УДК 517.45

В.М. Тимощук, Б.К. Гануліч, С.М. Лісковець, О.В. Гуда
Луцький національний технічний університет

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ТЕОРІЇ НАБЛИЖЕННЯ БІГАРМОНІЧНИХ ФУНКЦІЙ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ГРАНИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

В запропонованій роботі сформульовано і доведено теореми, які дають можливість визначити властивості наближень, що забезпечують існування похідних відповідного порядку граничної функції в півплощині. Наведений метод доведення дозволяє коректно розв'язати обернену задачу і визначити ряд умов, при яких досліджувані початкові умови мають похідні до n -го порядку включно. Одержані оцінки можуть бути поширені на інші функції (зокрема на функції бігармонічні в крузі).

Ключові слова: *бігармонічна функція, обернена теорема, задача Ліурічеллі, модуль неперервності.*

В.Н. Тимощук, Б.К. Ганулич, С.М. Лисковец, О.В. Гуда

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ БИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРЕДЕЛЬНОГО ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

В предлагаемой статье сформулированы и доказаны теоремы, которые дают возможность определить свойства приближений, которые обеспечивают существование производных соответствующего порядка предельной функции в полуплоскости. Приведенный метод доказательства дает возможность корректно решить обратную задачу, определить ряд условий, при которых исследуемые начальные условия имеет производные до n -го порядка включительно. Полученные результаты можно использовать при исследовании функций бигармонических в круге.

Ключевые слова: *бигармоническая функция, обратная теорема, задача Лиуричелли, модуль непрерывности.*

V. Tymoshchook, B. Ganulich, S. Liskovets, O. Guda

APPLICATION OF THE METHODS OF THE APPROXIMATION THEORY OF BIHARMONIC FUNCTIONS TO INVESTIGATION THE LIMITING BEHAVIOR OF THE SOLUTIONS OF SOME BOUNDARY-VALUE PROBLEMS

In the inverse theorems of the approximation theory, the dependence of the properties of functions on the propagation speed to zero of its approximations is established. The classical theory of the approximation of functions has mastered a number of effective methods for the study of such theorems. These methods proved to be very successful for qualitative research of solutions of boundary value problems in flat canonical regions.

In the proposed paper, theorems are formulated and proved, which make it possible to determine the properties of approximations that ensure the existence of derivatives of the corresponding order of the boundary function in the half-plane. The given method of proof allows us to correctly solve the inverse problem and to determine a set of conditions under which the studied initial conditions have derivatives of the order of magnitude inclusive. The obtained estimates can be extended to other functions (in particular, the functions of biharmonic in the circle).

In addition, the solution of these problems enables us to formulate and solve the problems of the theory of elasticity, plasticity theory, structural mechanics, mathematical physics, etc.

Key words: *biharmonic function, inverse theorem, problem Liurichelli, continuity module.*

Постановка проблеми. Робота присвячена оберненим оцінкам відхилення бігармонічних функцій в півплощині. В статті [1] одержані обернені теореми наближення бігармонічними функціями в півплощині. В цих теоремах за заданою швидкістю відхилення бігармонічних функцій від своїх граничних значень встановлено неперервність граничних значень (за відповідною метрикою) і оцінюється модуль неперервності другого порядку цього граничного значення.

У запропонованій роботі згадані обернені теореми доповнюються такими властивостями наближень, які забезпечують існування похідних певного порядку граничної функції, що дає можливість оцінити модуль неперервності похідної найвищого можливого порядку.

Аналіз досліджень і публікацій. В теорії апроксимації поняття оберненої теореми було введено С.М. Бернштейном [2]. В обернених теоремах встановлюється залежність властивостей функції від швидкості наближення до нуля її наближень. Метод Бернштейна доведення обернених теорем одержав потужний розв'язок в теорії наближення тригонометричними і алгебраїчними многочленами або раціональними функціями і його розвиток зв'язаний з результатами про ускладнення множин, на яких можна формулювати і доводити теореми наближення.

