УДК 624.075: 539.3

Р. М. Тацій, О. О. Власій Є.В. Остапович
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

КОНЦЕПЦІЯ КВАЗІПОХІДНИХ ЯК ЗАСІБ ДОСЛІДЖЕННЯ ДИСКРЕТНО-НЕПЕРЕРВНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

В статті запропоновано нові апроксимаційні методи дослідження дискретно-неперервних математичних моделей, що описуються узагальненими квазідиференціальними рівняннями та системами диференціальних рівнянь першого порядку з мірами.

Ефективність запропонованих методів проілюстровано на прикладах дослідження математичних моделей задач про стійкість стрижня змінної жорсткості у випадку різних умов закріплення його кінців, а також про коливання стрижня сталого перерізу з дискретно-неперервним розподілом мас.

Ключові слова: *дискретно-неперервна модель, стрижень, зосереджена маса, критичне навантаження, частота коливань, квазідиференціальне рівняння, L-апроксимація, D-апроксимація.*

Форм. 4. Літ. 14.

Р. М. Таций, О. О. Власий Е. В. Остапович

КОНЦЕПЦИЯ КВАЗИПРОИЗВОДНЫХ КАК СРЕДСТВО ИССЛЕДОВАНИЯ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

В статье предложены новые аппроксимационные методы исследования дискретно-непрерывных математических моделей, описываемых обобщенными квазидифференциальными уравнениями и системами дифференциальных уравнений первого порядка с мерами.

Эффективность предложенных методов проиллюстрировано на примерах исследования математических моделей задач об устойчивости стержня переменной жесткости в случае различных условий закрепления его концов, а также о колебаниях стержня постоянного сечения с дискретно-непрерывным распределением масс.

Ключевые слова: *дискретно-непрерывная модель, стержень, сосредоточенная масса, максимальная нагрузка, частота колебаний, квазидифференциальное уравнение, L-аппроксимация, D-аппроксимация.*

R. Ttasij, O. Vlasij E. Ostapovich

KVAZIDERIVATIVES CONCEPTION AS A MEANS OF RESEARCHING DISCRETE-CONTINUOUS MATHEMATICAL MODELS

The new approximate methods of researching discrete-continuous mathematical models that are represented by kvazidifferential equations and first-order systems of differential equations with measures are considered. Conditions of effective using each of the methods are given.

The effectiveness of the proposed methods is illustrated by examples of research of mathematical models of problems of stability of variable stiffness of the rod in the case of different conditions fix it all, as well as the vibrations of a rod of constant cross section with discrete-continuous distribution of masses.

The numerical results of computation of oscillation eigen frequencies and forms for the considered mechanical system are obtained.

Keywords: *discrete-continuous model, a rod, concentrated mass, oscillation frequency, quazi-differential equation, L-approximation, D-approximation.*

Вступ. Питання дослідження реальних фізичних процесів та явищ дискретно-неперервної природи вимагає створення адекватних математичних моделей [2]-[5]. Такі моделі описуються здебільшого диференціальними рівняннями з узагальненими рівняннями в коефіцієнтах [6]-[8]. Математичний апарат теорії узагальнених функцій широко застосовується у задачах будівельної механіки, теплотехніки, квантової механіки і т.п. для описання точкових зарядів і мас, точкових джерел тепла, зосереджених мас та моментів за допомогою дельта-функції Дірака та одиничної функції Хевісайда [9], [14]. Однак при моделюванні дискретно-неперервних процесів часто виникають диференціальні рівняння, які є некоректними з точки зору класичної теорії звичайних диференціальних рівнянь, оскільки містять в доданках добутки розривних функцій на узагальнені. Такі рівняння містять доданки виду $\left(p(x)y^{(m)}\right)^{(m)}$, які навіть при недостатній гладкості коефіцієнта $p(x)$ (тим паче при його сингулярності) не можна розкривати шляхом n-кратного «класичного» диференціювання. Рівняння такого виду прийнято називати *квазідиференціальним*. Суттєвим поштовхом у їх вивченні став розвиток теорії квазіпохідних [11], завдяки якій дослідження квазідиференціальних рівнянь шляхом введення специфічних квазіпохідних зводиться до дослідження коректних узагальнених систем диференціальних рівнянь першого порядку. Питання побудови точних аналітичних розв’язків квазідиференціальних рівнянь вивчалося в [1], [12]. Однак недостатньо вивченою при цьому залишалася проблема розробки нових та вдосконалення існуючих чисельних методів розв’язання КДР довільного порядку. В даній статті розглядаються нові методи знаходження наближених розв’язків квазідиференціальних рівнянь, що моделюють фізичні процеси та явища дискретно-неперервного характеру. Застосування наведених теоретичних результатів проілюстровано на модельних прикладах.

