

УДК 624.04

Ю.С. Крутій, М.Г. Сур'янінов, М.М. Сорока, Г.С. Карнаухова  
Одеська державна академія будівництва та архітектури

### СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНИЙ АНАЛІЗ ОСЕСИМЕТРИЧНОГО ЗГИНУ КРУГЛИХ СУЦІЛЬНИХ ПЛАСТИН НА ЗМІННІЙ ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

Наведено результати дослідження осесиметричного згину круглих суцільних пластин на змінній пружній основі. Використовується метод скінчених елементів, реалізований в ПК ЛІРА-САПР, як найбільш універсальний з чисельних методів.

Розглянуто дванадцять варіантів розрахунку суцільний круглої пластини (плити) при двох умовах опирання і трьох різних законах зміни коефіцієнта постелі. У всіх варіантах результати повністю збігаються з відомими результатами згину плит, які не мають пружної основи і в разі, коли ця основа існує, а її опір є постійним. Відзначено, що розбіжність тут дуже незначна — в третій значущій цифрі після коми для прогину при шарнірному закріпленні і в другій — для моментів. При жорсткому закладенні прогини і моменти також відрізняються від відповідних значень відомих рішень в другій значущій цифрі після коми. Що стосується пружної основи, коефіцієнт постелі якої змінюється за законом опуклої параболі, то дані для порівняння відсутні; потрібен альтернативний метод, який дозволить виконати аналогічні розрахунки. Бажаємо, щоб цей метод був аналітичним і дозволяв проводити розрахунки з великою точністю і без обмежень щодо виду навантаження і закону зміни опору основи. Цим визначається напрямок подальших досліджень авторів в області розрахунку пластин на змінній пружній основі.

**Ключові слова:** пластина, пружна основа, модель Вінклера, змінний коефіцієнт постелі, метод скінчених елементів, комп'ютерне моделювання, ЛІРА-САПР.

Ю.С. Крутій, Н.Г. Сурьянинов, Н.Н. Сорока, А.С. Карнаухова

Одесская государственная академия строительства и архитектуры

### КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЙ АНАЛИЗ ОСЕСИМЕТРИЧНОГО ИЗГИБА КРУГЛЫХ СПЛОШНЫХ ПЛАСТИН НА ПЕРЕМЕННОМ УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Приведены результаты исследования осесиметричного изгиба круглых сплошных пластин на переменном упругом основании. Используется метод конечных элементов, реализованный в ПК ЛІРА-САПР, как наиболее универсальный из численных методов.

Рассмотрено двенадцать вариантов расчета сплошной круглой пластины (плиты) при двух условиях опирания и трех различных законах изменения коэффициента постели. Во всех вариантах результаты полностью совпадают с известными результатами изгиба плит, не имеющих упругой основы и в случае, когда эта основа существует, а ее сопротивление является постоянным. Отмечено, что расхождение здесь очень незначительное — в третьей значащей цифре после запятой для прогиба при шарнирном опирании и во второй — для моментов. При жестком заделке прогибы и моменты также отличаются от соответствующих значений известных решений во второй значащей цифре после запятой. Что касается упругого основания, коэффициент постели которой изменяется по закону выпуклой параболы, то данные для сравнения отсутствуют; нужен альтернативный метод, который позволит выполнить аналогичные расчеты. Желательно, чтобы этот метод был аналитическим и позволял проводить расчеты с большой точностью и без ограничений относительно вида нагрузки и закона изменения сопротивления основания. Этим определяется направление дальнейших исследований авторов в области расчета пластин на переменном упругом основании.

**Ключевые слова:** пластина, упругое основание, модель Винклера, переменный коэффициент постели, метод конечных элементов, компьютерное моделирование, ЛІРА-САПР.

Yu.S. Krutii, M.H. Surianinov, M.M. Soroka, G.S. Karnauhova

Odessa State Academy of Civil Engineering and Architecture

### FINITE-ELEMENT ANALYSIS OF THE AXISYMMETRIC BENDING OF ROUND CONTINUOUS PLATES ON A VARIABLE ELASTIC BASIS

The results of the study of axisymmetric bending of round continuous plates on a variable elastic base are presented. The finite element method used in the LIRA-SAPR software is used as the most universal of the numerical methods.

