

## ВИБІР АНАЛІТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ ЧАСУ НАПРАЦЮВАННЯ МІЖ ВІДМОВАМИ ПРИСТРОЇВ ТЕРМІНАЛЬНОЇ МЕРЕЖІ

*Показано, що експоненціальний закон розподілу випадкової величини не завжди може бути використаний в якості аналітичної моделі закону розподілу часу напрацювання між відмовами пристроїв термінальної мережі. Здійснено вибір вищевказаної аналітичної моделі на основі розподілу Джонсона сімейства  $S_B$ . Розраховані параметри обраного розподілу.*

**Ключові слова:** модель розподілу; розподіл Джонсона; перетворення, що нормалізує; термінальна мережа.

*Показано, что экспоненциальный закон распределения случайной величины не всегда может быть использован в качестве аналитической модели закона распределения оперативного времени между отказами устройств терминальной сети. Осуществлен выбор вышеуказанной модели на основе распределения Джонсона семейства  $S_B$ . Расчитаны параметры выбранного распределения.*

**Ключевые слова:** модель распределения, распределение Джонсона, нормализующее преобразование, терминальная сеть.

*It is shown that the exponential law of distribution of the random variable may not always be used as an analytical model of the distribution of operating time between failures terminal network devices. It is implemented the choice of the analytical model based on the Johnson distribution of  $S_B$  family. The parameters of the selected distribution are calculated.*

**Key words:** distribution model; Johnson distribution; normalizing transformation; terminal network.

**Постановка проблеми.** Сейчас банковские платежные карты являются неотъемлемым инструментом проведения денежных расчетов. По данным Национального банка Украины по состоянию на 01.10.2011 г. в Украине насчитывалось 140 банков-членов карточных платежных систем; 33999000 держателей платежных карт; в обращении находилось 54285000 платежных карт, срок действия которых на указанную дату не закончился [1]. Наблюдается стойкая тенденция к увеличению числа операций с денежными средствами, проводимых в безналичной форме с использованием устройств терминальной сети – банкоматов и платежных терминалов. На 01.10.2011 г. инфраструктура обслуживания платежных карт составляла 31676 банкоматов, 116865 платежных терминалов, из которых 29251 – банковские, остальные – торговые [2].

В связи с большим объемом инфраструктуры терминальных сетей возникает проблема обеспечения бесперебойной надежной работы устройств терминальной сети [3]. Для повышения надежности работы терминальной сети существует несколько путей. Один из них – это дублирование устройств, что весьма затратно. Другой, значительно менее затратный, – это быстрое восстановление работоспособности устройств за счет создания мини-склада запасных частей. Иметь на складе запасные части для всех элементов устройств терминальной сети достаточно дорого, поэтому с целью минимизации количества запасных частей, требуемых в текущий момент, необходимо иметь возможность прогнозирования

отказов конкретных элементов устройств. Для прогнозирования отказов в обслуживании в данном случае требуется получить аналитическую модель закона распределения времени наработки между отказами устройств терминальной сети.

**Анализ последних исследований и публикаций.** В силу ряда причин на сегодняшний день вопросам оценки надежности работы терминальной сети и прогнозирования отказов в обслуживании не уделяется должного внимания [4]. Традиционно в теории надежности в качестве аналитической модели закона распределения времени наработки между отказами различных устройств принят экспоненциальный закон распределения случайной величины (СВ), однако подчеркивается, что данное распределение является приближенным [5, 6, 7]. В ряде случаев для устройств терминальной сети данная модель не является адекватной эмпирическому распределению, что приводит к необходимости дальнейшего ее уточнения.

Для выбора аналитической модели закона распределения СВ можно использовать семейства распределений Джонсона или классы распределений Пирсона. Джонсон описал систему плотностей вероятности, представляющих собой преобразование стандартного нормального распределения. Применением этих преобразований к стандартной нормальной величине можно аппроксимировать различные распределения, отличные от нормального [8]. Преимущество семейств распределений Джонсона состоит в том, что после определенных преобразований они приводят к

нормально распределенной СВ, для которой существует множество статистических критериев, методов и оценок, в частности, методы нахождения доверительных интервалов точечных оценок характеристик СВ – математического ожидания и среднеквадратического отклонения.

