

УДК 539.375

В. А. Кривень, А. Р. Бойко, А. В. Каплун

Тернопільський національний технічний університет імені І. Пулюя

### ПОЧАТКОВА СТАДІЯ ПЛАСТИЧНОГО ВІДШАРОВУВАННЯ ВКЛЮЧЕННЯ КВАДРАТНОГО ПЕРЕРІЗУ ЗА НАЯВНОСТІ МІЖФАЗНИХ ТРІЩИН

Досліджено початкову стадію розвитку пластичних деформацій на продовженні міжфазних тріщин, що виходять із вершин включення квадратного перерізу за умов антиплоскої деформації. Отримано формули для залежностей довжин пластичних смуг від коефіцієнта сингулярного доданка пружного розв'язку.

Ключові слова: жорстке включення, міжфазні тріщини, пластичне відшаровування.

Форм. 9. Рис. 4. Літ. 6.

В. А. Крывень, А. Р. Бойко, А. В. Каплун

### НАЧАЛЬНАЯ СТАДИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО ОТСЛАИВАНИЯ ВКЛЮЧЕНИЯ КВАДРАТНОЕ СЕЧЕНИЕ ПРИ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЕ

Исследовано начальную стадию развития пластических деформаций на продолжении межфазных трещин, начинающихся от вершин включения квадратного сечения в условиях антиплоской деформации. Получено формулы для зависимостей длины пластических слоев от коэффициента сингулярного слагаемого упругого.

Ключевые слова: жесткое включение, межфазная трещина, пластическое отслаивание.

V. A. Kryven, A. R. Boyko, A. V. Kaplyn

### THE INITIAL STAGE OF PEELING PLASTIC SQUARE SECTION INCLUDED IN THE PRESENCE INTERFACE CRACKS

The initial stage of plastic deformations on the extending of interfacial cracks emanating from the vertices of inclusion of square section under the conditions of anti-plane deformation is investigated. Formulas for the plastic strips lengths dependencys on the of singular term factor of elastic solution of the problem are obtained.

Keyword: rigid inclusions, interfacial cracks, plastic exfoliation.

**Постановка проблеми.** Деформування тіл з включеннями, жорсткість яких суттєво перевищує матрицю, може спричинити міжфазне розшарування як наслідок появи тріщин або пластичних деформацій на межі включення-середовище. Аналіз пружно-пластичного напружено-деформованого стану при вершинах гострокінцевих концентраторів напружень [1, 2] показує, що розвиток міжфазних пластичних смуг супроводжується поступовим ослаблення механічного зв'язку включення і матриці: що довша смуга, то слабший зв'язок на її початку. Тому внаслідок попередніх локальних розривів переміщень або пластичних зсувів у точках найвищої концентрації напружень досить імовірна поява тріщин.

**Метою даного дослідження** є вивчення початкової стадії міжфазного пластичного відшарування жорсткого волокна квадратного перерізу за наявності міжфазних тріщин при вершинах включення.

**Постановка задачі.** Нижче дослідимо пластичне відшарування при вершині жорсткого включення квадратного перерізу, з рівними міжфазними тріщинами при вершині включення (рис. 1). Розглядатимемо випадок ідеально пружно-пластичного матеріалу з зсувною границею текучості величиною  $k$ . Будемо

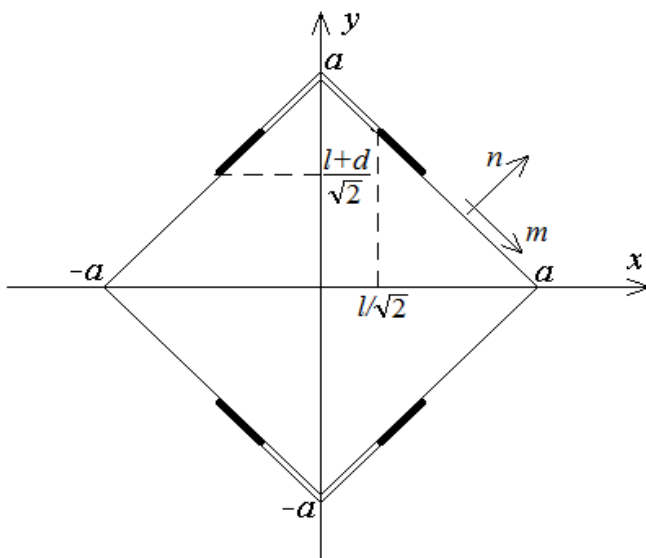


Рис. 1. Поперечний переріз тіла. Потовщені лінії – пластичні смуги

досліджувати початкову стадію відшаровування, вважатимемо, що пластичні смуги набагато менші за тріщини.