Twelve options for calculating a continuous round plate (slab) under two conditions of support and three different laws of changing the coefficient of bed are considered. In all cases, the results completely coincide with the known results of bending plates that do not have an elastic base and in the case when this base exists and its resistance is constant. It is noted that the discrepancy here is very slight - in the third significant digit after the decimal point for deflection when articulated and in the second - for moments. With hard termination, the deflections and moments also differ from the corresponding values of the known solutions in the second significant digit after the decimal point. As for the elastic base, the bed coefficient of which varies according to the law of a convex parabola, there are no data for comparison; need an alternative method that will allow you to perform similar calculations. It is desirable that this method be analytical and allow calculations to be made with great accuracy and without restrictions regarding the type of load and the law of variation of the base resistance. This determines the direction of further research of the authors in the field of calculation of plates on a variable elastic base.

**Key words:** plate, elastic base, Winkler model, variable bed coefficient, finite element method, computer simulation, LIRA-SAPR.

**Вступ.** Пластина на пружній основі — це математична модель багатьох конструкцій, що застосовуються в різних галузях промисловості. В першу чергу це відноситься до будівельних об'єктів, і, зокрема, до фундаментних балок і плит. Існують різні моделі пружної основи. Найпростішою є модель Вінклера, або пружинна модель. Для балок на постійній пружній основі ця модель дозволяє отримати точне рішення, а для плит — ні. Ще складніше йде справа, коли пружна основа є змінною. Не існує єдиного підходу для побудови універсального аналітичного рішення. Тому в інженерній практиці застосовуються наближені методи розрахунку, засновані на дискретизації системи. З цієї проблематики існує чимало публікацій, що висвітлюють різні напрямки досліджень.

Безсумнівний інтерес представляють отримані Є.Б. Кореновой рішення низки складних завдань теорії згину круглих ізотропних і ортотропних пластин, що лежать на пружній основі, в замкнутому вигляді [1]. Відзначимо роботи Р.Ф. Габбасова [2, 3], де на основі узагальнених рівнянь методу скінчених різниць отримано розв'язки задач про згин пластин змінної жорсткості і плит на пружній основі, що відрізняються високою точністю. Розрахунок одношарових і двошарових плит на пружній основі методом скінчених різниць виконаний в [4]. Тут досліджена точність отриманих результатів в залежності від способу розбиття і способу розв'язання. В [5] наводиться точне рішення динамічної задачі для прямокутної пластини, що лежить на пружній основі з одним коефіцієнтом постелі, при найбільш загальних умовах обпирання на двох її протилежних краях. Отримане замкнуте рішення побудовано для довільних динамічних навантажень, і в такій загальній постановці така задача раніше не розглядалася. С.В. Ідімешев [6] для чисельного рішення задачі про згин прямокутної пластини на пружній основі застосовує метод колокацій і найменших нев'язок, який добре зарекомендував себе при розв'язанні звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь в приватних похідних для задач гідродинаміки.

Власні коливання круглої пластинки, що лежить на змінній пружній основі типу Вінклера, розглянуті в роботі А.М. Дороніна і В.А. Соболевої [7]. Коефіцієнт постелі основи змінюється за степеневим законом в напрямку радіуса. Власні числа коливань визначаються з теорії Кірхгофа аналітичним методом. Основне рівняння, записане в комплексних змінних, вирішується методом послідовних наближень. Проведено розрахунки для модуля основи, що змінюється за лінійним або квадратичним законом.

Активно займаються дослідженнями конструкцій на пружній основі зарубіжні вчені. Правда, в їх роботах змінною частіше є товщина пластини, а не коефіцієнт постелі пружної основи. Так, в [8] досліджено стійкість і визначені власні частоти пластини змінної товщини на пружній основі за допомогою аналітичного методу. Проте, як констатує автор статті [9], інформації про згин пластин постійної або змінної товщини на змінній пружній основі в літературі вкрай мало.

**Метою** даної роботи є дослідження осесиметричного згину круглих суцільних пластин на змінній пружній основі методом скінчених елементів.

**Постанова проблеми.** У загальному випадку розглядається кільцева пластина постійної циліндричної жорсткості  $D$  (рис. 1), що лежить на змінній пружній основі і знаходиться під дією безперервно розподіленого поперечного навантаження.

Тут  $a$  і  $b$  — радіуси зовнішнього та внутрішнього контурних кіл пластини,  $r$  — радіальна координата ( $0 \leq r \leq a$ ). В окремому випадку, при значенні  $b=0$ , отримуємо суцільну круглу пластину.

