УДК 620.18: 621.669.15: 621.762

О.Ю. Повстяной[1], А.А. Дороговцев[2]
[1]*Луцький національний технічний університет*
[2]*Інститут математики НАН України*

МОДЕЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ФОРМУВАННЯ ЗАСИПКИ ПОРОШКІВ З УРАХУВАННЯМ ВЛАСТИВОСТІ МАТЕРІАЛУ НА БАЗІ МОДЕЛЕЙ ВИПАДКОВОЇ УПАКОВКИ (ДВОМІРНИЙ ВИПАДОК)

Розглянуто двомірний випадок математичного моделювання засипки металевих порошків у довільний бункер з врахування фізичних характеристик матеріалу.

Ключові слова:*пористі проникні матеріали, упаковка, моделювання.*

А.Ю. Повстяной, А.А. Дороговцев

МОДЕЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ФОРМИРОВАНИЯ ЗАСИПКИ ПОРОШКОВ С УЧЕТОМ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛА НА БАЗЕ МОДЕЛЕЙ СЛУЧАЙНОЙ УПАКОВКИ (ДВУХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ)

Рассмотрен двухмерный случай математического моделирования засыпки металлического порошка в произвольный бункер с учетом физических характеристик материала.

Ключевые слова: *пористые проницаемые материалы, упаковка, моделирование.*

O.Yu. Povstyanoy, A.A. Dorogovtsev

MODEL STUDIES OF POWDERS POURING FORMATION TAKING INTO ACCOUNT THE PROPERTIES OF THE MATERIAL ON THE BASIS OF RANDOM PACKAGING MODELS (TWO-DIMENSIONAL CASE)

A two-dimensional case of mathematical modeling of filling of metal powders in arbitrary bunker taking into account physical characteristics is considered.

Keywords: *porous penetrating materials, packaging, modeling.*

Постановка проблеми. Стійкими сучасними тенденціями промислового розвитку є зростання вимог до якості усіх видів виробів. Отримати нові пористі проникні матеріали (ППМ) з гарантованими властивостями можливо за допомогою традиційної технології порошкової металургії, при цьому необхідно прогнозувати та контролювати параметри їх структури в процесі виготовлення, до яких відносяться: гранулометричний склад шихти, форма часток, щільність формованої заготовки, якість контактів, схема пресування, пористість, густина та їх розподіл по об’єму. Однак, методи порошкової металургії не завжди забезпечують однорідність властивостей всередині матеріалів, і не дають можливість отримувати структурні характеристики матеріалів на якісному рівні. Підвищити ефективність традиційних технологій, а також ввести безвідходне виробництво виробів широкого цільового призначення, зберігати енергію, скорочувати трудові затрати та контролювати параметри структури порошкових матеріалів в процесі їх виготовлення можливо за допомогою прогнозування з використанням сучасних засобів моделювання [1-3].

Прогнозування закономірностей формування структури та властивостей матеріалів залежать, насамперед, від геометричних факторів часток порошку. Крім того, аналіз сучасних технологічних процесів порошкової металургії показує, що наявність кореляційних зв’язків між складовими, будовою та властивостями забезпечується всіма операціями технологічного процесу, де початковим етапом є заповнення прес-форм порошком, який визначає не тільки розміри, форму, густину, продуктивність, безпеку і культуру праці, але й впливає на ряд найважливіших властивостей готового продукту. Тому, важливе місце тут займають модельні експерименти прогнозування залежності властивостей матеріалів від технологічних параметрів отримання виробів з використанням аналітичних, числових та числово–аналітичних методів за допомогою 3D моделювання.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Аналіз структурно-неоднорідних матеріалів проводили наукові колективи під керівництвом Р.М. Кадушникова, И.Г. Каменина, Ю.Н. Крючкова, В.Д. Рудя, М.Б. Штерна. Особливість цих робіт полягає в тому, що моделюються структурні характеристики матеріалів, які виготовлені із часток регулярної та нерегулярної форм. Результати моделювання перевірялися на натурних експериментах при виготовлені карбідосталей, які довели високу ефективність моделювання. Отримані результати якісно відтворюють процес заповнення прес-форми [4-7].