Позначення: $I=[a;b]$ – відрізок дійсної осі; $\mathbf{R}^{p\times p}$ – простір дійсних $(p\times p)$-матриць; $\mathbf{R}^{p\times 1}=\mathbf{R}^{p}$; $BV^{+}(I)$ – простір неперервних справа функцій обмеженої на I варіації; $C_{p\times p}(I)$ – простори матричних функцій $A: I\to\mathbf{R}^{p\times p}$, елементи яких є неперервними функціями на I; $C_{p\times 1}(I)=C_{p}(I)$; $BV^{+}_{\mathrm{p\times p}}[a;b]$ – простір матриць-функцій $A: I\to\mathbf{C}^{p\times q}$, усі компоненти яких належать простору $BV^{+}(I)$; з нормою $\|A\|=|A(a)|+\bigvee_{a}^{b}(A)$; $BV^{+}_{\mathrm{p\times 1}}[a;b]=BV^{+}_{\mathrm{p}}[a;b]$; $A_{\nu}(x)$ рівномірно прямує до $A(x)$ на $[a;b]$, причому рівномірна збіжність послідовності матриць-функцій $\{A_{\nu}(x)\}_{\nu=1}^{\infty}$ означає, що $\lim\limits_{\nu\to\infty}\sup\limits_{x\in[a;b]}|A(x)-A_{\nu}(x)|=0$; $\delta_{k}=\delta_{k}(x)=\delta(x-x_{k})$ – функція Дірака з носієм у точці x_{k}; $\Delta f(x)=f(x+0)-f(x)$ – стрибок функції з простору $BV^{+}(I)$ в точці $x\in I$; $\Theta_{k}=\Theta_{k}(x)$ – характеристична функція інтервалу $[x_{k};x_{k+1})$, тобто $\Theta_{k}(x)=\begin{cases}1, x\in[x_{k};x_{k+1})\\ 0, x\notin[x_{k};x_{k+1})\end{cases}$ при $x\in I$; $\omega_{N}=\{a\equiv x_{0}<x_{1}<\ldots<x_{n-1}<x_{N}\equiv b\}$ – розбиття відрізка $[a;b]$; $\overline{k,l}$ – множина цілих чисел від k до l.

Загальна постановка задачі та методика розрахунку.

Розглянемо квазідиференціальне рівняння (КДР)

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\left(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\right)^{(m-j)}=\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r+1}f_{r}^{(r+1)}(x), \tag{1}$$

коефіцієнти якого задовольняють наступні умови:

1) $a_{00}^{-1}(x)$ – обмежена і вимірна на I функція;

2) $a_{i0}(x), a_{0j}(x)\in L^{2}(I), i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}$;

3) $a_{ij}(x)=b_{ij}'(x)$, де $b(x)\in BV^{+}(I),\ i=\overline{1,n},\ \ j=\overline{1,m}.$

4) $f_{r}(x)\in BV^{+}(I)$, $r=\overline{0,m-1}.$

Це рівняння є математичною моделлю багатьох фізичних процесів та явищ дискретно-неперервного характеру. Наприклад, при $n=m=1$ ним описуються поздовжні і крутильні коливання стрижнів та поперечні коливання струн з насадженими точковими масами і узагальненими зовнішніми навантаженнями. А також рівняння (1) за вказаних n та m описує поширення тепла у багатошарових тілах з наявністю внутрішніх точкових джерел тепла. При $n=m=2$ рівняння (1) є математичною моделлю поперечних коливань стрижнів з дискретно-неперервним розподілом маси та навантажень. Можливість побудови аналітичних розв’язків рівнянь такого виду досліджено в [1], [12], проте проблема знаходження наближених розв’язків початкових та крайових задач для рівнянь виду (1) залишається вивченою не в повній мірі. Тому актуальним науково-практичним завданням є розробка методів знаходження наближених розв’язків квазідиференціальних рівнянь виду

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\left(a_{ij}(x)y^{(n-i)}\right)^{(m-j)}=\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r+1}f_{r}^{(r+1)}(x), \quad (1).$$

Для КДР (1) введемо квазіпохідні наступним чином (з точністю до знака):

$$y^{[i]}=y^{(i)},i=\overline{0,n-1};y^{[n]}=\sum_{i=0}^{n}a_{i0}(x)y^{(n-i)};$$
$$y^{[n+j]}=-\left(y^{[n+j-1]}\right)'+\sum_{i=0}^{n}a_{ij}(x)y^{(n-i)}+f'_{m-j}(x),\ j=\overline{1,m}. \tag{2}$$

Тоді початкова задача для КДР (1) ставиться у термінах квазіпохідних:

$$y^{[i]}(a)=y_0^{[i]},i=\overline{0,q-1},\ \ q=n+m. \tag{3}$$

За допомогою вектора $Y=\left(y,y^{[1]},\dots,y^{[q-1]}\right)^{\mathrm{T}}$ задача (1), (2) зводиться до початкової задачі для узагальненої системи диференціальних рівнянь першого порядку:

$$Y'=C'(x)Y+F'(x), \tag{4}$$

$$Y(a)=Y_0, \tag{5}$$

де $Y(x)$ – невідома q-вимірна вектор-функція, $C\in BV^{+}_{q\times q}[a;b]$, $F\in BV^{+}_{\mathrm{q}}[a;b]$, а диференціювання і рівність розуміються в узагальненому сенсі.

Неважко переконатися, що при такому введенні квазіпохідних для системи (4) будуть виконуватися умови коректності [10, §7]:

$$\forall x\in[a;b]\quad \left[\Delta C(x)\right]^2=0,\ \Delta C(x)\Delta F(x)=0.$$

Таким чином, вивчення КДР виду (1) зводиться до дослідження систем виду (4).

Позначимо ω^* – впорядковану множину всіх точок – носіїв узагальнених коефіцієнтів КДР (1). На відрізку I введемо розбиття $\omega_\nu=\left\{a\equiv x_0<x_1<\ldots<x_{\nu-1}<x_\nu\equiv b\right\}$ так, щоб $\omega^*\subset\omega_\nu$.