Осесиметричний згин пластин виникає, коли діюче навантаження  $q(r)$ , реакція пружної основи  $R(r)$  і умови закріплення країв не залежать від полярного кута  $\theta$ . При такому згині в пластині діють тільки три внутрішніх зусилля, а саме, радіальний  $M_r$  і окружний  $M_\theta$  згинальні моменти і, а також радіальна поперечна сила  $Q_r$  (рис. 2). Крутний момент  $M_{r\theta}$  і окружна поперечна сила  $Q_\theta$  дорівнюють нулю в силу осьової симетрії напруженого стану.

Для розв'язання поставленої задачі в даній роботі використовується метод скінчених елементів, реалізований в ПК ЛІРА-САПР [10], як найбільш універсальний з чисельних методів.

Приклад 1. Стальна пластина з шарнирним обпиранням по контуру.

Кругла пластина товщиною  $h = 0,03\text{ м}$  і радіусом  $a = 0,9\text{ м}$  знаходиться під дією рівномірно розподіленого навантаження  $q = 80\text{ кПа}$ . Матеріал — сталь ( $E = 2,1 \cdot 10^8\text{ кПа}$ ;  $\mu = 0,33333$ ).

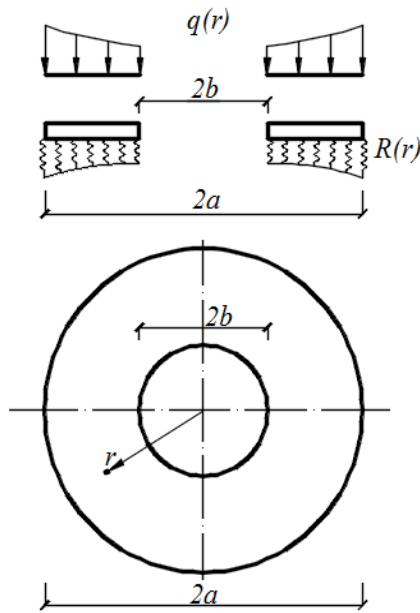


Рис. 1. Пластина на змінній пружній основі під дією поперечного навантаження

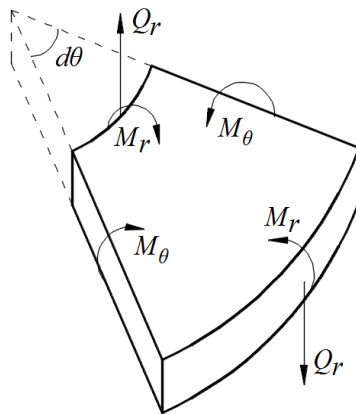


Рис. 2. Внутрішні зусилля в пластині

**Результати дослідження.** Виконано геометричне і скінченно-елементне моделювання пластини в ПК ЛІРА-САПР. На основі цієї моделі розглянемо ряд завдань з різними наборами вихідних даних. А саме: розглянемо дві пластини, виготовлені з різних матеріалів, з шарнірним закріпленням по контуру, а потім — ці ж пластини, жорстко закріплені по контуру.

Розрахунки для кожної з них виконаємо при трьох моделях пружної основи — при нульовому коефіцієнті постелі, постійному і змінному за законом опуклої параболи (рис. 3).

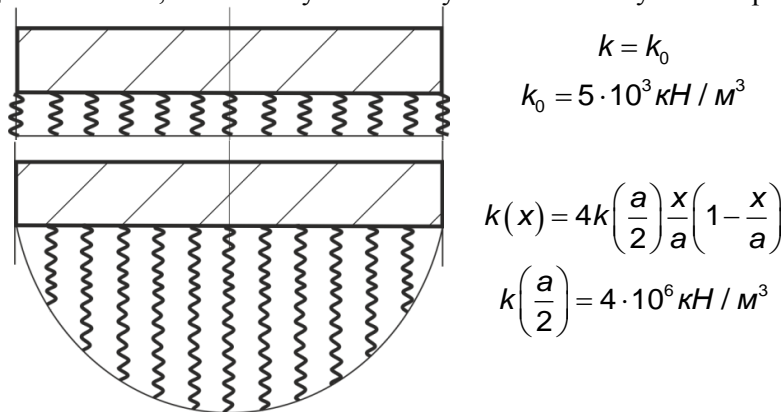


Рис. 3. Моделі основи

Результати розрахунків при відсутності коефіцієнту постелі (тобто, звичайної круглої пластини з шарнірним обпиранням по всьому контуру), при постійному його значенні та при такому, що змінюється за законом опуклої параболи, наведені в табл. 1.