© О.Ю. Повстяной, А.А. Дороговцев

У роботах К.К. Кужидловського, М.М. Лобура, О.М. Матвійкова, Т.В. Семенова розглядаються інформаційні методи розрахунків фізико-хімічних характеристик порошкових матеріалів [8-10]. Особливість цих робіт полягає в тому, що проводиться аналіз лише хімічного складу або агрегатного стану початкового матеріалу, а також спостерігається відновлення оксидів, електроліз матеріалів, термічна дисоціація з'єднань.

У закордонній літературних джерелах велика частина роботи по створенню геометрії в значній мірі зосереджена на моделюванні волокна та самої границі геометрії в композиційних матеріалах [11, 12].

Невирішені частини проблеми. Методи моделювання невизначеності геометрії впливають на міцність складових компонентів, які знаходяться на початковій стадії заповнення [13-15], але моделювання випадкового розміщення порошку на стадії засипки у бункер з урахуванням фізичних параметрів складових повністю не досліджена.

Розробка методології моделювання розрахунку реальної засипки у форму ППМ, яка представляє більш реалістичний рівень гетерогенності, і є відправною точкою для виявлення фізичної основи поведінки порошку на стадії засипки для більшості випадків, які в даний час визначаються як емпірично, так і характеризується реальними експериментами. В ідеалі, отримані таким чином теоретичні результати, може змінити інженерний погляд на властивості майбутніх ППМ.

Тому **метою нашого дослідження** і є розробка методології розрахунку моделі випадкових пор у ППМ на стадії засипки матеріалу у бункер з урахуванням фізичної основи складових компонентів для двомірного випадку.

Основні результати дослідження. Для отримання фільтруючих ППМ з високою проникливістю необхідно використовувати порошки з великим розміром частинок, в той же час як для отримання високої тонкості очистки необхідно використовувати порошки з малим розміром частинок. Ці протиріччя зумовлюють необхідність пошуку нових технологічних прийомів і методів, які б дозволили створювати такі структури ППМ, що забезпечать найбільш оптимальне поєднання експлуатаційних характеристик.

Крім того, слід відзначити, що практика застосування нових матеріалів на основі металевих порошків показує, що реалізація у повному об'ємі їх міцнісних і експлуатаційних характеристик потребує суттєвого збільшення рівня прогнозування фізико-механічних властивостей матеріалів та розробки нових методів моделювання, який включає комплексний аналіз процесів формування матеріалів.

Аналізуючи більшість вітчизняних та зарубіжних моделей консолідації порошків, авторами запропонована нова методика розрахунку фізичних параметрів, які закладаються для дослідження реальних упаковок (двомірний випадок).

Нехай, область $G \in R^3$ заповнена дрібними металевими кульками (рис.1.)

