

УДК 539.375.

DOI 10.36910/6775.24153966.2021.71.16

Б.К. Гануліч

Луцький національний технічний університет

**НАПРУЖЕННЯ У М'ЯКОМУ ПРОШАРКУ
ПРИ РОЗТЯЗІ В УМОВАХ ПЛОСКОЇ ДЕФОРМАЦІЇ**

У статті пропонується варіант опису напруженого стану м'якого прошарку, що перебуває під впливом так званого ефекту контактної зміцнення. Заданий напружений стан описується із застосуванням функції напружень Ері, яка вибрана у вигляді полінома. При цьому задаються диференціальні умови рівноваги та граничні умови.

Ключові слова: м'який прошарок, розтягування, плоска деформація, напруження, ефект контактної зміцнення.

Б.К. Гануліч**НАПРЯЖЕНИЯ В МЯГКОЙ ПРОСЛОЙКЕ
ПРИ РАСТЯЖЕНИИ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

В статье предлагается вариант описания напряженного состояния мягкой прослойки, что находится под влиянием так называемого эффекта контактного упрочнения. Упомянутое напряженное состояние описывается применением функции напряжений Эри, выбранной в виде полинома. При этом удовлетворяются дифференциальные условия равновесия и граничные условия.

Ключевые слова: мягкий слой, растяжение, плоская деформация, напряжение, эффект контактного упрочнения.

В.К. Ganulich**TENSION IN A SOFT LAYER
WHEN STRETCHING IN A FLAT DEFORMATION**

The article proposes an option for describing a tense state of a mild layer under the influence of the so-called contact strengthening effect. The said tense state is described using the function of the ERI stress, which is selected in the form of a polynomial. In this case, the differential conditions of equilibrium and boundary conditions are released.

Keywords: soft layer, stretching, flat deformation, stress, effect of contact strengthening.

Постановка проблеми

При розтязі зразків з м'яким прошарком (рис.1) виявляється [1-5], що зі зменшенням товщини h м'якого шару M границя плинності і границя міцності σ_0 подібних зразків збільшується, причому збільшення, в залежності від товщини прошарку і співвідношення границь плинності і міцності матеріалу прошарку M і основного металу T , може досягати кількох разів.

Підвищення межі плинності зразків з прошарками у відношенні до межі плинності і міцності цілісних зразків із матеріалу прошарку отримало назву ефекту контактної зміцнення. Метод А.Л. Немчинського визначення опору відриву [5] передбачає стан однорідного одновісного розтягу прошарку геть до розриву.

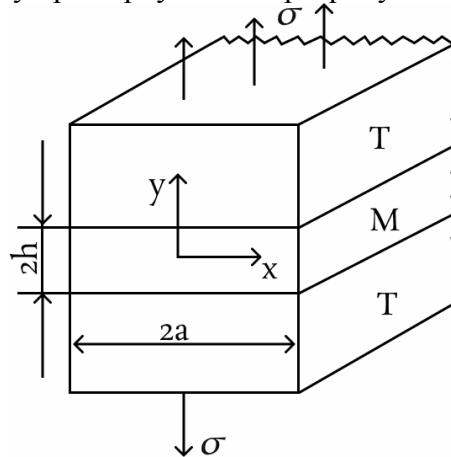


Рис.1. Зразок із м'яким прошарком при розтязі в умовах плоскої деформації.

Важко допустити, що при $\langle \sigma_y \rangle \sigma_{0,2}^M$ ($\langle \sigma_y \rangle$ - напруження розтягу на достатньо великій віддалі від прошарку, $\sigma_{0,2}^M$ - умовна межа плинності матеріалу прошарку) напружений стан у прошарку буде однорідним розтягом.

Вперше задачу про стиск пластичного шару між абсолютно жорсткими плитами що наближаються з постійною швидкістю розглянув Л. Прандтль [6]. Схема плоского плинущого шару зображена на рис. 2.