Нехай в результаті деякої апроксимації коефіцієнтів рівняння (1) отримане рівняння

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\left(\overset{\nu}{a_{ij}}(x)y_\nu^{(n-i)}\right)^{(m-j)}=\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^{r+1}\left(f_r^{\nu}\right)^{(r+1)}(x) \tag{6}$$

з коефіцієнтами з простору $BV^{+}(I)$.

Для цього рівняння початкові умови поставимо у відповідності до умов (2):

$$y_\nu^{[i]}(x_0)=y_0^{[i]},i=\overline{0,q-1}. \tag{7}$$

Квазіпохідні $y_\nu^{[i]},i=\overline{0,q-1}$, вводимо за формулами, аналогічними (3). За допомогою вектора $Y_\nu=\left(y_\nu,y_\nu^{[1]},\dots,y_\nu^{[q-1]}\right)^{\mathrm{T}}$ задачу (6), (7) зводимо до задачі виду (4), (5):

$$Y_\nu'=C_\nu'(x)Y_\nu(x)+F_\nu'(x), \tag{8}$$

$$Y_\nu(x_0)=Y_0. \tag{9}$$

Теорема 1. [9, с. 250] Нехай для матриць $C(x)=\left(c_{ij}(x)\right)_{i,j=1}^{q}$, $C_\nu(x)=\left(\overset{\nu}{c_{ij}}(x)\right)_{i,j=1}^{q}$ коефіцієнтів систем (4) і (8) відповідно, та для векторів – правих частин цих систем $F(x)=\left(f_1(x),f_2(x),\dots,f_q(x)\right)^{\mathrm{T}}$ і $F_\nu(x)=\left(\overset{\nu}{f_1}(x),\overset{\nu}{f_2}(x),\dots,f_q^{\nu}(x)\right)^{\mathrm{T}}$ справджуються такі умови:

1) для кожного фіксованого ν і довільного $x\in[a;b]$: $\left[\Delta C_\nu(x)\right]^2=0,\ \Delta C_\nu(x)\Delta F_\nu(x)=0$;

2) для кожного фіксованого ν і довільного $x\in[a;b]$

$$\Delta C_\nu(x)\Delta C(x)=0,\ \Delta C_\nu(x)\Delta F(x)=0;$$

3) $f_j^{\nu}(x)$ рівномірно прямує до $f_j(x)$ на $[a;b]$ для $j=\overline{1,q}$;

4) $c_{ij}^{\nu}(x)$ рівномірно прямує до $c_{ij}(x)$ на $[a;b]$ для $i,j=\overline{1,q}$;

5) для кожного фіксованого ν $\bigvee_a^b\left(C_\nu\right)\le V=const$,

тоді $Y_\nu(x)$ рівномірно прямує до $Y(x)$ на $[a;b]$, де $Y_\nu(x)$ і $Y(x)$ – розв'язки апроксимованої (8),

(9) та вихідної (4), (5) задач відповідно.

Як наслідок з цієї теореми отримаємо рівномірну збіжність не тільки розв'язку $y_\nu(x)$ задачі (6), (7), але й всіх його квазпохідних $y_\nu^{[i]}(x), i=\overline{1,q-1}$, до розв'язку $y(x)$ вихідної задачі (1), (2) та його відповідних квазіпохідних $y^{[i]}(x), i=\overline{1,q-1}$.

Розглянемо практично важливі способи апроксимацій функцій.

Нехай функція $f(x)$ – міра на відрізку $[a;b]$, тобто $f(x)=\varphi'(x)$, де $\varphi(x)\in BV^{+}[a;b]$. Функцію $\varphi(x)$ можна представити у формі Жордана як суму функцій $\varphi(x)=\tilde{\varphi}(x)+\overline{\varphi}(x)$, де $\tilde{\varphi}(x)$ – неперервна складова функції $\varphi(x)$, а $\overline{\varphi}(x)$ – її дискретна складова (функція стрибків). Зауважимо, що $\Delta\varphi(x_k)=\Delta\overline{\varphi}(x_k)$. Виберемо довільне розбиття ω_ν відрізка $[a;b]$. На кожному проміжку $\left[x_k;x_{k+1}\right)$ до $\tilde{\varphi}(x)$ застосуємо ліанеризацію:

$$\tilde{\varphi}(x)\approx\tilde{\varphi}_\nu^k(x)=\frac{\tilde{\varphi}(x_{k+1})-\tilde{\varphi}(x_k)}{x_{k+1}-x_k}x+\tilde{\varphi}(x_k),\ k=\overline{0,\nu-1}.$$

Таким чином на всьому відрізку $[a;b]$ $\tilde{\varphi}(x)$ апроксимується кусково-лінійною функцією (яка буде неперервною)

$$\tilde{\varphi}(x)\approx\tilde{\varphi}_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\nu-1}\tilde{\varphi}_\nu^k(x)\Theta_k(x).$$

Тоді $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ апроксимується кусково-сталою функцією:

$$f(x)\approx f_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{\tilde{\varphi}(x_{k+1})-\tilde{\varphi}(x_k)}{x_{k+1}-x_k}\Theta_k+\sum_{k=0}^{\nu}\Delta\overline{\varphi}(x_k)\delta_k.$$

Таку апроксимацію функції $f(x)$ називатимемо ***L-апроксимацією.*** Зауважимо, що в результаті L-апроксимації коефіцієнтів КДР (1) отримаємо наближене частково вироджене узагальнене КДР [12], визначальне рівняння якого буде рівнянням зі сталими коефіцієнтами.