Успешное использование в последнее время распределений Джонсона для решения задач подбора аналитической модели распределения экспериментальных данных из разных практических областей позволяет применить данное семейство распределений и для решения поставленной задачи [9, 10, 11].

**Целью данной статьи** является выбор аналитической модели закона распределения времени наработки между отказами устройств терминальной сети на основе семейств распределений Джонсона.

**Изложение основного материала.** Семейства распределений Джонсона получены путем преобразования нормированной нормально распределенной СВ. В общем случае преобразование имеет вид [12]:

$$z = \gamma + \eta q(x, \varphi, \lambda); \eta > 0; -\infty < \gamma < \infty; \lambda > 0; -\infty < \varphi < \infty, \quad (1)$$

где  $q$  – произвольная функция;  $\gamma, \eta, \lambda, \varphi$  – параметры распределения, причем  $\gamma$  и  $\eta$  – параметры формы,  $\lambda$  – параметр масштаба,  $\varphi$  – параметр смещения;  $x$  – СВ, которая нормализуется;  $z$  – нормированная нормально распределенная СВ.

Джонсон предложил три семейства функций  $q$ :

$$\begin{aligned} q_1(x, \varphi, \lambda) &= \ln\left(\frac{x - \varphi}{\lambda}\right), x > \varphi; \\ q_2(x, \varphi, \lambda) &= \ln\left(\frac{x - \varphi}{\lambda + \varphi - x}\right), \varphi < x < \varphi + \lambda; \\ q_3(x, \varphi, \lambda) &= \operatorname{Arsh}\left(\frac{x - \varphi}{\lambda}\right), -\infty \leq x \leq +\infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Семейству функций  $q_1$  соответствует логарифмически нормальное распределение  $S_L$  Джонсона, семейству функций  $q_2$  соответствует семейство распределений  $S_B$  Джонсона, семейству функций  $q_3$  соответствует семейство распределений  $S_U$  Джонсона.

Функции плотности вероятности для семейств распределений Джонсона имеют вид [13]:

$$f_L(x) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}(x - \varphi)} \exp\left\{-\frac{\eta^2}{2} \left[\frac{\gamma - \eta \ln \lambda}{\eta} + \ln(x - \varphi)\right]^2\right\},$$

где  $x > \varphi; \eta > 0; -\infty < \gamma < \infty; \lambda > 0; -\infty < \varphi < \infty$ .

$$f_B(x) = \frac{\eta \lambda}{\sqrt{2\pi}(x - \varphi)(\lambda + \varphi - x)} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\gamma + \eta \ln\left(\frac{x - \varphi}{\lambda + \varphi - x}\right)\right]^2\right\}, \quad (3)$$

где  $\varphi < x < \varphi + \lambda; \eta > 0; -\infty < \gamma < \infty; \lambda > 0; -\infty < \varphi < \infty$ .

$$f_U(x) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi \left\{ \frac{(x - \varphi)^2}{\lambda^2} + \lambda^2 \right\}}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\gamma + \eta \ln\left(\frac{x - \varphi}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{x - \varphi}{\lambda}\right)^2 + 1}\right)\right]^2\right\},$$

где  $-\infty < x < \infty; \eta > 0; -\infty < \gamma < \infty; \lambda > 0; -\infty < \varphi < \infty$ .

Выбор соответствующего семейства распределений Джонсона выполняют по значениям оценок квадрата асимметрии  $A^2$  и эксцесса  $\varepsilon$  выборочного распределения.

Плоскость моментов для выбора семейства распределений Джонсона приведена, например, в [13]. После выбора соответствующего семейства распределений необходимо рассчитать его параметры. Далее следует проверить адекватность полученного закона распределения с помощью критерия согласия, например,  $\chi^2$  Пирсона.