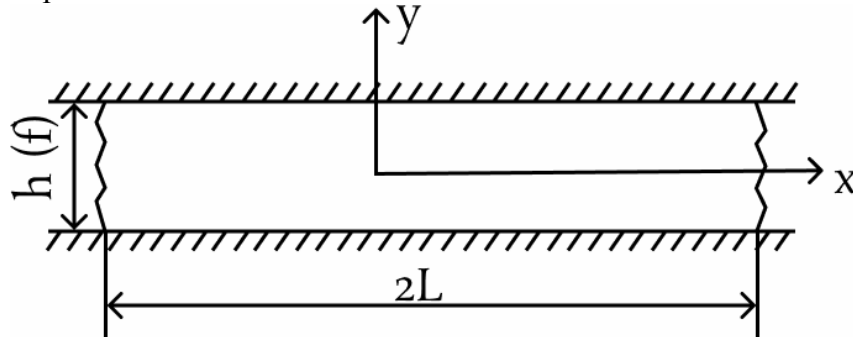


Рис. 2. Схема плоского плинущого шару між плитами, що зближуються з постійною швидкістю

Для визначення компонент напружень σ_x , σ_y , τ_{xy} ($\sigma_z = 0,5(\sigma_x + \sigma_y)$ - матеріал прошарку нестискувальний) Прандтль взяв три рівняння - два рівняння рівноваги і умову текучості:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0,$$

$$(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4\tau_s^2. \quad (2)$$

де τ_s - границя плинності, при зсуві.

Після диференціювання першого рівняння по y , другого по x і віднявши, він отримав

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \tau_{xy} = 0. \quad (3)$$

Підставивши із (2) $\sigma_y - \sigma_x = 2\sqrt{\tau_s^2 - \tau_{xy}^2}$,

Прандтль отримав наступне рівняння

$$2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sqrt{\tau_s^2 - \tau_{xy}^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \tau_{xy} = 0. \quad (4)$$

Розглядаючи переріз $|x|/h \ll 1$, $(L - |x|)/h \ll 1$ та, допускаючи що поверхні плит є поверхнями ковзання ($\tau_{xy}(x; \pm h/2) = \tau_s = const$), та, що τ_{xy} лінійно залежить тільки від y , із (4), Прандтль отримує наступний розподіл напружень у шарі:

$$\tau_{xy} = -2\tau_s y/h, \quad (5)$$

$$\sigma_y = -2\tau_s \left[(L - |x|)/h + \frac{\pi}{2} \right], \quad \sigma_x = -2\tau_s \left[(L - |x|)/h + \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{h^2 y^2 / h} \right].$$

Враховуючи важливість задач, подібних до розглянутої Л. Прандтлем у технології обробки металів тиском, аналогічні задачі розглядаються і іншими авторами [7-12]. У роботі [8] відмічається, що допущення про постійність дотичних напружень на площинах контакту і рівність їх границі плинності τ_s , можливе лише у випадку ідеального зчеплення матеріалу, що стискається, з поверхнею плит. Тому у [8] наводиться розв'язок, де дотичне напруження на поверхнях контакту $\tau_1 = \tau_2 < \tau_s$. У роботі [9] розглядається задача Л. Прадтля для термо-жорстко-пластичного шару із врахуванням залежності границі плинності від температури та з виділенням тепла. Узагальнений розв'язок для задач плинності тонкого шару по поверхнях пропонується у роботі [9]. Розв'язок задачі про стиск жорстко-пластичної смуги між паралельними плитами в умовах плоскої деформації із врахуванням тертя ковзання проводиться у роботі [11].

У зв'язку із запропонованим А.Л. Немчинським методом визначення опору відриву аналіз напруженого стану на всіх етапах навантаження досить тонкого прошарку ($h/d \ll 1$) при осесиметричній деформації був виконаний Л.М. Качановим [13].