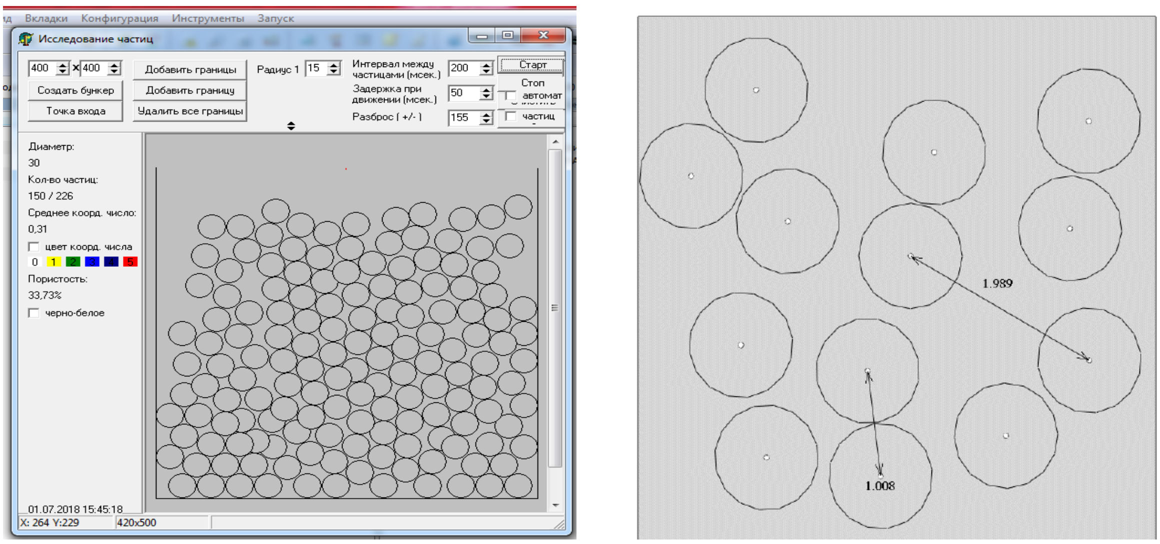

Рис. 1. **Варіант заповнення бункеру кульками відповідного розміру**

Необхідно встановити інтегральні характеристики отриманого матеріалу такі, як, наприклад, діелектричн апроникність. Для вирішення данної задачі використовують натупний підхід. Вважаємо, що в результаті заповнення області G порошинками виникли стаціонарні, ізотропні випадкові поля $\{\xi_{ij}(u), u \in R^3\}$, що описують діелектричну проникність сукупності.

Якщо до границь області прикласти електричний потенціал ϕ, то потенціал U всередині області є рішенням задачі Діріхле:

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{3} \xi_{i,j} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} U = 0 \\ U / \partial \mathrm{G} = \varphi \end{cases}, \qquad (1)$$

Оскільки коефіцієнти ξ_{ij} мають складну природу, то пряме рішення задачі неможливе. Тому, пропонується використовувати метод усереднення. Припускаємо, що $\forall i,j \in Z$ ξ_{ij} є ергодичним, а область G достатньо велика для проявлення цієї властивості. Тобто очікується, що замість рівняння (1) можна буде записати:

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{3} \overline{\xi}_{i,j} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} U = 0 \\ U / \partial \mathrm{G} = \varphi \end{cases}, \qquad (2)$$

з деяким "усередненим"значенням ξ_{ij}.

У рамках даного підходу були розглянуті наступні простіші випадки:

1) Одновимірний простір, тобто $G \in R$. Замість випадкового поля $\xi(u), u \in R$ розглядалася періодична функція $p: R \to R$.

2) Багатовимірний простір, з тією ж самою періодичною функцією $p: R^d \to R$, *де* $d > 2$.

Одновимірний випадок.

Нехай $G = [-1;1]$, в такому випадку система рівнянь (1) переписується наступним чином:

$$\begin{cases} x_\varepsilon''(u) = p_\varepsilon(u) x_\varepsilon(u) \\ x_\varepsilon(-1) = x_\varepsilon(1) = 1 \end{cases}, \qquad (3)$$

$$p_\varepsilon(x) = p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$

де $p_\varepsilon(x) = p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ а $p: R \to R$ – періодична функція з періодом 1.

Рішення данної системи можна записати через ймовірносне представлення:

$$x(u) = M_u exp\left\{ -\int_0^\tau p_\varepsilon(\varpi(s))ds \right\},$$

де $\{w(s), s \in [0, +\infty]\}$- вінерівський процес, а $\tau = inf\{s : w_u(s) \in \{-1;1\}\}$ момент виходу вінерівського процесу з області G.

Так як міра відвідування вінеровського процесу заданного на R є абсолютно неперервною відносно міри Лебега [16-17], тоді має місце наступна рівність:

$$\int_0^\tau p_\varepsilon(\varpi(s))ds = \int_{-1}^{-1} p_\varepsilon(u) l_\tau(u) d,$$

де $l_\tau(u) = \int_0^\tau \delta_u(\varpi(s))ds$ локальний час вінерівського процесу в точці u.

Відомо, що $l_\tau(u)$ – неперервна функція, тоді для подальших перетворень використаємо наступну теорему.

Теорема 1. Для будь-якої неперервної функції $f : G \to R$ та періодичної функції $p: R \to R$, з періодом 1, виконується збіжність:

$$\int_{-1}^{1} p_\varepsilon(u)\, f(u)du \to \int_0^1 p(u)du \int_{-1}^{1} f(y)dy, \varepsilon \to 0+$$

Доведення. Нехай $\varepsilon = \frac{1}{n}, n \in N$ та виконаємо заміну змінних $x=un$:

$$\int_{-1}^{1} p_\varepsilon(u)\, f(u)du = \frac{1}{n}\int_{-n}^{n} p(x)\, f(\frac{x}{n} dx = \frac{1}{n}\sum_{i=-n}^{n-1}\int_i^{i+1} p(x)\, f(\frac{x}{n})dx$$