Класична теорія наближення функцій оволоділа рядом ефективних методів для дослідження прямих і обернених теорем своєї теорії. Ці методи виявились плідними до якісного дослідження розв'язків крайових задач в плоских канонічних областях. Першими в цьому плані були результати 50-х років І.П. Натансона, О.П. Тіммана [3], які стосувались оцінок відхилення гармонійних функцій від їх значень на межі в термінах модулів неперервності крайових даних. Їх дослідження підтвердило думку про природну залежність поведінки розв'язків задачі Діріхлє від властивостей функцій, заданих на межі. В наш час проводяться дослідження розв'язків більш загальних рівнянь з крайовими даними із різних функціональних класів.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо функції бігармонічні в півплощині. Нехай задано бігармонічне рівняння

$$\Delta^2 u = 0 . \tag{1}$$

Позначимо $u_g(x,y) = u(x,y)$ розв'язок рівняння (1) в півплощині $y > 0$, що задовільняє граничним умовам

$$u(x,y)\big|_{y=0} = g(x); \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\Big|_{y=0} = 0 . \tag{2}$$

Розв'язок крайової задачі (1)-(2) можна записати у вигляді [1]

$$u_g(x,y) = \frac{2y^3}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x+y)}{\left(t^2+y^2\right)^2}dt . \tag{3}$$

Клас таких функцій позначимо через B_y. Позначимо через $L_p[-\infty;+\infty]$, $p \geq 1$ клас функцій $g(x)$, $-\infty \leq x \leq +\infty$ з кінцевою нормою, що визначається співвідношеннями

$$\|g\| = \left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|^p\,dx\right\}^{\frac{1}{p}}, \text{ якщо } 1 \leq p < \infty$$

$$\|g\| = \underset{-\infty\leq x\leq+\infty}{ess}\,\sup|g(x)|, \text{ якщо } p = +\infty .$$

Сформулюємо і доведемо наступні теореми.

Теорема 1. Якщо $g \in L_p[-\infty;+\infty]$, $p \geq 1$ і $u_g(x,y) \in B_y$, то для довільного фіксованого натурального k має місце нерівність

$$\left\|\frac{\partial^k u_g(x,y)}{\partial x^k}\right\| \leq M\,\frac{\|g\|}{y^k}, \quad y > 0, \tag{4}$$

де $M > 0$ – стала, що не залежить від y .

Доведення. Використовуючи (3) розв'язок $u_g(x,y)$ граничної задачі (1)-(2) і узагальнену нерівність Мінковського [2], одержимо нерівність

$$\left\|\frac{\partial^k u_g(x,y)}{\partial x^k}\right\| \leq \frac{2y^3\|g\|}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}\left(\frac{1}{\left(t^2+y^2\right)^2}\right)\right|dt . \tag{5}$$

Оцінимо інтеграл в правій частині (5). Для цього знайдемо похідні відповідного порядку:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\left(t^2+y^2\right)^2}\right) = \frac{-4t}{\left(t^2+y^2\right)^3};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{\left(t^2+y^2\right)^2}\right) = \frac{5t^2-y^2}{\left(t^2+y^2\right)^4};$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}\left(\frac{1}{\left(t^2+y^2\right)^2}\right)=\frac{30t^3-18y^2t}{\left(t^2+y^2\right)^5};$$

$$\frac{\partial^4}{\partial t^4}\left(\frac{1}{\left(t^2+y^2\right)^2}\right)=\frac{210t^4-252t^2y^2-18y^4}{\left(t^2+y^2\right)^6};$$

$$\frac{\partial^5}{\partial t^5}\left(\frac{1}{\left(t^2+y^2\right)^2}\right)=\frac{168t^5-337y^2t^3+720y^4t}{\left(t^2+y^2\right)^7}.$$

Підставляючи знайдені значення в нерівність (5), послідовними перетвореннями знайдемо

$$1)\ \left\|\frac{\partial^3 u_g(x,y)}{\partial x^3}\right\|\le\frac{2y^3\|g\|}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{t\left(30t^2-18y^2\right)}{\left(t^2+y^2\right)^5}\right|dt=\frac{4y^3}{\pi}\|g\|\int\limits_0^{+\infty}\frac{t\left|30t^2-18y^2\right|}{\left(t^2+y^2\right)^5}dt\le$$

$$\le\frac{4y^3}{\pi}\|g\|\int\limits_0^{+\infty}\frac{t\cdot 30\left(t^2+y^2\right)}{\left(t^2+y^2\right)^5}dt=\frac{60y^3}{\pi}\|g\|\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\left(t^2+y^2\right)}{\left(t^2+y^2\right)^4}=$$