Пізніше Качанов розглянув задачу стосовно тонкого прошарку в умовах плоскої деформації [14] та у новому формулюванні при осесиметричній деформації [15]. При цьому опис процесу деформування зразка з прошарком наступний [12]: у пружній стадії, коли $\langle \sigma_y \rangle < \sigma_{0,2}^M$, прошарок М, як і більш тверді частини Т, знаходиться у стані одновісного однорідного розтягу, дотичні напруження на поверхнях контакту М і Т відсутні; коли інтенсивність розтягуючих (стискаючих) напружень досягне величини $\sigma_{0,2}^M$ ($\langle \sigma_y \rangle \geq \sigma_{0,2}^M$), прошарок відразу і повністю переходить у пластичний стан; проте розвиток пластичних деформацій втримується більш твердими частинами, які продовжують деформуватись тільки пружно; на контактних поверхнях виникають та із збільшенням навантаження збільшуються дотичні напруження; прошарок вже тепер перебуває в об'ємному напруженому стані, який із збільшенням навантаження все більше віддаляється від одновісного розтягу; збільшення навантаження припиняться у момент, коли дотичні напруження на всій площині контактних поверхонь досягнуть рівня τ_s^M (наступає граничний напружений стан), після чого наступить просковзування прошарку, що зумовить в'язке руйнування.

Згідно [13] середні напруження у граничному пружному стані прошарку у випадку осесиметричної деформації мають значення

$$\langle \sigma_y \rangle = \sigma_{0,2}^M / (3\sqrt{3}\psi), \quad (6)$$

де $\psi = h/d$ - відносна товщина прошарку.

Оскільки $\langle \sigma_y \rangle$ не може бути менше $\sigma_{0,2}^M$, то розв'язок (6) втрачає зміст при $\psi \leq 1/3\sqrt{3}$, причому формально отримується, що ефект контактного зміцнення може спостерігатись лише у прошарках, де $0 < \psi < 1/3\sqrt{3} \approx 0,192$. Проте дослід показує [12], що цей ефект помітно виявляється при $\psi < 1 \dots 1,3$, тобто у значно широкому інтервалі значень ψ .

Внаслідок невідповідності розв'язку (6) експерименту у роботі [14] цей розв'язок переглянутий і отримано наступне значення середнього розтягуючого напруження для граничного пружного стану зразків з прошарками при осесиметричній деформації

$$\langle \sigma_y \rangle = \sigma_{0,2}^M \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3\sqrt{3}\psi} \right). \quad (7)$$

Згідно [12] в умовах плоскої деформації

$$\langle \sigma_y \rangle = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_{0,2}^M \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4\psi} \right). \quad (8)$$

Із значень граничних середніх розтягувальних напружень (6-8) видно, що величина $\langle \sigma_y \rangle$ прямує до нескінченного великого значення при $\psi \rightarrow 0$ і, навпаки, при $\psi \rightarrow \infty$ σ_y рівне $\pi \sigma_{0,2}^M / 2$ у розв'язку (6), $\pi \sigma_{0,2}^M / 4$ - у (7) та (8). Ці результати що отримуються при $\psi \rightarrow 0$ і $\psi \rightarrow \infty$, є недоліками розв'язків (6-8), так як очевидно, що при $\psi \rightarrow 0$ (зразок без прошарку) границя плинності з'єднання $\langle \sigma_y \rangle$ повинна прямувати до $\sigma_{0,2}^T$ - границі плинності основного матеріалу Т та при $\psi \rightarrow \infty$, що відповідає випробуванню цілісного зразка із матеріалу прошарку М, до $\sigma_{0,2}^M$ границі плинності матеріалу М. Крім цього у наведених розв'язках (6-8) немає пояснення експериментально спостережуваному факту [15-17] втягуванню у пластичну деформацію металу Т, у всіх експериментах визначення границі плинності зразків із м'якими прошарками при розтязі просковзування прошарку по контакту матеріалів Т і М не спостерігалось.

Враховуючи наведені недоліки результатів (6-7) у роботі [18] запропоновано новий спосіб розрахунку граничного стану зварного з'єднання з м'яким прошарком і отримано, що в умовах плоскої деформації при $\sigma_{0,2}^T \rightarrow \infty$ границя навантаження визначається наступною формулою

$$\sigma_y = \sigma_{0,2}^M \frac{1 + \psi^2}{2\psi}. \quad (9)$$

Мета роботи: описати напружений стан м'якого прошарку при розтязі в умовах плоскої деформації, коли значення середніх розтягувальних напружень більші від межі плинності матеріалу прошарку і менші від напружень, що зумовлюють пластичне течіння (плинність) прошарку.