Таблиця 1

## Прогини і моменти при різних коефіцієнтах постелі в пластині з шарнирним обпиранням

Коорд, м	$W$ , мм			$M_r$ , кНм/м			$M_\theta$ , кНм/м		
	Закон зміни коефіцієнту постелі								
	Нуль	Постіний	Опукла парабола	Нуль	Постіний	Опукла парабола	Нуль	Постіний	Опукла парабола
0	-6,1722	-4,9241	-0,2271	13,744	10,5784	1,3744	13,749	10,5813	1,3749
0,043	-6,1548	-4,9104	-0,2253	13,688	10,5403	1,3688	13,715	10,5588	1,3715
0,086	-6,1024	-4,8693	-0,2200	13,564	10,4559	1,3564	13,641	10,5084	1,3641
0,129	-6,0155	-4,8011	-0,2115	13,378	10,3286	1,3378	13,530	10,4322	1,3530
0,171	-5,8944	-4,7059	-0,2001	13,129	10,1579	1,3129	13,380	10,3300	1,3380
0,214	-5,7399	-4,5844	-0,1865	12,818	9,9433	1,2818	13,194	10,2015	1,3194
0,257	-5,5529	-4,4372	-0,1712	12,445	9,6839	1,2445	12,970	10,0465	1,2970
0,3	-5,3343	-4,2649	-0,1550	12,010	9,3784	1,2010	12,709	9,8643	1,2709
0,343	-5,0853	-4,0684	-0,1385	11,512	9,0268	1,1512	12,410	9,6544	1,2410
0,386	-4,8076	-3,8488	-0,1222	10,952	8,6267	1,0952	12,074	9,4162	1,2074
0,429	-4,5025	-3,6073	-0,1066	10,330	8,1772	1,0330	11,700	9,1490	1,1700
0,471	-4,1719	-3,3450	-0,0921	9,646	7,6767	0,9646	11,290	8,8521	1,1290
0,514	-3,8179	-3,0637	-0,0789	8,899	7,1236	0,8899	10,842	8,5247	1,0842
0,557	-3,4427	-2,7649	-0,0670	8,091	6,5163	0,8091	10,356	8,1658	1,0356
0,6	-3,0486	-2,4503	-0,0565	7,220	5,8528	0,7220	9,834	7,7745	0,9834
0,643	-2,6380	-2,1221	-0,0472	6,287	5,1313	0,6287	9,274	7,3499	0,9274
0,686	-2,2141	-1,7824	-0,0387	5,292	4,3500	0,5292	8,676	6,8910	0,8676
0,729	-1,7794	-1,4335	-0,0309	4,236	3,5066	0,4236	8,042	6,3967	0,8042
0,771	-1,3372	-1,0779	-0,0233	3,117	2,5994	0,3117	7,370	5,8659	0,7370
0,814	-0,8908	-0,7184	-0,0157	1,936	1,6263	0,1936	6,660	5,2974	0,6660
0,857	-0,4439	-0,3582	-0,0079	0,693	0,5853	0,0693	5,914	4,6904	0,5914
0,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,000	0,000	0,0000	5,400	4,177	0,0000

Приклад 2. Тепер розглянемо тепер розглянемо ту ж пластину при тих же вихідних даних, але з жорстким закріпленням по контуру.

