УДК 517.9, 519.7, 330.4

Данілов В.Я., Жиров О.Л., Зінченко А.Ю.

ОЦІНКИ ЕКОНОМІЧНИХ ПОКАЗНИКІВ В УМОВАХ МУЛЬТИПЛІКАТИВНИХ ТА АДИТИВНИХ ЗАВАД

Побудовані верхні та нижні мінімаксні оцінки вектора економічних показників за спостереженнями, що містять мультиплікативні та адитивні завади. Як приклад використання верхніх та нижніх оцінок, отримана оцінка довільного лінійного функціонала шуканого вектора.

***Ключові слова:** економічні показники, мінімаксні оцінки, лінійний функціонал, мультикативні завади, адитивні завади.*

Построены верхние и нижние минимаксные оценки вектора экономических показателей за наблюдениями, которые содержат мультипликативные и адитивные помехи. Как пример использования верхних и нижних оценок, получена оценка произвольного линейного функционала искомого вектора.

***Ключевые слова:** экономические показатели, минимаксные оценки, линейный функционал, мультикативные помехи, адитивные помехи.*

Lover and higher minimax vector estimations of economic characteristics are derived for conditions of multiplicative and additive perturbed observations. The results are used for estimation of linear with respect to vector functional.

***Key words:** economic indicators, minimax estimations, linear functional, multiplycative hindrances, aditional hindrances.*

ВСТУП

Розглядаються мінімаксні оцінки економічних показників за часовими спостереженнями, що містять мультиплікативні та адитивні завади [1-4].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай на часовому інтервалі [0, T] спостерігається вектор y(t),

$$y(\mathrm{t}) = H_1(t)x + H_2(t, \xi(t))x + \eta(t),$$
$$M\eta(t) = 0,\ M\eta(t)\eta(t)^T = R_\eta(t).$$

де $x \in R^n$, $H_i(t),\ i = \overline{1{,}2}$ – матриці розмірності $m \times n$, $\eta(t)$ – випадковий вектор,

Припустимо також, що ξ – випадковий вектор і $M\xi(0) = 0,\quad M\xi(t)\xi^T(t) = R\xi(t),$

а матриця $H_2(t,v)$ лінійна по v, тобто $H_2(t, \alpha v_1 + \beta v_2) + \beta H_2(t, v_2)$ для довільних чисел α, β, та векторів v_1, v_2.

Якщо $R_\eta(t)$ невідома кореляційна матриця із множини $\Re$, то під лінійною мінімаксною оцінкою вектора $S(t)x$, де S – матриця розмірності $k \times n$, будемо розуміти вираз

$$K(t)y(t) + d(t),$$

такий що

$$\inf_{K,d} \ \underset{\Re}{Sup} \ M\int_O^T \| S(t)x - K(t)y(t) - d(t) \|^2 \ dt = \underset{\Re}{Sup} \ M\int_O^T \| S(t)x - K(t)y(t) - \hat{d}(t) \|^2 \ dt =$$

ГОЛОВНА ЧАСТИНА

Доведемо наступні твердження.

Твердження 1

Якщо x – випадковий вектор з середнім m та кореляційною матрицею R_x, який не залежить від ξ та η, то пара $(K,d) \in \arg\min I(K,d)$, де

$$I(K,d) = \int_0^T tr[(S(t)-K(t)H_1(t))R_x(S(t)-K(t)H_1(t))^T]dt +$$

$$+\int_0^T tr[K(t)M[H_2(t,\xi(t))\ xx^T H_2^T(t,\xi(t))]K^T(t)]dt + \underset{\Re}{Sup}\int_0^T tr[K(t)R_\eta(t)K^T(t)]dt +$$

$$+\int_0^T \ \| d(t)-(S(t)-K(t)H_1(t))\|^2\ dt.$$

Доведення. Помічаючи, що

$$S(t)x - K(t)y(t) - d(t) = (S(t)-K(t)H_1(t))x - K(t)H_2(t,\xi(t))x - K(t)\eta(t) - d(t) =$$

$$= (S(t)-K(t)H_1(t))(x-m) - K(t)\eta(t) - (d(t)-(S(t)-K(t)H_1(t))m) - K(t)H_2(t,\xi(t))x,$$

отримаємо

$$M\int_0^T \| S(t)x - K(t)y(t) - d(t)\|^2\ dt = M\int_0^T \| S(t)x - K(t)H_1(t) - (x-m)\|^2\ dt +$$

$$+M\int_0^T \| K(t)H_2(t,\xi(t))x\|^2\ dt + \int_0^T \| d(t)-(S(t)-K(t)H_1(t))m)\|^2\ dt + M\int_0^T \| K(t)\eta(t)\|^2\ dt.$$

Якщо перейти до конкретного виду норм матриць,

$$\underset{\Re}{Sup}\, M\,\| Sx - Ky - d\|^2 = I(K,d),$$

що і потрібно було показати.