Существует несколько подходов к определению параметров семейства распределений Джонсона. В общем виде параметры можно найти путем решения следующей задачи математического программирования:

$$\theta = \operatorname{argmin} \left\{ \sum_{j=1}^m \left[ y(x_j) - f(x_j, \theta) \right]^2 \right\},$$

где  $\theta$  – вектор неизвестных параметров,  $\theta = \{\gamma, \eta, \lambda, \varphi\}$ ;  $x_j$  – значение СВ  $x$  в середине  $j$ -го подинтервала;  $y(x_j)$  – значение ординаты гистограммы при значении  $x_j$ ;  $f(x_j, \theta)$  – выражение функции плотности вероятности при значении  $x_j$ ;  $m$  – количество подинтервалов гистограммы.

Возможно также нахождение неизвестных параметров в результате решения задачи [14]:

$$\theta = \operatorname{argmin} \left\{ A_z^2 + (\varepsilon_z - 3)^2 + m_z^2 + (D_z - 1)^2 \right\}, \quad (4)$$

где  $\theta$  – вектор неизвестных параметров,  $\theta = \{\gamma, \eta, \lambda, \varphi\}$ .

В случае большой выборки можно применять любой из указанных методов нахождения неизвестных параметров распределения, однако, в случае малой выборки лучше применять непараметрический метод путем решения задачи (4).

Осуществим выбор аналитической модели закона распределения времени наработки между отказами устройств терминальной сети. В качестве исходных экспериментальных данных рассмотрим выборку из 28106 случаев отказа в обслуживании 278 устройств терминальной сети за период 36 месяцев.

Время бесперебойной работы устройства терминальной сети зависит от многих факторов, среди которых можно выделить три группы. К первой группе можно отнести факторы, зависящие от технических характеристик конкретной модели терминального устройства. Ко второй группе можно отнести факторы, связанные с функционированием каналов связи и провайдером услуг доступа. Большое значение имеют также т.н. случайные факторы, которые можно отнести к третьей группе: проблемы с электроснабжением помещения, в котором установлено терминальное устройство, время года, проведение ремонтных работ различными службами, акты вандализма по отношению к терминальному устройству и т.д.

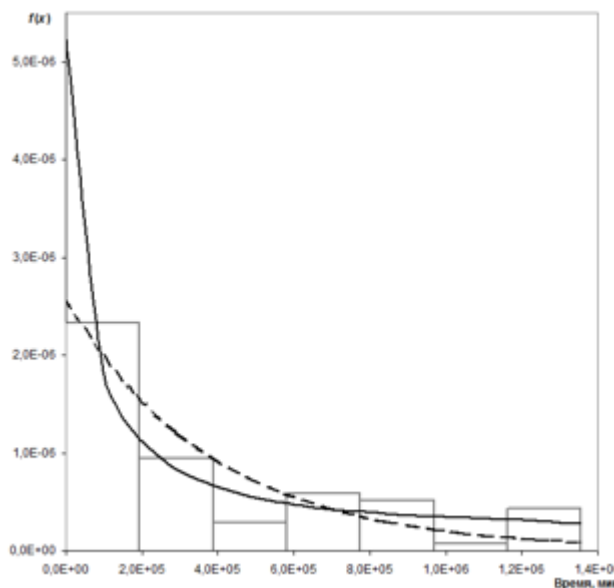
Группировка экспериментальных данных проводилась в зависимости от группы факторов, указанных выше. Для первой группы это модель терминального устройства и аппаратно-технические сбои. Для второй группы это провайдер услуг доступа и регион (город или область), а также вид отказа в обслуживании. Для третьей группы, поскольку эти отказы носят случайный характер, группировка зависит от конкретной ошибки. Анализ был проведен как без учета времени года, так и с учетом сезонов (холодный или теплый), т.к. часть устройств имеют внешнее исполнение и их отказы в обслуживании могут быть связаны со временем года. Кроме того, был проведен анализ отказов в обслуживании по каждой

модели терминального устройства без учета типа отказа. В качестве СВ для анализа было выбрано время наработки между отказами в обслуживании. Время измерялось в минутах. Всего было построено 284 гистограммы распределений экспериментальных данных, наиболее типичные из которых представлены на рис. 1. Пунктирной линией обозначен экспоненциальный закон распределения, сплошной – закон распределения семейства  $S_B$  Джонсона.