**Формалізація і розв'язок задачі.** Застосуємо для аналізу розвитку пластичних деформацій лінійну модель пластичних зон (ЛМПЗ) [3], яка використовує пружний розв'язок задачі і додатково потребує двох допоміжних розв'язків, що не містять параметрів розмірності довжини, у пружній та пружно-пластичній постановках. Згідно з ЛМПЗ пластичну зону визначають за допоміжним пружно-пластичним розв'язком, узгодженим з допоміжним пружним розв'язком, котрий узгоджено з основним пружним розв'язком.

Аналогічно, як у роботі [4] визначення пружного розв'язку зводиться до крайової задачі для аналітичної функції  $\tau^{(e)}(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$  у частині першого квадранта  $D = \{(x, y) : x > 0, y > 0, x + y > a\}$ :

$$\begin{aligned} \arg \tau(\zeta) &= -\pi/4 \quad (\zeta = x + iy, x + y = a, 0 < x < l/\sqrt{2}); \\ \arg \tau(\zeta) &= \pi/4 \quad (\zeta = x + iy, x + y = a, l/\sqrt{2} < x < a); \\ \operatorname{Re} \tau(\zeta) &= 0 \quad (\zeta = x, y > a); \quad \tau(\zeta) = \tau_\infty + o(1) \quad (\zeta \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (1)$$

Конформним образом області D у площині  $\tau$  є кут з розрізом (область G, рис. 1). Параметр  $\tau_0$ , має зміст максимального напруження  $\tau_{yz}$  на межі області D поза гранню включення.

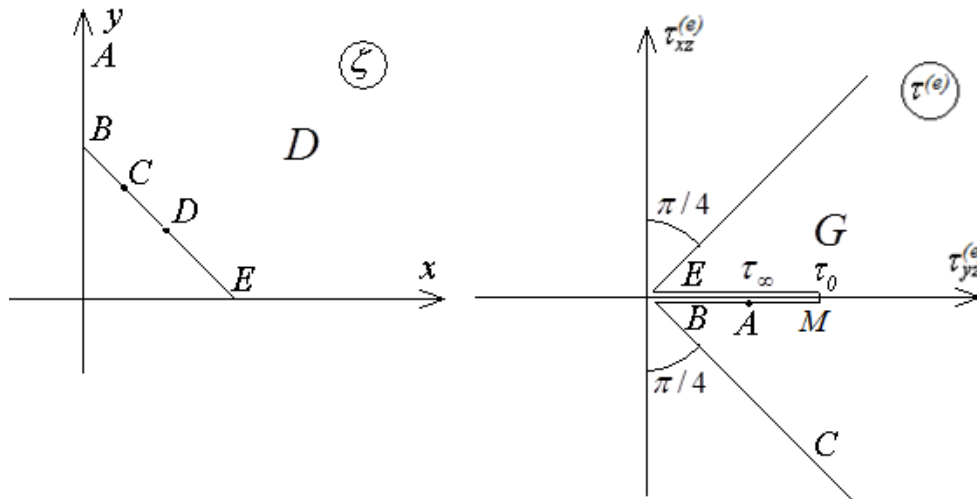


Рис. 2. Області D і G.

Розв'язання задачі (1) зводиться до побудови визначення функції  $\tau^{(e)}(\zeta)$ , можна знову звести до задачі конформного відображення області D на область G.