Розглянемо ще одну апроксимацію функції $f(x)$. На кожному проміжку $\left[x_k;x_{k+1}\right)$ до $\tilde{\varphi}(x)$ застосуємо дискретизацію: $\breve{\varphi}(x)\approx\breve{\varphi}_\nu^k=\breve{\varphi}(x_k), k=\overline{0,\nu-1}.$ Тоді на всьому відрізку $[a;b]$ маємо

$$\breve{\varphi}(x)\approx\breve{\varphi}_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\nu-1}\breve{\varphi}_\nu^k\Theta_k(x).$$

Відтак функція $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ апроксимується наступним чином:

$$f(x)\approx f_\nu(x)=\sum_{k=1}^{\nu}\left[\left(\breve{\varphi}_\nu^k-\breve{\varphi}_\nu^{k-1}\right)+\Delta\varphi^*(x_k)\right]\delta_k(x),$$

де $\Delta\varphi^*(x_k)=\begin{cases}\Delta\overline{\varphi}(x_k), x_k\in\omega^*;\\ 0, x_k\notin\omega^*.\end{cases}$

Таку апроксимацію функції називатимемо ***D-апроксимацією.***

Зауважимо, що внаслідок D-апроксимації коефіцієнтів КДР (1) можна отримати некоректне КДР. А тому апроксимацію цього виду слід застосовувати тільки до таких коефіцієнтів $a_{ij}(x)$, для яких $i\cdot j\neq 0$, а до всіх інших коефіцієнтів можна застосовувати L-апроксимацію.

Задача про втрату стійкості стрижня змінної жорсткості. Математичне моделювання згину стрижня довжиною π змінної жорсткості $g(x)=\dfrac{1}{1+\sin x}$ приводить до диференціального рівняння

$$\left(\frac{1}{1+\sin x}y''\right)''+\lambda y''=0. \qquad (10)$$

Рівняння (10) розглядатимемо як КДР. Введемо квазіпохідні за формулами (3):

$$y^{[1]} = y', y^{[2]} = \frac{1}{1+\sin x} y'', y^{[3]} = \left(y^{[2]}\right)' + \lambda y'. \tag{11}$$

Тоді за допомогою вектора $Y = \left(y, y^{[1]}, y^{[2]}\right)^{\mathrm{T}}$ КДР (10) зводиться до наступної системи диференціальних рівнянь:

$$Y'_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sin x & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_\nu \tag{12}$$

Будемо розглядати стрижень з наступними типами закріплення його кінців:

I) шарнірне-шарнірне:

$$y(0) = y^{[2]}(0) = y(\pi) = y^{[2]}(\pi) = 0, \tag{13}$$

II) жорстке-жорстке:

$$y(0) = y'(0) = y(\pi) = y'(\pi) = 0; \tag{14}$$

III) жорстке-вільне:

$$y(0) = y'(0) = y^{[2]}(\pi) = y^{[3]}(\pi) = 0; \tag{15}$$

IV) жорстке-шарнірне:

$$y(0) = y'(0) = y(\pi) = y^{[2]}(\pi) = 0. \tag{16}$$

Зауважимо, що найменше власне значення λ задачі (10), (13) (чи задач із граничними умовами (14)-(16)) і є критичне навантаження ($\lambda_1 = \lambda_{кр}$), за якого стрижень втрачає стійкість (за Ейлером [4]).

Перепишемо рівняння (10) у вигляді

$$\left(\frac{1}{1+\sin x} y''\right)'' + \lambda\left(y'\right)' = 0$$

і застосуємо D-апроксимацію до коефіцієнта при y', тобто до функції $b(x) \equiv 1$. На відрізку $[0;\pi]$ введемо розбиття $\omega_\nu = \left\{0 \equiv x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_\nu \equiv \pi\right\}$. На кожному з інтервалів $\left[x_k; x_{k+1}\right)$ апроксимуємо функцію $\beta(x) = \int_0^x b(t)dt = \int_0^x 1dt = x$ наступним чином:

$$\beta(x) \approx \beta_\nu^k = \beta_\nu(x_k) = x_k, x \in \left[x_k; x_{k+1}\right).$$

Тоді на всьому відрізку $\left[0;\pi\right]$ $\beta(x) \approx \beta_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \beta_\nu^k \theta_k(x)$ і відповідна апроксимація $b(x)$:

$$b(x) \approx b_\nu(x) = \sum_{k=1}^{\nu}\left(\underset{\nu}{b^k} - \underset{\nu}{b^{k-1}}\right)\delta_k = \sum_{k=1}^{\nu}\left(x_{k+1} - x_k\right)\delta_k, x \in \left[0;\pi\right].$$

Не зменшуючи загальності, вважатимемо сітку ω_ν рівномірною, тобто $x_{k+1} - x_k = h$ для $k = \overline{0, \nu-1}$. Тоді отримаємо:

$$b(x) \approx b_\nu(x) = \sum_{k=1}^{\nu} h\delta_k(x), x \in \left[0;\pi\right]$$

Отже, наближене до КДР (10) рівняння має вигляд

$$\left(\frac{1}{1+\sin x} y_\nu''\right)'' + \lambda\left(h\sum_{k=1}^{\nu}\delta_k(x) y_\nu'\right)' = 0. \tag{17}$$

Для цього КДР введемо квазіпохідні згідно з формулами (11):

$$y_\nu^{[1]} = y_\nu', y_\nu^{[2]} = \frac{1}{1+\sin x} y_\nu'', y_\nu^{[3]} = \left(y_\nu^{[2]}\right)' - \lambda\sum_{k=1}^{\nu} h\delta_k y_\nu'. \tag{18}$$