Твердження 1 дає можливість отримати оцінку $d(t)$.

Твердження 2

Нехай $K \in \arg\min I_1(K)$, де

$$I_1(K) = \int_0^T tr(S(t)-K(t)H_1(t))R_x(S(t)-K(t)H_1(t))^T dt +$$

$$+\int_0^T tr(K(t)MH_2(t,\xi(t))xx^T H_2^T(t,\xi(t))K^T(t)dt + \underset{\Re}{Sup}\int_0^T trK(t)R_\eta(t)K^T(t)dt,$$

тоді $d(t) = (S(t)-K(t)H_1(t))m.$

Введемо далі означення нижньої та верхньої мінімаксних оцінок.

Означення. Оцінки, для яких $K_i, i=\overline{1,2}$ відшукуються з умов $K_i \in \arg\min I_i(K), де\ I_1(K) \le I_1(K) \le I_2(K)$ називаються нижніми і верхніми мінімаксними оцінками.

Твердження 3

Наступні дві оцінки $K(t)$:
$$K_1(t) = S(t)R_x(t)H_1^T(t)\{R_\eta^{(0)}(t) + MH_2(t,\xi(t))xx^T H_2^T(t,\xi(t)) + H_1(t)R_xH_1^T(t)\}^{-1}$$

та $K_2 \in \arg\min I_2(K),$

де

$$I_2(K)=\int_0^T tr(S(t)-K(t)H_1(t)R_x(S(t)-K(t)H_1(t))^T dt+$$

$$+\int_0^T trK(t)MH_2(t,\xi(t))xx^T H_2^T(t,\xi(t))K^T(t)dt+\sum_{i=1}^m \underset{R_\eta}{Sup}\, M\int_0^T (K(t)\eta(t),e_i)^2\,dt,$$

$e_i=(0...\underset{i}{1}...0),$ *а* $\quad R_\eta^{(0)}\in\Re,$

є, відповідно, нижньою и верхньою мінімаксними оцінками.
Доведення.

$$I_1(K)\geq I_1(K)=\int_0^T tr(S(t)-K(t)H_1(t))R_x(S(t)-K(t)H_1(t))^T dt+$$

$$\int_0^T tr[K(t)MH_2(t,\xi(t))xx^T H_2^T(t,\xi(t))K^T(t)]dt+\int_0^T tr[K(t)R_\eta^{(0)}(t)K^T(t)]dt.$$

Знайдемо похідну

$$\frac{d}{d\tau}I(K+\tau V\,|_{\tau=0}=-2\int_0^T tr(S(t)-K(t)H_1(t)R_xH_1^T(t)V^T(t)dt+$$

$$+2\int_0^T trK(t)MH_2(t,\xi(t))xx^T H_2^T(t,\xi(t))V^T(t)dt+$$

$$+2\int_0^T trK(t)R_\eta^{(0)}(t)V^T(t)dt=0.$$

$$K(t)\{R_\eta^{(0)}(t)+MH_2(t,\xi(t))xx^T H_2^T(t,\xi(t))+H_1(t)R_xH_1^T(t)\}=S(t)R_xH_1^T(t).$$

Звідки знаходимо оцінку

$$K_1(t)=S(t)R_x(t)H_1^T(t)\{R_\eta^{(0)}(t)+MH_2(t,\xi(t))xx^T H_2^T(t,\xi(t))+H_1(t)R_xH_1^T(t)\}^{-1}.$$

Друга частина твердження витікає з того, що

$$\underset{R}{Sup}\int_0^T trK(t)R_\eta(t)K^T(t)dt\leq\sum_{i=1}^m \underset{\ddot{R}_\eta}{Sup}M\int_0^T (K(t)\eta(t),e_i)^2\,dt,$$

$$K_2\in\arg\min I_2(K).$$

Твердження 4

Нехай $\Re=\{R_\eta(t):trR_\eta(t)\,Q\leq 1\}$,

де матриця $Q\geq 0$ така, що існує Q^{-1}. Тоді

$$K_2(t)=S(t)R_xH_1^T(t)\{Q^{-1}+MH_2(t,\xi(t))xx^T H_2^T(t,\xi(t))+H_1(t)R_xH_1^T(t)\}^{-1}.$$