Скориставшись площиною допоміжного комплексного параметра область  $t$  (рис. 3) отримуємо:

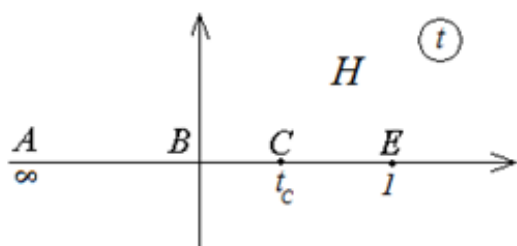


Рис. 3. Допоміжна комплексна площина  $t$

$$\tau^{(e)}(t) = \tau_\infty \tau_0 \frac{\sqrt[4]{4t(t-1)}}{\sqrt{2\tau_0^2 t - \tau_0^2 - \sqrt{\tau_0^4 - \tau_\infty^4}}},$$

$$\tau_0 = \frac{\tau_\infty}{\sqrt{2}\sqrt[4]{t_c - t_c^2}} \quad (2)$$

Функцію  $\zeta = \zeta(t)$  знайдемо за допомогою перетворення Крістоффеля-Шварца [5]:

$$\zeta = \frac{b}{B(3/4, 3/4)} \int_0^t \frac{d\eta}{\sqrt[4]{\eta(\eta-1)}}, \quad (3)$$

де  $B(x, y)$  – повна бета функція,  $B(3/4, 3/4) = 1,694$ . Під  $(t - p)^q$  ( $0 < q < 1, p$  – дійсне число) розумітимемо аналітичну у верхній півплощині  $t$  функцію, що приймає дійсні додатні значення в точках дійсної осі  $t > p$ .

Пружний розв'язок дають формули (2), (3). Її асимптотика у вершині тріщини ( $\zeta_0 = l/\sqrt{2} + i(a - l/\sqrt{2})$ ) є такою:

$$\tau^{(e)}(\zeta) = \tau_\infty \sqrt[4]{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[8]{t_c(1-t_c)}}{\sqrt{B(3/4, 3/4)}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\zeta_0 - \zeta}} + o((\zeta - \zeta_0)^{-1/2}). \quad (4)$$

Поле пружних напружень сингулярне в околі вершини міжфазної тріщини з показником  $1/2$ , як і у випадку, коли обидва її береги є вільними від напружень поверхнями середовища. Коефіцієнт сингулярного члена напружень прямує до нуля для безмежно малої тріщини, бо  $t_c \rightarrow 0$  коли  $l \rightarrow 0$ . Для гранично допустимої довжини тріщини (для  $l \rightarrow b$ ), вершини міжфазних тріщин досягають горизонтальних вершин включення, у напруження весь час залишаються нульовими, сингулярний член пружного розв'язку стає безмежно малим оскільки в цьому випадку  $t_c \rightarrow 1$ .

Допоміжними для ЛМПЗ є пружна та пружно-пластична задачі для деформівного середовища  $x + y > 0$  і жорсткого включення  $x + y < 0$ , зєднаних вздовж променя  $x + y = 0, x > 0$  за наявності півбезмежної тріщини  $x + y = 0, x < 0$  на їх спільній межі (рис. 4) в стані антиплоскої деформації, спричиненої наскіченно малими напруженнями на безмежності.

Поставимо допоміжну крайову пружно-пластичну задачу для функції напружень, яку тепер позначатимемо  $\tau_1(\zeta)$ :

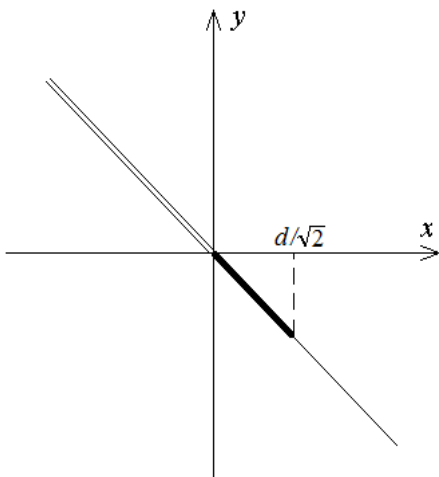


Рис. 4. Поперечний переріз тіла для допоміжної пружно-пластичної задачі

$$\arg \tau_1(\zeta) = -\pi/4 \quad (\arg \zeta = 3\pi/4, 0 < |\zeta| < +\infty);$$

$$|\tau_1(\zeta)| = k \quad (\arg \zeta = -\pi/4, 0 < |\zeta| < d);$$

$$\arg \tau_1(\zeta) = \pi/4 \quad (\arg \zeta = -\pi/4, d < |\zeta| < +\infty);$$

$$\tau_1(\zeta) = \frac{K}{\sqrt{\zeta}} e^{i\frac{\pi}{8}} + o(\zeta^{-1/2}), \zeta \rightarrow \infty, \quad (5)$$

де  $M$  – дійсна додатна константа, через яку задано величину прикладеного навантаження.