Постава задачі і розв'язок. Якщо $\langle \sigma_y \rangle < \sigma_{0,2}^M$ увесь зразок (рис.1) перебуває у стані однорідного розтягу. Коли $\langle \sigma_y \rangle$ стають більшими, ніж $\sigma_{0,2}^M$ м'який прошарок переходить у новий напружений стан, до тих пір, поки напруження не досягнуть значення $\langle \sigma_y \rangle$, що визначається формулою (9).

У підручнику [19] стверджується, що описати напружений стан прямокутної області можна завжди, якщо вибрати функцію напружень Ері у вигляді полінома.

Напруження у прямокутнику (рис.1) $|x| \leq a$, $|y| \leq h$ (рис.1) очевидно повинні задовольняти умови:

1) диференціальні умови рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0; \quad (1)$$

$$2) \sigma_x(x, y) = 0, \tau_{xy}(x, y) = 0, \text{ при } |x| = a \quad (10)$$

бічні поверхні вільні від напружень;

$$3) \int_{-a}^a \sigma_y(x, y) dx = 2a\sigma, \forall y \in [-h, h], \quad (11)$$

де σ - прикладене навантаження (рис.1)

Для того, щоб задовольнити умови рівноваги, достатньо прийняти

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}, \quad (12)$$

де $\varphi = \varphi(x, y)$ - довільна, двічі диференційована функція. Оскільки після переходу прошарку у "новий" напружений стан ($\langle \sigma_y \rangle > \sigma_{0,2}^M$) закон Гука про лінійну залежність між напруженнями і деформаціями порушується, то $\varphi(x, y)$ необов'язково буде задовольняти бікватратне рівняння Лапласа. Щоб задовольнити умови (1) (10) і (11) достатньо прийняти

$$\varphi(x, y) = ky^2(x^2 - a^2)^2 + \frac{\sigma}{2}x^2, \quad (13)$$

де k - постійний параметр, що підлягає визначенню.

Тому, згідно (12) і (13):

$$\sigma_x = 2k(x^2 - a^2)^2, \quad (14)$$

$$\sigma_y = \sigma + 2ky^2(3x^2 - a^2); \tau_{xy} = -4kxy(x^2 - a^2).$$

Оскільки $\tau_{xy}(0, 0) = 0$, тобто у точці $(0, 0)$ $\sigma_x(x, y); \sigma_y(x, y)$ є головним напруженнями, то постійну k визначаємо з умови

$$\sigma_y(0, 0) - \sigma_x(0, 0) = 2\tau_s, \quad (15)$$

звідки
$$k = \frac{\sigma - 2\tau_s}{2a^4}, \quad (16)$$

де σ - прикладене напруження розтягу (рис. 1),

τ_s - границя плинності металу M (рис. 1).

Таким чином, у прошарку, коли $\sigma > \sigma_{0,2}^M$, виникають напруження

$$\sigma_x = \frac{\sigma - 2\tau_s}{a^4}(x^2 - a^2)^2, \sigma_y = \sigma + \frac{\sigma - 2\tau_s}{a^4}y^2(3x^2 - a^2), \tau_{xy} = -2\frac{\sigma - 2\tau_s}{a^4}xy(x^2 - a^2). \quad (17)$$

На поверхні контакту, де $|y| = h$:

$$\sigma_x = \frac{\sigma - 2\tau_s}{a^4}(x^2 - a^2)^2, \sigma_y = \sigma + \frac{\sigma - 2\tau_s}{a^4}h^2(3x^2 - a^2), \tau_{xy} = \frac{\sigma - 2\tau_s}{a^4}(x^2 - a^2). \quad (18)$$

При $x = 0$:

$$\sigma_x = \sigma_y - 2\tau_s, \sigma_y = \sigma - (\sigma_y - 2\tau_s)\frac{y^2}{a^2}, \tau_{xy} = 0. \quad (19)$$

При $y = 0$:

$$\sigma_x = \frac{\sigma - 2\tau_s}{a^4}(x^2 - a^2)^2, \sigma_y = \sigma, \quad (20)$$

$$\tau_{xy} = 0.$$

Висновки.