За допомогою вектора $Y_\nu = \left(y_\nu, y_\nu^{[1]}, y_\nu^{[2]}\right)^{\mathrm{T}}$ зведемо КДР (17) до узагальненої системи диференціальних рівнянь

$$Y'_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\sin x & 0 \\ 0 & -\lambda\sum\limits_{k=1}^{\nu} h\delta_k(x) & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_\nu , \qquad (19)$$

яка є наближеною до системи (12). Очевидно, що дана система є коректною. Визначальним рівнянням [13, с. 197] для КДР (17) є вироджене КДР $\left(\dfrac{1}{1+\sin x} y''_\nu\right)'' = 0$, квазіпохідні для якого вводяться відповідно до формул (18). Тоді функція Коші (в сенсі концепції квазіпохідних) має вигляд [12]:

$$\tilde{K}(x,s) = \int\limits_s^x \left(1+\sin t\right)(x-t)(t-s)dt .$$

Враховуючи структуру фундаментальної матриці [13], запишемо фундаментальну матрицю визначальної системи, що відповідає системі (19):

$$\tilde{B}(x,s) = \begin{pmatrix} 1 & x-s & \int\limits_s^x \left(1+\sin t\right)(x-t)dt & \int\limits_s^x \left(1+\sin t\right)(x-t)(t-s)dt \\ 0 & 1 & \int\limits_s^x \left(1+\sin t\right)dt & \int\limits_s^x \left(1+\sin t\right)(t-s)dt \\ 0 & 0 & 1 & x-s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Запишемо стрибок $\Delta C(x_k)$ матриці – коефіцієнта системи (19) в точці x_k:

$$\Delta C\left(x_k\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, k = \overline{1,\nu}.$$

Для знаходження значення $Y_\nu(\pi,\lambda)$ скористаємося двоточковою формулою [13]

$$Y_\nu(x_{k+1}) = \tilde{C}_{k+1}(\lambda)\tilde{B}\left(x_{k+1}, x_k\right)Y_\nu(x_k), k = \overline{0,\nu-1}, \qquad (20)$$

де $\tilde{C}_{k+1}(\lambda) = E + \Delta C(x_{k+1},\lambda)$, E - одинична матриця.

За початковий вектор Y_0, який задовольнятиме умовам $y(0) = y^{[2]}(0) = 0$, виберемо вектор, який складається з двох лінійно-незалежних стовців:

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи (20), тепер знайдемо формулу для обчислення λ. Елементи вектора $Y(\pi)$ повинні задовольняти умови на правому кінці стрижня $y(\pi) = y^{[2]}(\pi) = 0$, що приводить до рівняння

$$\begin{vmatrix} y_1(\lambda) & y_2(\lambda) \\ y_1^{[2]}(\lambda) & y_2^{[2]}(\lambda) \end{vmatrix} = 0, \qquad (21)$$

яке і є характеристичним рівнянням для визначення параметра λ. Для розв'язання рівняння (21) було використано метод відокремлення коренів з подальшим їх уточненням методом половинного поділу.

Для задач типу II-IV початковий вектор слід брати $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, а характеристичні рівняння для визначення параметра λ згідно умов на правому кінці стрижня матимуть вигляд (21) для закріплень типу IV, а для закріплень типу II і III – наступний вигляд :

$$\begin{vmatrix} y_1(\lambda) & y_2(\lambda) \\ y_1^{[1]}(\lambda) & y_2^{[1]}(\lambda) \end{vmatrix} = 0 .$$

Зауважимо, що тільки у випадку стрижня із шарнірно закріпленими кінцями вихідна задача зводиться до задачі для рівняння другого порядку:

$$y'' + \lambda(1+\sin x)y = 0 , \tag{22}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0 \tag{23}$$

Задача (22), (23) досліджувалася багатьма авторами ([4, с. 430]), а тому її можна вважати модельною (а відповідно і задачу (10), (13)). В таблиці 1 для порівняння наведене перше власне значення задачі (22), (23), отримане різними методами, відомими в літературі, і обчислене методом D-апроксимації. У таблиці 2 наведене перше власне значення граничних задач для рівняння (10) з умовами (13)-(16), тобто значення критичного навантаження стрижня за різних умов закріплення його кінців.

Таблиця 1.

Критичне навантаження шарнірно закріпленого стрижня

Метод	λ
МПН	$0.53880 < \lambda < 0.54088$
МПЗ	0.53940
МР	0.54088
МФ	0.54031
D-апроксимації	0.5403188

де МПН – метод послідовних наближень [5], МПЗ – метод проміжних задач [7], МР – метод Рітца [7], МФ – метод Фікера [8].

Таблиця 2.

Критичне навантаження стрижня

Тип закріплення кінців стрижня	Критичне навантаження
жорстке-жорстке	2.577213
шарнір-шарнір	0.540319
жорстке-вільне	0.152306
жорстке-шарнір	1.241990

Розв’яжемо задачу (10), (13) з використанням методу L-апроксимації, вірніше поєднанням методів D- та L-апроксимації. До коефіцієнта $b(x)\equiv 1$ застосуємо метод D-апроксимації, як було описано вище, а до коефіцієнта $g(x)=\dfrac{1}{1+\sin x}$ застосуємо L-апроксимацію. В такому випадку на інтервалі $\left[x_k;x_{k+1}\right)$ наближаємо $\alpha(x)$ відрізком

$$\alpha(x)\approx \alpha_{\nu}^{k}(x)=\frac{1}{h}\left(\frac{2}{1+tg\,\frac{x_k}{2}}-\frac{2}{1+tg\,\frac{x_{k+1}}{2}}\right)+\frac{tg\,\frac{x_k}{2}}{1+tg\,\frac{x_k}{2}}.$$