Розв'язком останньої задачі є аналітична функція, що здійснює конформне відображення круговий сектор

$$G_2 = \{\tau \mid |\tau| < k, -\pi/4 < \arg \tau < \pi/4\} \quad \text{на}$$

півплощину  $D_1 = \{\zeta \mid \operatorname{Re}((1+i)\zeta) > 0\}$  за якого

вершинам сектора  $0, k \exp(-i\pi/4), k \exp(i\pi/4)$  послідовно відповідають точки  $\infty, 0, 1+i$ .

Композицією елементарних відображень отримуємо:

$$\tau_1(\zeta) = k \frac{1-i}{2^{3/4} \sqrt{d}} \left( \sqrt{(1+i)\zeta} - \sqrt{(1+i)\zeta - d\sqrt{2}} \right), \quad d = 2\sqrt{2} \left( \frac{K}{k} \right)^2. \quad (6)$$

Допоміжний пружний розв'язок  $\tau_1^{(e)}(\zeta)$  отримаємо із допоміжного пружно-пластичного розв'язку спрямувавши границю текучості до нескінченності:

$$\tau_1^{(e)}(\zeta) = K e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\zeta}}. \quad (7)$$

Основний та допоміжний пружні розв'язки повинні бути узгодженими (асимптотично еквівалентними у вершині тріщини), що, як впливає з формул (4), (7), забезпечується рівністю:

$$K = \tau_{\infty} \sqrt[4]{2} \frac{\sqrt[8]{t_c(1-t_c)}}{\sqrt{B(3/4,3/4)}} \sqrt{a}. \quad (8)$$

Із формул (6), (8) отримуємо залежність довжини смуги пластичного відшарування від величини навантаження за ЛМПЗ:

$$d = \frac{2\sqrt{2}\tau_{\infty}^2}{k^2} \frac{\sqrt[4]{t_c(1-t_c)}}{B^2(3/4,3/4)}. \quad (9)$$

На початковій стадії розвитку міжфазна пластична смуга розвивається за квадратичним законом, аналогічно смугі на продовженні тріщини. На противагу цьому, за умови ідеального контакту включення з середовищем, на розвиток міжфазної смуги суттєво впливає величина кута  $\alpha$  при вершині включення: для малих навантажень  $d$  пропорційне  $\tau_{\infty}^{(\pi-\alpha)/(2\pi)}$  [6].

**ВИСНОВКИ:** Досліджено початкову стадію пластичного відшарування жорсткого волокна квадратного перерізу за наявності міжфазних тріщин при його вершинах. Отримано формули для залежностей довжин пластичних смуг від коефіцієнта сингулярного члена пружного розв'язку задачі. На початковій стадії розвитку міжфазна пластична смуга розвивається за квадратичним законом, аналогічно смугі на продовженні тріщини.

1. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Монографія. — Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ. – 2007. — 716 с.
2. Панасюк В.В. Концентрація напружень в трохмерних телах с тонкими включеннями / В.В. Панасюк, М.М. Стадник, В.П. Силованюк // К. Наукова думка. – 1986. – 216 с.
3. Kryven' V. A. Linear model of a plastic zone in the vicinity of a sharp notch under the conditions of longitudinal shear/ Kryven' V.A. // Materials Science. – 2004. – 40, № 4. – P. 475–483.
4. Kryven' V. A. Initial stage of plastic exfoliation of a rectangular inclusion under conditions of one-sided contact with a medium Journal of Mathematical Sciences /Kryven' V. A., Valyashek V. B. // -Vol. 171. - No. 4. - September, 2010. – P. 107–116.
5. Иванов В.И. Конформные отображения их приложения / В.И. Иванов, В.Ю. Попов // М.: Едиториал УРСС. – 2002. – 324 с.
6. Кривень В.А. Двоперіодична пружно пластична задача поздовжнього зсуву тіла з жорсткими ромбічними включеннями / Кривень В.А. // Математичні методи і фіз.- мех. поля. 2001. Т. 44, №1. – С. 109-113.

Стаття прийнята до друку 27.03.2015.