Доведення. Через те, що

$$\underset{\Re}{Sup}\int_0^T trK(t)R_\eta(t)K^T(t)dt\leq\int_0^T trK(t)Q^{-1}K^T(t)dt,$$

$$I_2(K)=\int_0^T tr(S(t)-K(t)H_1(t))R_x(S(t)-K(t)H_1(t))^T dt+$$

$$+\int_0^T trK(t)[MH_2(t,\xi(t))xx^T H_2^T(t,\xi(t))+Q^{-1}]K^T(t)dt,$$

причому, легко перевірити наступне:

$\dfrac{d}{d\tau} I_2(K_2 + \tau V)\,|_{\tau=0} = 0$ і K_2 – матриця на якій досягається мінімум функціонала $I_2(K)$.

Нехай далі $S_x = (a,x)$, а множина

$\Re = \{R_\eta : trR_\eta(t)Q \le 1\}$, де $Q>0$ і $m=0$.

Твердження 5

Мінімаксна оцінка функціонала $(a,x)_x$ має вид $\overline{(a,x)}_x = (a,x)_x$, де

$$x = \int_0^T R_x H_1^T(t)\{Q^{-1} + MH_2(t,\xi(t))xx^T H_2^T(t,\xi(t)) + H_1(t)R_x H_1^T(t)\}^{-1} y(t)dt.$$

Доведення. Маємо

$$\underset{\Re}{Sup}\int_0^T M((a,x)_x - (u(t),y(t))_Y)^2 dt = \int_0^T (R_x[a - H_1^T(t)u(t)],[a - H_1^T(t)u(t)])dt +$$

$$+\int_0^T (MH_2(t,\xi(t))xx^T H_2^T(t,\xi(t))u(t),u(t))dt + \underset{\Re}{Sup}\int_0^T (R_\eta(t)u(t),u(t))dt =$$

$$= \int_0^T (R_x[a - H_1^T(t)u(t)],[a - H_1^T(t)u(t)])dt + \int_0^T ((R_2(t) + Q^{-1})u(t),u(t))dt = I(u),\ \textit{де}$$

$$R_2(t) = MH_2(t,\xi(t))xx^T H_2^T(t,\xi(t)).$$

Звідки приходимо до необхідної умови

$$\int_0^T \{-H_1(t)R_x(a - H_1^T(t)u(t)) + (R_2(t) + Q^{-1})u(t)\}dt = 0,$$

з якої, упускаючи прості викладки, знаходимо оцінку $u(t)$

$$u(t) = [R_2(t) + Q^{-1} + H_1(t)R_x H_1^T(t)]^{-1} H_1(t)R_x a.$$

Тепер, виходячи з доведеного, ми маємо право записати представлення оцінки функціонала $\overline{\overline{(a,x)}}_X = (u,y)_Y = (a,x)_X$, що і потрібно було показати.

ВИСНОВКИ

Побудовані верхні та нижні мінімаксні оцінки вектора економічних показників за спостереженнями, що містять мультиплікативні та адитивні завади. Як приклад використання верхніх та нижніх оцінок, отримана оцінка довільного лінійного функціонала шуканого вектора.

ЛІТЕРАТУРА

1. Наконечний О.Г. Мінімаксні оцінки функціоналів від правих частин варіаційних рівнянь з параметром // Вісник Київ.ун-ту. – Серія Кібернетика. – Вип. 1. – 2000. – С. 27-34
2. Наконечный А.Г. Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в гильбертовых пространствах. – К.: КГУ, 1985. – 83 с.
3. Наконечний О.Г., Данілов В.Я., Жиров О.Л. Задачі оптимального керування по неповних даних для еволюційних рівнянь зі спеціальними критеріями якості // Системні технології: Регіональний міжвузівський збірник наукових праць. – Випуск 1 (24). – Дніпропетровськ, 2003. – С. 171-178.
4. Жиров О.Л., Плічко Н.М., Позднякова І.В. Квазіоптимальне інвестування по нечітких критеріях. Економічний вісник Національного технічного університету «КПІ», 2004(1). – С. 428-432.

Рецензенти: д.т.н., проф. Коваленко І.І.
д.т.н., проф. Казарєзов А.Я.

 Стаття надійшла до редколегії 10.03.09