На всьому відрізку $\left[0;\pi\right]$ маємо таку апроксимацію:

$$g(x)\approx a_{\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\nu-1}\alpha_{\nu}^{k}\Theta_k(x),\ x\in\left[0;\pi\right],$$

$$\text{де } \alpha_{\nu}^{k}=\frac{2}{h}\left(\frac{1}{1+tg\,\frac{x_k}{2}}.-\frac{1}{1+tg\,\frac{x_{k+1}}{2}}\right).$$

Запишемо тепер наближене до КДР (10) рівняння:

$$\left(\sum_{k=0}^{\nu-1}\alpha_{\nu}^{k}\Theta_k(x)y_{\nu}''\right)''+\lambda\left(h\sum_{k=1}^{\nu}\delta_k(x)y_{\nu}'\right)'=0. \tag{24}$$

Для цього КДР введемо квазіпохідні за формулами (18) і після зведення до системи отримаємо відповідну коректну узагальнену систему диференціальних рівнянь

$$Y_{\nu}'=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \sum\limits_{k=0}^{\nu-1}\alpha_{\nu}^{k}\Theta_k(x) & 0\\ 0 & -\lambda\sum\limits_{k=1}^{\nu}h\delta_k(x) & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}Y_{\nu}. \tag{25}$$

Стрибок матриці – коефіцієнта цієї системи буде обчислюватися, як і в попередньому випадку. Визначальним рівнянням, відповідним КДР (24), є вироджене КДР

$$\left(\sum_{k=0}^{\nu-1}\alpha_{\nu}^{k}\Theta_k(x)y_{\nu}''\right)''=0,$$

функція Коші якого на кожному інтервалі $\left[x_k;x_{k+1}\right)$ має вигляд $K(x,s)=\dfrac{1}{\alpha_{\nu}^{k}}\dfrac{(x-s)^3}{6}$.

Тоді фундаментальна матриця визначальної системи, що відповідає системі (25), на кожному інтервалі $\left[x_k;x_{k+1}\right)$ обчислюється за формулою

$$B(x,s)=\begin{pmatrix}1 & x-s & \frac{1}{\alpha_{\nu}^{k}}\frac{(x-s)^2}{2} & \frac{1}{\alpha_{\nu}^{k}}\frac{(x-s)^3}{6}\\ 0 & 1 & \frac{1}{\alpha_{\nu}^{k}}(x-s) & \frac{1}{\alpha_{\nu}^{k}}\frac{(x-s)^2}{2}\\ 0 & 0 & 1 & x-s\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Використовуючи двоточкову формулу (20) для розв’язку системи (25), як і вище, будуємо характеристичне рівняння і знаходимо перше власне значення задачі (10), (13). При однаковій точності розрахунків у випадку поєднання D- та L- апроксимацій отримано те саме значення критичного навантаження, що і при використанні тільки D-апроксимації. Однак використання L-апроксимації значно спростило математичне розв'язання задачі, а також значно збільшило швидкість чисельних рорзахунків.

Коливання стрижня з неперервно розподіленою масою та насадженими дисками. Розглянемо консольний стрижень довжиною l сталого перерізу, який крім неперервно розподіленої маси, містить зосереджені у точках $x_k \in [0;l], k=\overline{1,n},$ диски масами M_k і радіусами R_k [9] (рис. 1.).

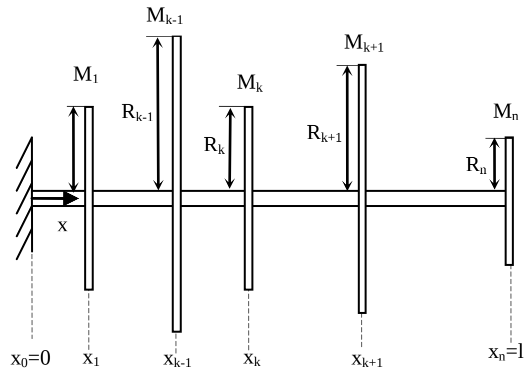

Рис.1 **Консольний стрижень з насадженими дисками**

Для знаходження власних частот коливань стрижня потрібно дослідити наступну математичну модель:

$$y^{IV} - \omega^2 \left(-\left(\sum_{k=1}^{n} M_k R_k^2 \delta_k y' \right)' + \left(1 + \sum_{k=1}^{n} M_k \delta_k \right) y \right) = 0 \tag{26}$$

$$y(0) = y^{[1]}(0) = y^{[2]}(1) = y^{[3]}(1) = 0. \tag{27}$$

Власні значення ω_j задачі (26), (27) і будуть частотами коливань заданого стрижня.