Запропоновано спосіб опису напруженого стану м'якого прошарку при розтязі в умовах плоскої деформації шляхом вибору функції напружень Ері у вигляді відповідного полінома.

Оскільки вибраний вид полінома є найпростішим, то слід сподіватися, що отриманий розв'язок є найвірогіднішим.

Проведено аналіз розв'язку шляхом опису напружень у характерних плоских перерізах прошарку.

Список використаних джерел:

1. Leach R.N. When and how to use silver solder. – Metal Industry, 49. 1936, p. 511.
2. Лашко Н.Ф., Лашко С.В. Пайка металлов. М: Машиностроение, 1967. – С. 367.
3. Moffat W.G., Wulf J. Strength of silver brased joints in mild steel. – Journ Metals, 9.4., 1957, p. 442.
4. Colbus J., Keel C.C., Blank D.M. Notes on the strength of brased joints. – Welding Journal, 41, № 9, 1962. p. 413.
5. Немчинский А.Л. Определение сопротивления отрыву с применением гладких образцов. – Заводская лаборатория., 1952, № 11. -С. 1382-1384.
6. Прандтль Л. Примеры применения теоремы Генкик равновесию пластических тел. – ZAMM, 1923, p. 401-406. Теория пластичности. Сборник статей под. ред. Работоева Ю.Н. – М.: Гос. издат. Иностр. Лит. 1948.
7. Ильюшин А.А. Вопросы течения пластического вещества по поверхностям. – ПММ, т.8, 1954, вып.3. -С. 256-268.
8. Григорян С.С. Об одной задаче Л. Прандтля и теории течения пластического вещества по поверхностям. – Докл. АН СССР, 1981, 257, № 5. -С. 1075-1077.
9. Друянов Б.А., Светова Е.А. Сжатие тонкого терможесткопластического слоя жесткими шереховатыми плитами, - В кн.: Теория и практика производства труб. М.: 1979, с, 121-126.
10. Кийко Л.К. Обочащение задачи Прандтля о сжатии полосы для сжимаемого материала, - Вестник МГУ, сер. мех., 1980, №5. -С. 66-70.
11. Das N.S., Banersee, Collins I.F. Plane strein compression of rigidperfectly plastic between parallel dies with slipping friction. – Trans ASME. J. Appl. Mech., 1979, 46, № 2, p. 317-321.
12. Бакши О.А. О напряженном состоянии мягких прослоек в сварных соединениях при растяжении (сжатии). Вопросы сварного производства. – Сб. научных трудов ЧПИ, Челябинск, 1965, Вып. 33. -С. 3-26.
13. Качанов Л.М. К задаче о деформации пластического слоя. Докл. АН СССР, 1954, 96, С. 249-252.
14. Бакши О.А, Качанов Л.М. О напряженном состоянии пластической прослойки при осесиметричной деформации. – Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2 -С. 134-137.
15. Шахматов М.Б. Прочность сварных соединений с однородной мягкой прослойкой с учетом деформирования приконтактных участков твердого металла. – Вопросы сварочного производства. Сю. научных трудов ЧПИ, № 203, Челябинск, 1978. – С. 3-8.
16. Шатов А.А. К вопросу вовлечения твердого металла сварного соединения в пластическую деформацию. – Там же. -С. 60-63.
17. Прочность тонких металлических прослоек в композициях / Тронь А.С., Финкель В.А., Рыбальченко П.Д., Минаков В.П. – Проблемы прочности, 1975, № 5. – С. 50-62.
18. Ганулич Б.К., Гнып И.П., Похмурский В.И. К вопросу о контактном упрочнении мягких прослоек. – ФХММ, 1981, № 3. -С. 68-73.
19. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. (Пер. с англ.) – М.: Наука, 1975. – 575 с.