Таблиця 2

## Прогини і моменти при різних коефіцієнтах постелі в пластині, що жорстко закріплена

Коорд, м	$W$ , мм			$M_r$ , кНм/м			$M_\theta$ , кНм/м		
	Закон зміни коефіцієнту постелі								
	Нуль	Постіний	Опукла парабола	Нуль	Постіний	Опукла парабола	Нуль	Постіний	Опукла парабола
0	-1,5369	-1,4478	-0,0486	5,368	5,0172	0,6376	5,3724	5,0210	0,6417
0,043	-1,5299	-1,4413	-0,0478	5,313	4,9672	0,5853	5,3399	4,9915	0,6108
0,086	-1,5091	-1,4219	-0,0454	5,192	4,8565	0,4791	5,2673	4,9254	0,5461
0,129	-1,4747	-1,3897	-0,0416	5,009	4,6899	0,3416	5,1578	4,8255	0,4598
0,171	-1,4273	-1,3453	-0,0369	4,765	4,4672	0,1937	5,0115	4,6920	0,3629
0,214	-1,3674	-1,2899	-0,0317	4,460	4,1882	0,0558	4,8285	4,5248	0,2662
0,257	-1,2959	-1,2224	-0,0265	4,094	3,8525	-0,0565	4,6089	4,3236	0,1790
0,3	-1,2139	-1,1456	-0,0215	3,667	3,4597	-0,1341	4,3525	4,0883	0,1074
0,343	-1,1227	-1,0600	-0,0171	3,179	3,0093	-0,1754	4,0596	3,8186	0,0542
0,386	-1,0236	-0,9670	-0,0134	2,630	2,5008	-0,1845	3,7300	3,5142	0,0188
0,429	-0,9182	-0,8680	-0,0105	2,020	1,9337	-0,1698	3,3639	3,1750	-0,0013
0,471	-0,8084	-0,7648	-0,0083	1,349	1,3073	-0,1402	2,9610	2,8005	-0,0098
0,514	-0,6962	-0,6591	-0,0066	0,617	0,6212	-0,1040	2,5217	2,3905	-0,0103
0,557	-0,5837	-0,5530	-0,0055	-0,176	-0,1254	-0,0667	2,0457	1,9447	-0,0058
0,6	-0,4733	-0,4489	-0,0046	-1,030	-0,9329	-0,0315	1,5331	1,4628	0,0014
0,643	-0,3677	-0,3490	-0,0040	-1,944	-1,8018	0,0001	0,9840	0,9445	0,0100
0,686	-0,2695	-0,2560	-0,0034	-2,920	-2,7327	0,0258	0,3983	0,3895	0,0184
0,729	-0,1817	-0,1727	-0,0028	-3,956	-3,7260	0,0388	-0,2240	-0,2025	0,0236
0,771	-0,1074	-0,1022	-0,0020	-5,054	-4,7820	0,0245	-0,8828	-0,8316	0,0196
0,814	-0,0500	-0,0476	-0,0012	-6,212	-5,9008	-0,0431	-1,5781	-1,4980	-0,0041
0,857	-0,0130	-0,0124	-0,0004	-7,430	-7,0826	-0,1990	-2,3100	-2,2018	-0,0619
0,9	0,0000	0,0000	0,0000	-8,200	-7,7372	-2,5700	-2,9000	-2,5710	-0,1123

Приклад 3. Бетонна плита з шарнирним обпиранням по контуру.

Як третій приклад, розглянемо круглу плиту товщиною  $h = 0,12\text{ м}$  і радіусом  $a = 1,8\text{ м}$ , яка знаходиться під дією рівномірно розподіленого навантаження  $q = 15\text{ кПа}$ . Матеріал — бетон ( $E = 1,5 \cdot 10^7\text{ кПа}$ ;  $\mu = 0$ ).

Результати розрахунків при нулевому значенні коефіцієнту постелі, при постійному його значенні та при такому, що змінюється за законом опуклої параболи, наведені в табл. 3.