Введемо квазіпохідні

$$y^{[1]} = y', \ y^{[2]} = y'', \ y^{[3]} = y''' + \omega^2 \sum_{k=1}^{n} M_k R_k^2 \delta_k y'. \tag{28}$$

За допомогою вектора $Y_\nu = \left(y_\nu, y_\nu^{[1]}, y_\nu^{[2]} \right)^{\mathrm{T}}$ зводимо задачу (26), (27) до наступної граничної задачі для узагальненої системи:

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \sum_{k=1}^{n} M_k R_k^2 \delta_k & 0 & 1 \\ \omega^2 \left(1 + \sum_{k=1}^{n} M_k \delta_k \right) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y, \tag{29}$$

$$PY(0) = QY(l), \tag{30}$$

де $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Визначальною для (29) є система

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y, \tag{31}$$

якій відповідає визначальне рівняння

$$y^{IV} - \omega^2 y = 0. \tag{32}$$

Зауважимо, що для визначального рівняння квазіпохідні $y^{[i]}, i = 1,2,3,$ що відповідають формулам (28), співпадатимуть зі звичайними похідними y', y'', y''' відповідно. Неважко переконатися, що функція Коші рівняння (32) обчислюється за формулою

$$\tilde{K}(x,s) = \frac{\mathrm{sh}\sqrt{\omega}(x-s) - \sin\sqrt{\omega}(x-s)}{2\omega\sqrt{\omega}}.$$

Враховуючи структуру фундаментальної матриці, побудуємо фундаментальну матрицю $\tilde{B}(x,s) = \left(\tilde{b}_{ij}(x,s)\right)_{i,j=1}^{4}$ визначальної системи [13]. Опишемо її елементи:

$$\tilde{b}_{14} = \frac{1}{2\omega\sqrt{\omega}}\left(\mathrm{sh}\sqrt{\omega}(x-s) - \sin\sqrt{\omega}(x-s)\right), \tilde{b}_{24} = \frac{1}{2\omega}\left(\mathrm{ch}\sqrt{\omega}(x-s) - \cos\sqrt{\omega}(x-s)\right),$$

$$\tilde{b}_{34} = \frac{1}{2\sqrt{\omega}}\left(\mathrm{sh}\sqrt{\omega}(x-s) - \sin\sqrt{\omega}(x-s)\right), \tilde{b}_{44} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}\sqrt{\omega}(x-s) + \cos\sqrt{\omega}(x-s)\right),$$

$$\tilde{b}_{13} = \frac{1}{2\omega}\left(\mathrm{ch}\sqrt{\omega}(x-s) - \cos\sqrt{\omega}(x-s)\right),\ \tilde{b}_{12} = \frac{1}{2\sqrt{\omega}}\left(\mathrm{sh}\sqrt{\omega}(x-s) + \sin\sqrt{\omega}(x-s)\right),$$

$$\tilde{b}_{11} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}\sqrt{\omega}(x-s) + \cos\sqrt{\omega}(x-s)\right),\ \tilde{b}_{21} = \frac{\sqrt{\omega}}{2}\left(\mathrm{sh}\sqrt{\omega}(x-s) - \sin\sqrt{\omega}(x-s)\right),$$

$$\tilde{b}_{22} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}\sqrt{\omega}(x-s) + \cos\sqrt{\omega}(x-s)\right),\ \tilde{b}_{23} = \frac{1}{2\sqrt{\omega}}\left(\mathrm{sh}(x-s) + \sin\sqrt{\omega}(x-s)\right),$$

$$\tilde{b}_{31} = \frac{\omega}{2}\left(\mathrm{ch}\sqrt{\omega}(x-s) - \cos\sqrt{\omega}(x-s)\right), \tilde{b}_{32} = \frac{\sqrt{\omega}}{2}\left(\mathrm{sh}\sqrt{\omega}(x-s) - \sin\sqrt{\omega}(x-s)\right),$$

$$\tilde{b}_{33} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}\sqrt{\omega}(x-s) + \cos\sqrt{\omega}(x-s)\right), \tilde{b}_{41} = \frac{\omega\sqrt{\omega}}{2}\left(\mathrm{sh}\sqrt{\omega}(x-s) + \sin\sqrt{\omega}(x-s)\right)$$

$$\tilde{b}_{42} = \frac{\omega}{2}\left(\mathrm{ch}\sqrt{\omega}(x-s) - \cos\sqrt{\omega}(x-s)\right), \tilde{b}_{43} = \frac{\sqrt{\omega}}{2}\left(\mathrm{sh}\sqrt{\omega}(x-s) - \sin\sqrt{\omega}(x-s)\right).$$

Стрибок матриці – коефіцієнта системи (29) обчислюється за формулою

$$\Delta C\left(x_k\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega^2 M_k R_k^2 & 0 & 0 \\ \omega^2 M_k & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, k = \overline{1,n}.$$

Щоб скористатися двоточковою формулою (20), виберемо за початковий такий вектор із двох лінійно незалежних стовпців, які б задовольняли умови на лівому кінці стрижня, тобто умови $y(0) = y^{[1]}(0)$:

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайшовши за формулою (20) $Y(l)$, побудуємо характеристичне рівняння, враховуючи умови на правому кінці стрижня $y^{[2]}(1) = y^{[3]}(1) = 0$: $\begin{vmatrix} y_1^{[2]}(\omega) & y_2^{[2]}(\omega) \\ y_1^{[3]}(\omega) & y_2^{[3]}(\omega) \end{vmatrix} = 0$.

Зауважимо, що отримане характеристичне рівняння для визначення параметра ω є точним.

Розв'яжемо поставлену задачу для прикладу у безрозмірних величинах $l = 1$, $M_k = 0.25$, $R_k = 0.2$. Підкреслимо, що точки зосередження мас можуть бути вибрані довільно, а не обов'язково рівновіддалено. Наприклад, виберемо точку зосередженої маси $x_1 = \frac{1}{2}$ і обчислимо власні значення для різних мас. Результати наведені у таблиці 3.