Для доведення необхідної збіжності проведемо наступні перетворення:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=-n}^{n-1}\int_i^{i+1} p(x)\, f(\frac{x}{n})dx - \left|\int_0^1 p\right|(u)du\int_{-1}^{1} f(y)dy\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=-n}^{n-1}\int_i^{i+1} p(x)\, f(\frac{x}{n})dx - \right.$$

$$\left.\frac{1}{n}\int_{-n}^{n} f(\frac{y}{n})dy\int_0^1 p(u)du\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{i=-n}^{n-1}\int_i^{i+1} p(x)\, f(\frac{x}{n})dx - \frac{1}{n}p(x)dx\int_i^{i+1} f(\frac{y}{n})dy \le\right.$$

$$\frac{1}{n}\left|\sum_{i=-n}^{n-1}\int_i^{i+1}\int_i^{i+1} p(x)(f(\frac{x}{n}) - f(\frac{y}{n}))dydx\right| \le$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=-n}^{n-1}\left|\frac{\max}{\left|x-y\right|\le\frac{1}{n}}(f(\frac{x}{n}) - f(\frac{y}{n})\left|\int_i^{i+1} p(x)dx\right|= 2\int_0^1\right|p(x)dx\cdot\left|\frac{\max}{\left|x-y\right|\le\frac{1}{n}}(f(\frac{x}{n}) - f(\frac{y}{n}))\right|$$

Функція f - неперервна на відрізку $[-1,1]$, тобто вона є рівномірно неперевною на цьому ж відрізку, тоді згідно визначення:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon > 0\ \forall x_1,x_2 \in [-1,1]\ (|x_1 - x_2| < \delta_\varepsilon) \Rightarrow (|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$$

Значить $\forall\varepsilon \ge 0 \exists N_0 \in N \forall n \le N_0 : \left|\max_{|x-y|\le\frac{1}{n}}(f(\frac{x}{n}) - f(\frac{y}{n}))\right| \lhd \varepsilon$

Тоді, $\forall\varepsilon \ge 0 \exists N_0 \in N \forall n \le N_0 :$

$$\left|\int_{-1}^{1} p_\varepsilon(u)\, f(u)du - \int_0^1 p(u)du\int_{-1}^{1} f(y)dy\right| \le 2\int_0^1 |p(x)|dx\cdot\left|max_{|x-y|\le\frac{1}{n}}(f(\frac{x}{n}) - f(\frac{y}{n})\right| \lhd$$

$$\varepsilon\int_0^1 |p(u)|du$$

Тобто виконується необхідна збіжність.

Згідно доведеної теореми 1:

$$\int_0^\tau p_\varepsilon(\varpi(s))ds \to \int_0^1 p(u)du\int_{-1}^{1} l_\tau(y)dy, \varepsilon \to 0+$$

При цьому,

$$\int_0^1 p(u)du\int_{-1}^{1} l_\tau(y)dy = \int_0^1 p(u)du\int_0^\tau dy = \tau\int_0^1 p(u)du$$

А це значить, що виконується збіжність математичних сподівань:

$$M_u exp\left\{-\int_0^\tau p_\varepsilon(\varpi(s))ds\right\} \to M_u exp\left\{-\tau\int_0^1 p(u)du\right\}\varepsilon \to 0+$$

Тобто й збіжністьрішень систем рівнянь, наведених в наступнійтеоремі.

Теорема 2. Нехай x_ε- рішення рівняння (3). Тоді має місце збіжність:

$$x_\varepsilon \to x, при \varepsilon \to 0+,$$

де x – рішення задачі виду:

$$\begin{cases} x''(u) = \int_0^1 p(s)dsx(u) \\ x(-1) = x(1) = 1 \end{cases}$$

Випадкове поле.

Теорема 3. Нехай $\{\xi_{ij}\}$– однорідні ізотропні випадкові поля, задані на $R^d (d > 3)$.

Якщо виконуються наступні умови:

1) $\forall i, j \in Z\ \exists A_1, A_2 \in R$, такі що $\forall x \in R^d$, $\lambda_1, \lambda_2 \in R$: $A_1||\lambda||^2\, 6\, \xi_{ij}(x)\lambda_1\lambda_2\, 6\, A_2||\lambda||^2$,

де $||\lambda||^2 = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$;

2) ξij – задовольняє степеневій умові рівномірно сильного перемішування.