Таблиця 3

**Прогини і моменти при різних коефіцієнтах постелі в бетонній плиті з шарнирним обпиранням**

Коорд., м	$W$ , мм			$M_r$ , кНм/м			$M_\theta$ , кНм/м		
	Закон зміни коефіцієнту постелі								
	Нуль	Постійний	Опукла парабола	Нуль	Постійний	Опукла парабола	Нуль	Постійний	Опукла парабола
0	-5,6948	-2,5135	-0,0659	9,1011	3,7513	0,4872	9,1060	3,7521	0,4926
0,043	-5,6794	-2,5071	-0,0651	9,0642	3,7452	0,4516	9,0939	3,7502	0,4806
0,086	-5,6330	-2,4880	-0,0626	8,9821	3,7315	0,3775	9,0668	3,7457	0,4553
0,129	-5,5559	-2,4562	-0,0588	8,8588	3,7101	0,2782	9,0258	3,7387	0,4195
0,171	-5,4485	-2,4117	-0,0538	8,6944	3,6802	0,1657	8,9709	3,7292	0,3759
0,214	-5,3112	-2,3546	-0,0480	8,4884	3,6406	0,0528	8,9023	3,7168	0,3275
0,257	-5,1447	-2,2851	-0,0419	8,2411	3,5900	-0,0488	8,8200	3,7013	0,2773
0,3	-4,9498	-2,2033	-0,0358	7,9533	3,5265	-0,1306	8,7238	3,6823	0,2282
0,343	-4,7273	-2,1094	-0,0300	7,6235	3,4482	-0,1874	8,6139	3,6594	0,1824
0,386	-4,4784	-2,0036	-0,0248	7,2532	3,3528	-0,2180	8,4902	3,6322	0,1417
0,429	-4,2041	-1,8863	-0,0202	6,8414	3,2378	-0,2242	8,3528	3,6002	0,1069
0,471	-3,9059	-1,7578	-0,0165	6,3886	3,1004	-0,2103	8,2017	3,5628	0,0785
0,514	-3,5853	-1,6184	-0,0134	5,8947	2,9375	-0,1816	8,0368	3,5193	0,0564
0,557	-3,2437	-1,4688	-0,0111	5,3592	2,7460	-0,1431	7,8582	3,4692	0,0400
0,6	-2,8830	-1,3096	-0,0092	4,7831	2,5223	-0,0991	7,6658	3,4116	0,0288
0,643	-2,5052	-1,1414	-0,0079	4,1655	2,2627	-0,0527	7,4597	3,3459	0,0220
0,686	-2,1121	-0,9650	-0,0067	3,5076	1,9635	-0,0064	7,2399	3,2712	0,0188
0,729	-1,7060	-0,7815	-0,0057	2,8071	1,6206	0,0362	7,0065	3,1867	0,0186
0,771	-1,2892	-0,5919	-0,0046	2,0672	1,2300	0,0686	6,7594	3,0915	0,0204
0,814	-0,8642	-0,3975	-0,0033	1,2856	0,7874	0,0780	6,4987	2,9848	0,0231
0,857	-0,4335	-0,1996	-0,0018	0,4631	0,2886	0,0423	6,2243	2,8656	0,0250
0,9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	6,0750	2,7988	0,0254

На рис. 4 показано залежність прогину від координати для бетонної плити, що жорстко зашциплена по контуру та спирається на основу, коефіцієнт постелі якої є постійним, а на рис. 5 — для цієї ж плити, але тут коефіцієнт постелі змінюється за законом опуклої параболи.

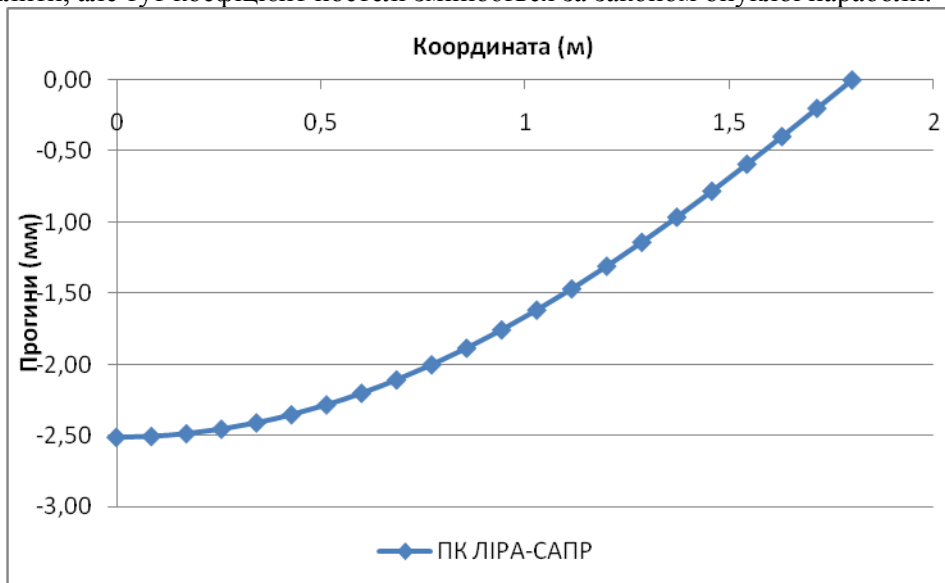


Рис. 4. Залежність прогину від координати при постійному коефіцієнті постелі

Приклад 4. Бетонна плита з жорстким закріпленням по контуру.