Таблиця 3

Випадок однієї зосередженої маси

M	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
0.25	3.24934	18.07786	36.78330	98.53158
1	2.70124	13.25672	22.45102	91.05535
5	1.64907	7.12760	15.88739	88.96431

Розраховані також випадки двох зосереджених мас $M_k = 0.25$ в точках $x_2 = \frac{1}{4}$ та $x_4 = \frac{3}{4}$ – частота коливань ω_1 = 2.83664, а у випадку трьох аналогічних зосереджених мас в точках $x_2 = \frac{1}{4}$, $x_3 = \frac{1}{2}$ та $x_4 = \frac{3}{4}$ $-\omega_1$ = 2.68578. На рис. 2 зображені форми власних коливань стрижня у випадку однієї зосередженої маси $M = 0.25$.

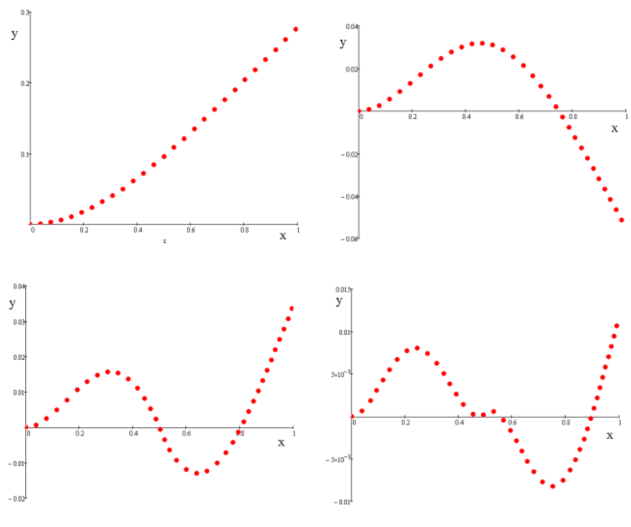

Рис. 2. **Форми власних коливань стрижня**

Для розв'язання поставлених задач створені пакети програм в інтегрованій системі програмування Mathcad v 15.0 M005, яка є безкоштовною для академічного використання.

Всі розрахунки виконані з точністю 10^{-8}.

Висновки. Запропоновано нові методи знаходження точних та наближених розв'язків граничних задач для узагальнених квазідиференціальних рівнянь. Дослідження таких задач є актуальним, оскільки саме до рівнянь такого виду приводить математичне моделювання фізичних процесів та явищ дискретно-неперервної природи. На прикладі задачі про втрату стійкості стрижня змінної жорсткості за різних умов закріплення його кінців проілюстровано застосування чисельних методів розв'язання КДР – методу D- та L-апроксимації. Також на прикладі задачі про коливання стрижня з насадженими дисками показана точна побудова характеристичного рівняння для визначення частот коливань і побудовані форми власних коливань стрижня, що відповідають першим чотирьом власним частотам. Проведено числовий аналіз отриманих результатів, який свідчить про ефективність обраного методу.

1. Власій О. О. Структура розв'язків узагальнених систем з кусково-змінними коефіцієнтами / О. О. Власій, М. Ф. Стасюк, Р. М. Тацій // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2009. – №.660 – С.34-38.
2. Гащук П., Зорій Л. Лінійні моделі дискретно-неперервних механічних систем. – Львів: Укр. технол., 1999. – 372 с.
3. Исследование сложных непрерывно-дискретных систем / [К.Я. Кухта] и др. – Киев: Наук. думка, 1981. – 272 с.
4. Коллатц Л. Задачи на собственные значения с техническими приложениями: Пер. с нем. – М.: Наука, 1968. – 503 с.
5. Коляно Ю. М. Применение обобщённых функций в термодинамике кусочно-однородных тел. / Ю. М. Коляно // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1977. – №7. – С. 7-11
6. Корнеев С. А. Техническая теория стержней. Применение обобщенных функций для решения задач сопротивления материалов: уч. пособие / С. А. Корнеев // Омск: Изд-во ОмГТУ. – 2011. – 84с.
7. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / [Еругин Н.П.] и др.. – К.: Выща школа, 1974. – 471 с.
8. Назаров А.Г. Импульсные функции в приложении к задачам строительной механіки / А. Г. Назаров // Исследования по теории сооружений. – Москва, 1949. – С. 43-58.
9. Образцов И. Ф. Строительная механика скошенных тонкостенных систем / И. Ф. Образцов, Г. Г. Онанов. – М.: Машиностроение, 1973. – 659 с.
10. Тацій. Р. Метод дискретизації в задачах про втрату стійкості однопрольотних стрижнів зі змінними параметрами / Р. Тацій, Т. Ушак // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2009. – Вип. 9. – С. 107-114.
11. Тацій Р. М. Моделювання дискретно-континуальних систем. Основи концепції квазіпохідних / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, В. В. Мазуренко // Фіз.-мат. моделювання та інформац. технології. – 2009. – №10. – С. 7-37.
12. Тацій Р. М. Частково вироджені та вироджені квазідиференціальні рівняння / Р. М. Тацій, М. Ф. Стасюк, О. О. Власій, М. Живічинські // Вісник НУ "Львівська політехніка": Фіз.-мат. науки. – 2007. – №601. – С. 18-27.
13. Узагальнені квазідиференціальні рівняння / [Тацій Р.М.] та ін. – Дрогобич: Коло, 2011. – 301с.
14. Oscillations of a string with concentrated nasses / B. J. Gomez [and others] // European Journal of Physics, 2007. – №28. – P. 961-975.

Стаття надійшла до редакції 09.09.2015.