$$=\frac{20y^3}{\pi}\|g\|\cdot\frac{1}{y^6}=\frac{20}{\pi}\cdot\frac{\|g\|}{y^3}.$$

$$2)\ \left\|\frac{\partial^4 u_g(x,y)}{\partial x^4}\right\|\le\frac{20y^3}{\pi}\|g\|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial^4}{\partial t^4}\left(\frac{1}{\left(t^2+y^2\right)^2}\right)\right|dt=$$

$$=\frac{2y^3}{\pi}\|g\|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{210t^4+420t^2y^2+18y^4}{\left(t^2+y^2\right)^6}\right|dt\le\frac{420y^3}{\pi}\|g\|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{t^4+2t^2y^2+y^4}{\left(t^2+y^2\right)^6}\right|dt=$$

$$=\frac{840y^3}{\pi}\|g\|\int\limits_0^{+\infty}\left|\frac{t^4+2t^2y^2+y^4}{\left(t^2+y^2\right)^6}\right|dt=\frac{840y^3}{\pi}\|g\|\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{\left(t^2+y^2\right)^4}.$$

Для обчислення цього інтеграла використаємо відомі формули [2]:

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{2m}dx}{\left(x^2+y^2\right)^n}=\frac{(2m-1)!!(2n-2m-3)!\pi}{2(2n-2)!!\left(y^2\right)^{n-m-1}\cdot y}\qquad\left(y>0,\ n>m+1\right)\\&\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^{2m+1}dx}{\left(x^2+y^2\right)^n}=\frac{m!(n-m-2)!}{2(n-1)!\left(y^2\right)^{n-m-1}}\qquad\left(y>0,\ n>m+1\ge 1\right)\end{aligned}\tag{6}$$

Таким чином,

$$\left\|\frac{\partial^4 u_g(x,y)}{\partial x^4}\right\|\le\frac{B\|g\|}{y^4},\quad B=const>0.$$

3) Аналогічно, одержимо

$$\left\|\frac{\partial^5 u_g(x,y)}{\partial x^5}\right\| \le \frac{C\|g\|}{y^5},\ \ C = const > 0.$$

Використовуючи формули (6), подібні оцінки можна отримувати при подальших обчисленнях. Таким чином, узагальнюючи 1) 2) 3) і враховуючи той факт, що похідні парної функції є непарними і навпаки, маємо

$$\left\|\frac{\partial^k u_g(x,y)}{\partial x^k}\right\| \le M\frac{\|g\|}{y^k},\ \ y > 0.$$

Теорема 2. Якщо $g \in L_p(-\infty;+\infty)$, $p \ge 1$, $u_g(x,y) \in B_y$, то для похідних фіксованих $y_1 > 0$, $y_2 > 0$ і всіх $x \in (-\infty;+\infty)$ справедлива рівність

$$u_{u_g(x,y_1)}(x,y_2) = u_{u_g(x,y_2)}(x,y_1). \tag{7}$$

Доведення. З умови теореми маємо

$$\begin{aligned} u_{u_g(t,y_2)}(x,y_1) &= \frac{2y_1^3}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\frac{2y_2^3}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(\tau)}{\left[(t-\tau)^2+y_2^2\right]}d\tau}{\left[(x-t)^2+y_1^2\right]}dt = \\ &= \frac{4y_1^3y_2^3}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\left[(t-\tau)^2+y_2^2\right]^2\cdot\left[(x-t)^2+y_1^2\right]^2}d\tau \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} u_{u_g(t,y_1)}(x,y_2) &= \frac{2y_2^3}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\frac{2y_1^3}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(\tau)}{\left[(t-\tau)^2+y_1^2\right]}d\tau}{\left[(x-t)^2+y_2^2\right]}dt = \\ &= \frac{4y_2^3y_1^3}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\left[(t-\tau)^2+y_1^2\right]^2\cdot\left[(x-t)^2+y_2^2\right]^2}d\tau \end{aligned} \tag{9}$$

Знайдемо різницю внутрішніх інтегралів по t в правих частинах рівностей (8) і (9).