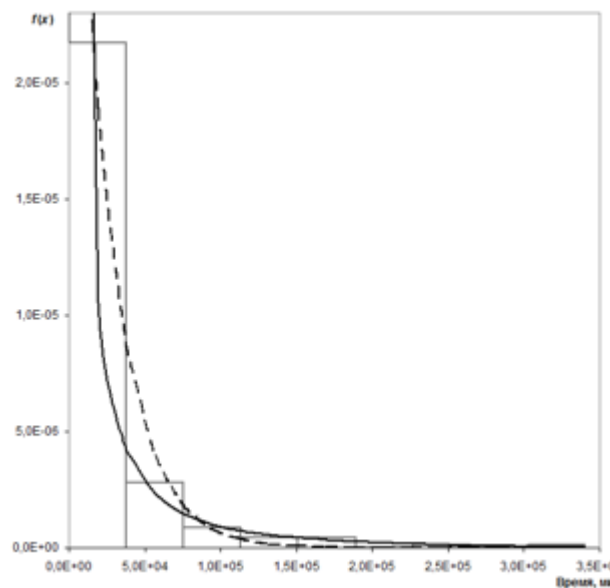
Характеристики распределения, представленного на рис. 1а: количество значений – 71; выборочное среднее – 392748,6; среднеквадратичное отклонение – 379663,6; асимметрия – 0,9; эксцесс – 2,65. Характеристики

распределения, представленного на рис. 1б: количество значений – 189; выборочное среднее – 24247,1; среднеквадратичное отклонение – 43044,7; асимметрия – 3,89; эксцесс – 22,92.

Исходя из анализа гистограмм экспериментальных данных была сформулирована гипотеза о том, что экспериментальные данные подчиняются экспоненциальному закону распределения СВ. Рассчитан параметр экспоненциального распределения  $\lambda$  [6]. Для распределения, представленного на рис. 1а,  $\lambda=2,5461 \cdot 10^{-6}$ . Для распределения, представленного на рис. 1б,  $\lambda=4,1242 \cdot 10^{-5}$ .



а



б

**Рис. 1.** Гистограммы наиболее типичных распределений экспериментальных данных:

а – группировка по проблеме «Сбой электропитания» при отсутствии UPS без учета времени года; б – группировка по модели банкомата 2000NG без учета типа ошибок без учета времени года.

Для проверки данной гипотезы использовался критерий согласия  $\chi^2$  Пирсона. С доверительной вероятностью 0,95 было установлено, что 71,43% группировок без учета времени года и 42,04% группировок с учетом времени года не соответствуют принятой гипотезе, что, в свою очередь, делает невозможным применение экспоненциального закона распределения СВ к рассматриваемой задаче [7].

Исходя из значений асимметрии и эксцесса СВ  $x$ , приведенных выше, с учетом области определения семейства распределений Джонсона, было выбрано семейство распределений  $S_B$ .

В соответствии с преобразованием (1) для (2) в результате решения задачи (4) выполнена нормализация

СВ  $x$ . Параметры распределения (3), представленного на рис. 1а:  $\gamma=0,7312$ ;  $\eta=0,4849$ ;  $\lambda=1376827,9$ ;  $\varphi=-2598,77$ . Параметры распределения (3), представленного на рис. 1б:  $\gamma=2,0759$ ;  $\eta=0,5391$ ;  $\lambda=374859,2$ ;  $\varphi=-119,84$ . При этом значения целевой функции составляли  $2,21 \cdot 10^{-8}$  и  $1,15 \cdot 10^{-8}$  соответственно.

Проверка адекватности полученного закона распределения выполнена с помощью критерия согласия  $\chi^2$  Пирсона. Исходя из полученных значений  $\chi^2$  и  $\chi^2_{кр}$ , представленных в табл. 1, с доверительной вероятностью 0,95 гипотеза о соответствии преобразованной выборки закону распределения СВ из семейства  $S_B$  Джонсона принимается.