Таблиця 4

**Прогини і моменти при різних коефіцієнтах постелі в бетонній плиті, що жорстко закріплена**

Коорд., м	$W$ , мм			$M_r$ , кНм/м			$M_\theta$ , кНм/м		
	Закон зміни коефіцієнту постелі								
	Нуль	Постійний	Опукла парабола	Нуль	Постійний	Опукла парабола	Нуль	Постійний	Опукла парабола
0	-1,1341	-0,9119	-0,0037	3,0182	2,3521	-0,0037	3,0233	2,3556	-0,0036
0,043	-1,1290	-0,9079	-0,0037	2,9812	2,3263	-0,0043	3,0112	2,3472	-0,0038
0,086	-1,1136	-0,8959	-0,0037	2,8990	2,2688	-0,0057	2,9841	2,3283	-0,0042
0,129	-1,0882	-0,8761	-0,0037	2,7756	2,1821	-0,0080	2,9431	2,2996	-0,0050
0,171	-1,0532	-0,8488	-0,0038	2,6110	2,0655	-0,0113	2,8883	2,2610	-0,0060
0,214	-1,0090	-0,8142	-0,0039	2,4051	1,9184	-0,0153	2,8196	2,2124	-0,0073
0,257	-0,9563	-0,7728	-0,0040	2,1581	1,7399	-0,0197	2,7373	2,1537	-0,0089
0,3	-0,8958	-0,7252	-0,0042	1,8699	1,5291	-0,0234	2,6411	2,0847	-0,0106
0,343	-0,8285	-0,6720	-0,0045	1,5405	1,2848	-0,0250	2,5312	2,0052	-0,0122
0,386	-0,7553	-0,6141	-0,0049	1,1699	1,0058	-0,0222	2,4076	1,9148	-0,0134
0,429	-0,6776	-0,5522	-0,0053	0,7589	0,6908	-0,0126	2,2701	1,8133	-0,0138
0,471	-0,5965	-0,4875	-0,0058	0,3053	0,3383	0,0059	2,1190	1,7004	-0,0129
0,514	-0,5137	-0,4211	-0,0063	-0,1887	-0,0529	0,0343	1,9541	1,5758	-0,0103
0,557	-0,4307	-0,3541	-0,0067	-0,7239	-0,4843	0,0709	1,7755	1,4391	-0,0057
0,6	-0,3493	-0,2881	-0,0070	-1,3001	-0,9573	0,1102	1,5831	1,2901	0,0009
0,643	-0,2713	-0,2246	-0,0070	-1,9174	-1,4731	0,1421	1,3770	1,1284	0,0090
0,686	-0,1989	-0,1652	-0,0065	-2,5758	-2,0329	0,1517	1,1572	0,9536	0,0174
0,729	-0,1341	-0,1117	-0,0055	-3,2753	-2,6377	0,1206	0,9237	0,7655	0,0242
0,771	-0,0792	-0,0663	-0,0040	-4,0158	-3,2882	0,0304	0,6764	0,5638	0,0271
0,814	-0,0369	-0,0310	-0,0023	-4,7974	-3,9850	-0,134215	0,4155	0,3482	0,0231
0,857	-0,0096	-0,0081	-0,0007	-5,6199	-4,7282	-0,3808	0,1408	0,1184	0,0095
0,9	0,0000	0,0000	0,0000	6,0754	-5,1375	-0,5333	0,0000	0,0000	0,0000