$$\frac{4y_1^3y_2^3}{\pi^2}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\left[(t-\tau)^2+y_2^2\right]^2\cdot\left[(x-t)^2+y_1^2\right]^2}d\tau - \right.$$

$$\left. -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{\left[(t-\tau)^2+y_1^2\right]^2\cdot\left[(x-t)^2+y_2^2\right]^2}d\tau\right) =$$

$$= \frac{4y_1^3y_2^3}{\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}g(\tau)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{\left[(t-\tau)^2+y_2^2\right]^2\cdot\left[(x-t)^2+y_1^2\right]^2} - \frac{1}{\left[(t-\tau)^2+y_2^2\right]^2\cdot\left[(x-t)^2+y_1^2\right]^2}\right)dt$$

Використовуючи заміни $t = u + \frac{\tau + x}{2}$, $v = \frac{\tau - x}{2}$, одержимо

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{\left[(u-v)^2+y_2^2\right]^2\left[(u+v)^2+y_1^2\right]^2}-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{\left[(u-v)^2+y_1^2\right]^2\left[(u+v)^2+y_2^2\right]^2}=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left[(u-v)^2+y_1^2\right]^2\left[(u+v)^2+y_2^2\right]^2-\left[(u-v)^2+y_2^2\right]^2\left[(u+v)^2+y_1^2\right]^2}{\left[(u-v)^2+y_2^2\right]^2\left[(u+v)^2+y_1^2\right]^2\left[(u+v)^2+y_2^2\right]^2\left[(u-v)^2+y_1^2\right]^2}=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left[(u-v)^2+y_1^2\right]^2\left[u^2+2uv+v^2+y_2^2\right]^2-\left[(u-v)^2+y_2^2\right]^2\left[u^2+2uv+v^2+y_1^2\right]^2}{\left[(u-v)^2+y_2^2\right]^2\left[(u+v)^2+y_1^2\right]^2\left[(u+v)^2+y_2^2\right]^2\left[(u-v)^2+y_1^2\right]^2}=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\left[u^2-2uv+v^2+y_1^2\right]^2\left[(u+v)^2+y_2^2\right]^2-\left[u^2-2uv+v^2+y_2^2\right]^2\left[(u+v)^2+y_1^2\right]^2}{\left[(u-v)^2+y_2^2\right]^2\left[(u+v)^2+y_1^2\right]^2\left[(u+v)^2+y_2^2\right]^2\left[(u-v)^2+y_1^2\right]^2}$$

Оскільки, підінтегральна функція є непарною по u, то даний інтеграл дорівнює нулю. Отже,

$$u_{u_g(t,y_2)}(x,y_1)=u_{u_g(t,y_1)}(x,y_2)$$

і теорема доведена.

Зауважимо також, що в умовах теореми 2, справедливе твердження:

$$u_{g-u_g(x,y_1)}(x,y_2)-u_{g-u_g(x,y_2)}(x,y_1)=u_g(x,y_2)-u_g(x,y_1) \qquad (10)$$

яке одержується з адитивності оператора u_g і рівності (7).

Висновки до роботи. В даній роботі наведено теореми і наслідок з однієї з них, які визначають властивості наближень, що забезпечують існування похідних певного порядку граничної функції. Це дозволяє відновити граничну функцію в задачі Діріхлє для рівняння $\Delta^2 u=0$ в півплощині; задачі Ліурічеллі для його ітерації; задач відновлення початкових умов для одномірних задач теплопровідності. Крім цього, розв'язок даних задач дає можливість сформулювати і вирішити багато різних проблем теорії пружності, теорії пластичності, будівельної механіки та математичної фізики. Також одержані результати можуть бути поширені і на інші функції, зокрема, бігармонічні в крузі.

Список використаних джерел:

1. Горбайчук В И. О некоторых граничных свойствах бигармонических функций // Изд. вузов математики – 1974 – №12. – С.54-57.
2. Бернштейн С.Н. – Собрание сочинений – М., 1954 – т.3. – С.310–348.
3. Тимман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. – М., Физматиз, 1960. – 624с.

Рецензент

Пастернак Ярослав Михайлович, завідувач кафедри прикладної математики та механіки, доктор фіз.-мат. наук, професор

Стаття надійшла до редакції 20.03.2019