При цьому u_ε– рішення задачі:

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{3} \overline{\xi}_{i,j} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x) = 0 \\ u / \partial G = g \end{cases}, \qquad (5)$$

де G – обмежена область з гладкою границею,

g – деяка функція.

u – рішення "усередненної"задачі:

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{3} \overline{\xi}_{i,j} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} U = 0 \\ \mathrm{U} / \partial G = \varphi \end{cases}, \qquad (6)$$

Тоді:

$$M sup\{|u_\varepsilon(x) - u(x)| : x \in G\} = O(\varepsilon^\kappa), \qquad \kappa > 0.$$

Висновок. Практика розрахунку нових пористих матеріалів на основі металевих порошків показує, що реалізація у повному об'ємі їх міцнісних і експлуатаційних характеристик потребує суттєвого збільшення рівня прогнозування фізико-механічних властивостей матеріалів та розробки нових методів моделювання, який включає комплексний аналіз процесів формування матеріалів.

Література.

1. Шибряев Б.Ф. Пористые проницаемые порошкове материалы // Порошковая металлургия. – М., 1982. – С. 140–151.

© О.Ю. Повстяной, А.А. Дороговцев

2. Белов С.В. Пористые проницаемые материалы: Справочник. – М.: Металлургия, 1987. – 332 с.

3. Повстяной А.Ю. Эколого-экономическая эффективность использования отходов промышленного производства для изготовления материалов конструкционного назначения / Повстяной А.Ю., Рудь В.Д. // Международный журнал «Устойчивое развитие». - №19. – Варна, Болгария, сентябрь 2014. – С.89-94.

4. Кадушников Р.М. Геометрическое моделирование структуры материалов // Порошковая металлургия. – 1989. – 140с.

5. Каменин И.Г. Имитационное моделирование случайной неоднородной структуры порошков // Порошковая металлургия. – 1997. – 302 с.

6. Крючков Ю.Н. Оценка структурного совершенства пористих материалов // Порошковая металлургия. – 1996. – 220с.

7. Рудь В.Д. Имитационная модель засипки частиц порошков и ее использование при разработке технологи приготовления шихты карбидосталей // Моделирование в материаловедении. – 2006. – 320с.

8. Кужидловський К.К Інформаційно-розрахунковий метод для визначення характеристик композитних матеріалів / К.К Кужидловський, М.М Лобур // Порошковая металлургия. – 2010. – № 6. – С. 23–30.

9. Матвійкова О.М. Численное моделирование процес сов прессования порошкових изделий сложной формы в жестких матрицах: влияние схемы прессования на распределение плотности / О.М. Матвійкова, М.Б Штерн, О.В. Михайлов // Порошковая металлургия. – 2002. – № 11. – С. 29-36.

10. Семенова Т.В. Мезомеханический анализ гранулированных материалов при контактном нагружении / Т.В. Семенова, С.В. Шилько, В.А. Ковтун // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2001. – № 2. – С. 189 – 205.

11. Young C, Mc Millan AJ, Ravey E, Verdicchio J, Quinn J, McIlhagger A, Buchanan S “The hybrid approach of a 3D textile composite finite element modeling technique at meso-scale level” 18th ICCM, South Korea, 2011.

12. Potter E, Pinho ST, Robinson P, Iannucci L, McMillan AJ “Mesh generation and geometrical modeling of 3D woven composites with variable tow cross-sections” Computational Materials Science 2012 51 103–111.

13. Matthies HG, “Stochastic finite elements: Computational approaches to stochastic partical differential equations”, Journal of Applied Mathematicsand Mechanics, 88(11), 849-873, 2008.

14. Moens D, Vandepitte D, “A survey of non-probabilistic uncertainty treatment in finite element analysis”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194(12-16), 1527-1566, 2005.

15. Ainsworth M, Oden JT, “A posteriori error estimation in finite element analysis”, Wiley Blackwell, New York, 2000.

16. P. Billingsley. Probability and Measure. Wiley, New York, 1995. (3rd ed.)

17. Владимиров В.С. Уравнения математической физики / Владимиров В.С., Жаринов В.В. // 2-е изд., стереотип. учебник для вузов. – М.: Физматлит. – 2004. – 400 с.

Стаття надійшла до редакції 20.06.2018

© О.Ю. Повстяной, А.А. Дороговцев