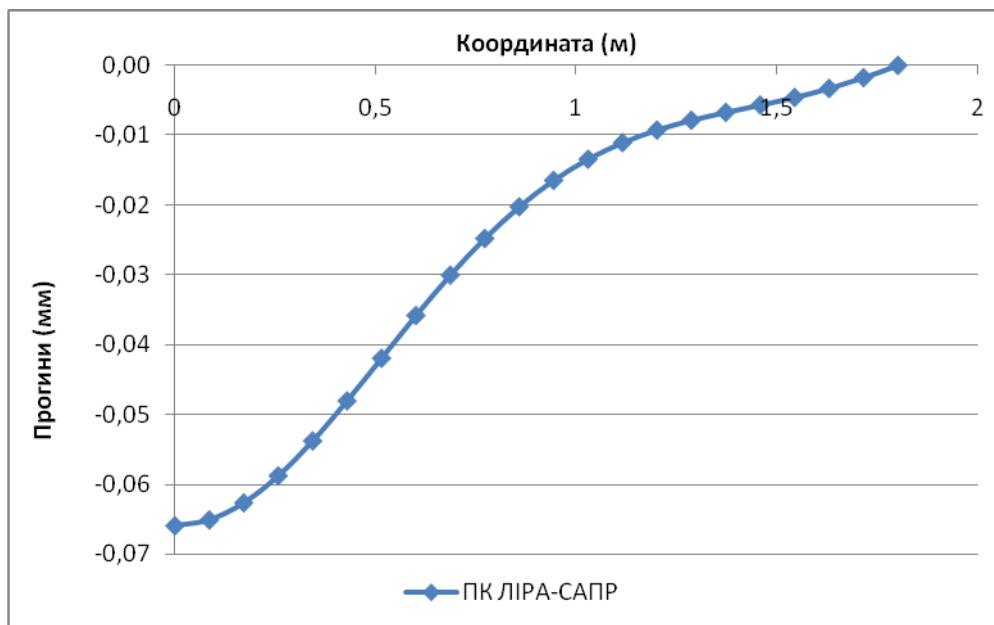


Рис. 5. Прогин при коефіцієнті постелі, що змінюється за законом опуклої параболи

**Висновки.** Таким чином, розглянуто дванадцять варіантів розрахунку суцільної круглої пластини (плити) при двох умовах обпирання і трьох різних законах змінення коефіцієнту постелі. У всіх варіантах результати повністю збігаються з відомими результатами згину плит, що не мають пружної основи та у випадку, коли ця основа існує, а її опір є постійним [11]. Розбіжність тут дуже незначна — у третій значущій цифрі після коми для прогину при шарнірному обпиранні та у другій — для моментів  $M_r, M_\theta$ . При жорсткому затисненні прогини та моменти також

відрізняються від відповідних значень відомих рішень у другій значущій цифрі після коми. Що стосується пружної основи, коефіцієнт постелі якої змінюється за законом опуклої параболи, то тут дані для порівняння відсутні; потрібний альтернативний метод, який дозволить виконати аналогічні розрахунки. Бажано, щоб цей метод був аналітичним та дозволяв проводити розрахунки з великою точністю та без обмежень відносно виду навантаження та закону зміни опору основи. Сказане і визначає напрямок наших подальших досліджень в області розрахунку пластин на змінній пружній основі.

1. Коренева Е.Б. Аналитические методы расчета пластин переменной толщины и их практические приложения. — М.: АСВ, 2009. — 240 с.
2. Габбасов Р.Ф., Мусса Сали. Обобщенные уравнения метода конечных разностей и их применение к расчету изгибаемых пластин переменной жесткости// Известия вузов. Строительство. —2004. —№5. —С. 17-22.
3. Габбасов Р.Ф., Н.Б. Уварова. Применение обобщенных уравнений метода конечных разностей к расчету плит на упругом основании / М.: Вестник МГСУ. — №4, 2012. — С. 102-107.
4. Андреев В.И., Барменкова Е.В., Матвеева А.В. Расчет плит переменной жесткости на упругом основании методом конечных разностей / М.: Вестник МГСУ. — №4, 2014. — С. 30-38.
5. Дьяченко Ю.П. Нестационарная задача динамики пластин переменного сечения в уточненной постановке / Автореферат кандидатской диссертации.— Саратов, 2008.—19с.
6. Идимешев С.В. Расчет напряженно-деформированного состояния изотропных прямоугольных пластин на упругом основании / Известия Алтайского государственного университета. — Вып. 1 (81), том 1, 2014. — С. 53-56.
7. Доронин А.М., Соболева В.А. Собственные колебания круглой пластинки, лежащей на переменном упругом основании типа Винклера / Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, № 4 (1). — 2014. — С. 254–258.
8. Zhang Y, Liu Y, Chen P and Murphy K D 2011 Buckling Loads and Eigen Frequencies of a Braced Beam Resting on an Elastic Foundation. Acta Mechanica Solida Silica. 24 510-518.
9. K.K. Viswanathana,1, P.V. Navaneetha krishnanb and Z. A. Aziza Buckling Analysis of Rectangular Plates with Variable Thickness Resting on Elastic Foundation IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science 23 (2015) 012006 p. 1-8.
10. Программный комплекс ЛИРА-САПР 2015. Учебное пособие / [Д.А. Городецкий, М.С. Барабаш, Р.Ю. Водопьянов и др. ]; под ред. академика РААСН А.С. Городецкого. — М., 2015. — 376 с.
11. Вайнберг Д. В. Расчет пластин / Д. В. Вайнберг, Е. Д. Вайнберг. — К: Будівельник, 1970. —436 с.

Стаття надійшла до редакції 02.12.2019