьких до P_* дозволяє отримати $R_\varepsilon / R_0 \approx 100...1000$.

Деформований перколяційно-фрактальний матеріал можливо використовувати як:

- модельний об'єкт дослідження деформацій;
- матеріал для нагрівачів з будь-якою динамічно керованою конфігурацією температурного поля;
- матеріал для супертензодатчиків та для дослідження деформацій будь-якої чутливості;
- композитний матеріал для виготовлення надлегких електропровідних систем тощо.

Висновки.

1.Статистичні методи моделювання деформованих перколяційних систем дозволили отримати інженерні залежності для оцінки фізичних властивостей кінцевомірних перколяційно-фрактальних середовищ в ймовірнісній постановці.

2.Запропонована методологія конструювання та розрахунку надчутливих перколяційно-фрактальних супертензодатчиків та сенсорів.

3.Запропоновано альтернативний метод визначення фрактальної розмірності квазіфракталів через статистичне моделювання на них ймовірності виникнення з'єднуючого кластера..

1. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – Ижевск: ИКИ, 2010. – 656 с.
2. Гринченко В. Т., Мацыпура В. Т., Снарский А. А. Фракталы: от удивления к рабочему инструменту. — К.: Наукова думка, 2013. – 270 с.
3. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. — М.: Техносфера, 2006. — 488 с.
4. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
5. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. — Ижевск: РХД, 2005. – 528 с.
6. Falconer K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. — Wiley, 2003.
7. Тарасевич Ю. Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы: Учебное пособие – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 112 с.
8. D.Stauffer and A.Aharony, Introduction to Percolation Theory, Taylor and Fransis, London, 1994.
9. A.Bunde, S.Havlin, Percolation I (pp. 51-95), Percolation II (pp. 97-149), in: Fractals and disordered systems, eds. A.Bunde, S.Havlin, Springer, Berlin, 1996.
10. Грабар І.Г., Грабар О.І., Гутніченко О.А., Кубрак Ю.О. Перколяційно-фрактальні матеріали. – Житомир. – ЖДТУ. – 2007. – 354 с.

Стаття надійшла до редакції 15.04.2015.