Таблица 1

**Проверка адекватности аналитических законов распределения эмпирическому распределению**

Параметр	Распределения, приведенные на рис. 1:			
	а		б	
	экспоненциальный закон	закон $S_B$ Джонсона	экспоненциальный закон	закон $S_B$ Джонсона
Значение $\chi^2$	11,28	4,79	1479,55	4,49
$\chi^2$ критическое	11,07	5,99	14,07	9,49
Соответствие принятой гипотезе	Нет	Да	Нет	Да

**Висновки.** Вперше побудована аналітична модель закону розподілення часу наработки між відказами пристроїв термінальної мережі на основі розподілення Джонсона сімейства  $S_B$ , що дозволяє врахувати реальний характер розподілення емпіричних даних.

В подальшому планується застосування вибраної аналітичної моделі для оцінки надійності роботи термінальної мережі та прогнозування відказів в обслуговуванні пристроїв термінальної мережі.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Основні показники ринку платіжних карток в Україні [Електронний ресурс] / Спеціальні платіжні засоби – Режим доступу: <http://www.bank.gov.ua/doccatalog/document?id=44655>
2. Дані у розрізі банків-членів платіжних систем щодо кількості платіжних карток та інфраструктури їх обслуговування [Електронний ресурс] / Спеціальні платіжні засоби – Режим доступу: <http://www.bank.gov.ua/doccatalog/document?id=54927>
3. Наша ціль – банк в шаговій доступності [Електронний ресурс] / Режим доступу: <http://www.inpas.ru/publications/78/>
4. ITSM и мониторинг сетей самообслуживания [Електронний ресурс] / Режим доступу: <http://www.int-bank.ru/analyst/solutions/116/>
5. Гнеденко, Б. В. Математические методы в теории надежности [Текст] / Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев – М.: Наука, 1965. – 524 с.
6. Острейковский, В. А. Теория надежности: Учеб. для вузов [Текст] / В. А. Острейковский. – М.: Высш. шк., 2003. – 463 с.
7. Джонсон, Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке [Текст] / Н. Джонсон, Ф. Лион. – М.: Мир, 1980. – 610 с.
8. Хан, Г. Статистические модели в инженерных задачах. Пер. с англ. [Текст] / Г. Хан, С. Шапиро. – М.: Мир, 1969. – 396 с.
9. Приходько, С. Б. Выбор нормализующего преобразования для оценки продолжительности работ при управлении временем в проектах разработки конструкторской документации судна [Текст] / С. Б. Приходько, О. А. Кудин // Зб. наук. праць НУК. – Миколаїв: Видавництво НУК, 2011. – №4 (439). – С.140-145.
10. Попов, А. В. Разработка метода построения негауссовских статистических моделей экспериментальных данных [Текст] / А. В. Попов, И. Н. Колесник // Радиоелектронні і комп'ютерні системи. – 2009. – №3 (37). – С. 33-39.
11. Применение распределений Джонсона к задаче классификации аэрокосмических изображений [Текст] / Ю. Б. Буркатовская, Н. Г. Марков, А. С. Морозов [и др.] // Известия Томского политехнического университета. – 2007. – Т. 311. № 5 – С. 76-80.
12. Кендалл, М. Теория распределений [Текст] / М. Кендалл, А. Стюарт. – Пер. с англ. под ред. А. Н. Колмогорова. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. – 588 с.
13. Коваленко, І. І. Сучасні методи статистичного аналізу даних: Навчальний посібник [Текст] / І. І. Коваленко, С. Б. Приходько, Л. О. Латанська. – Миколаїв: НУК, 2011. – 192 с.
14. Приходько, С. Б. Інтервальне оцінювання статистичних моментів негаусівських випадкових величин на основі нормалізуючих перетворень [Текст] / С. Б. Приходько // Математичне моделювання: науковий журнал. – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2011. – №1 (24). – С. 9-13.

© Приходько С. Б.,  
Макарова Л. М., 2012

*Дата надходження статті до редколегії 13.04.2012 р.*

**ПРИХОДЬКО С. Б.** – к.т.н., доцент, Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова.  
**Коло наукових інтересів:** стохастичне моделювання.

**МАКАРОВА Л. Н.** – пошукувач, Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова.  
**Коло наукових інтересів:** інформаційні технології.