УДК 004.83

Кутковецький В. Я.

МЕТОД ІЄРАРХІЧНИХ ПОТОКІВ

Вплив на мету розглядається як ієрархічний потік, що входить у корінь орієнтованого дерева рішень і розподіляється по його вихідних вузлах-альтернативах. Ієрархії вузлів визначаються за підсумковими вагами потоків вхідних чи вихідних дуг. Розрахунки спрощуються шляхом точного дотримання закону «бета» для потоків вузлів мережі і використання методу групового порівняння потоків вузлів-нащадків. Ієрархічне дерево дозволяє визначити розподіл ваг між альтернативами або виконати кластеризацію (класифікацію) об'єктів при урахуванні: кількісних, якісних, лінгвістичних та інших ознак; зворотних зв'язків вузлів; байєсівського аналізу ймовірнісних мереж; багатокритеріальності математичного програмування та прийняття рішень; можливості застосування законів потоків («альфа» та «бета») і методів аналізу електричних мереж у розрахунках зміни потоків ієрархій у часі.

Ключові слова: *аналіз ієрархій, альтернативи, кластеризація, потоки, дерево рішень.*

Влияние на цель рассматривается как иерархический поток, который входит в корень ориентированного дерева решений, и распределяется по выходным узлам-альтернативам. Иерархии узлов определяются по итоговым весам потоков входных или выходных дуг. Расчеты упрощаются путем точного соблюдения закона «бета» для потоков узлов сети и использованием метода группового сравнения потоков узлов-потомков. Иерархическое дерево позволяет определить распределение весов по альтернативам или выполнить кластеризацию (классификацию) объектов при учете: числовых, качественных, лингвистических и других признаков; наличия обратных связей узлов; байесового анализа вероятностных сетей; многокритериальности математического программирования и принятия решений; возможности применения законов потоков («альфа» и «бета») и методов анализа электрических сетей в расчетах изменения потоков иерархий во времени.

Ключевые слова: *анализ иерархий, альтернативы, кластеры, потоки, дерево решений.*

Influence on the aim is seen as a hierarchical flow, which enter at the root of the oriented decision tree and is distributed across its outcome alternative nodes. Hierarchy of nodes is determined by the total flows of input or output arcs. The calculations are simplified by the precise observance of the law «beta» for the flow of network nodes and by the method of flows' group comparison in child nodes. The hierarchical tree allows to choose an alternative solution or to perform clustering (classification) of the objects and to take into account: the numeric, qualitative, linguistic and other characteristics; the presence of feedback; the Bayes' analysis of probabilistic networks; the multycriteria of the mathematical programming and decision's acceptance; the possibility of applying the laws of flows («alpha» and «beta») and the methods of analysis of electrical networks in the calculation of flow's hierarchy change in time.

Key words: *analysis of hierarchies, alternatives, clusters, flows, a decision tree.*

Постановка проблеми. У порівнянні зі складними методами класифікації [2; 7; 8] метод аналізу ієрархій (МАІ; англ. *analytic hierarchy process (AHP)*, розроблений Т. Л. Сааті (США, 1970), є простим і наближеним до умов розмірковування людини [5]. Тому є актуальним подальше вдосконалення цього напряму прийняття рішень. У статті розглядається вплив на мету як одиничний потік, що входить у корінь орієнтованого дерева, розподіляється по усіх ієрархічно нижчих вузлах-нащадках з їх «локальними оцінками», які впливають на розподіл потоку їх батьківського вузла, і виходить з дерева через вузли-альтернативи. Ієрархія дуги чи вузла визначається за вагою їх потоку. Найбільший потік альтернативи вказує на розв'язок проблеми.

Аналіз досліджень та публікацій. МАІ базується на декомпозиції, вимірюванні переваг, синтезі пріоритетів і дозволяє надати кількісну оцінку альтернативним рішенням, які найліпшим чином узгоджується з розумінням експерта щодо оптимальності розв'язку проблем [5]. Згідно з МАІ, будь-яку проблему уявляють як *структуру* із з'єднаних між собою вузлів наступних ієрархічних рівнів: «Цілі», «Підцілі», «Критерії», «Підкритерії», «Фактори оцінювання», «Альтернативи» [5]. При наявності взаємної залежності чи зворотних зв'язків між вузлами, структури звуться «*мережами*», і до них застосовується «метод аналізу мереж» (МАМ, англ. *«analytic network process» – ANP)* [5].

Метою статті є спрощення та подальший розвиток розрахунків у порівнянні з МАІ та МАМ при прийнятті альтернативних рішень у системах штучного інтелекту.

Виклад основного матеріалу. В основу *методу ієрархічних потоків* (МІП) закладено *груповий метод визначення «відносних потоків локальної ієрархії»* та *умови розділу потоку батьківського вузла по вузлах-нащадках*.

Груповий метод визначення «відносних потоків локальної ієрархії» по «локальних оцінках нащадків» у системі вузлів «батько-нащадки».

Вхідний потік батьківського вузла у вигляді позитивного числа W_e відображає у відносних одиницях загальний вплив деякої інформаційної характеристики впливу θ_e (числової, функціональної, якісної, логічної, лінгвістичної, нечіткої, стохастичної, часової та ін.) цього батьківського вузла сумісно з його вузлами-нащадками на вихідні рішення-альтернативи системи. Ця характеристика θ_e помічається як назва батьківського вузла і має вигляд інформаційного повідомлення (суті інформації, назви об'єкта впливу, факту, функції, процесу, особи, властивості, ознаки тощо). Серед батьківських вузлів можуть бути введені довільні інформаційні характеристики впливу θ_e, в тому числі незнання (неповнота, нечіткість, непередбачуваність інформації); уподобання експерта; ризики протидії, дезінформації, конкуренції тощо.

Кожний вузол-нащадок має власну оцінку a_{ej} впливу на розподіл батьківського потоку W_e. За цими оцінками експерт визначає в числовому вигляді локальну ієрархію нащадків і за нею розподіляє між ними батьківський потік W_e. Підсумок невід'ємних ієрархічних потоків вузлів-нащадків w_{ej} дорівнює потоку вузла-батька W_e (рис. 1).

$$W_e = w_{e1} + w_{e2} + \ldots + w_{ej} + \ldots + w_{en_e}, \quad (1)$$

де *глобальні порядкові номери вузлів мережі* (батька *e* та нащадків *f, h, v*) помічені на рис. 1 сірим фоном; *j = 1, 2,…, n_e – локальні порядкові номери вузлів – нащадків батьківського вузла e* з *«позитивною оцінкою нащадка a_{ej}»* за впливом на розподіл батьківського потоку W_e (вузол-нащадок має два номери – глобальний та локальний). При збільшенні позитивної оцінки a_{ej} збільшується ієрархічний потік відповідного нащадка.

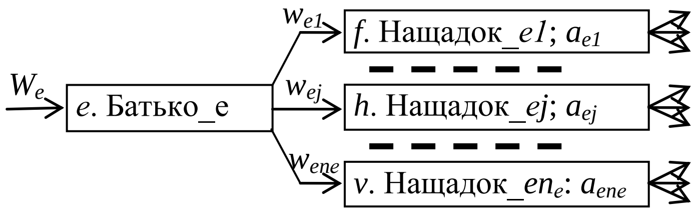

Рис. 1. Система вузлів «батько-нащадки»

Якщо невід'ємні потоки нащадків w_{ej} є *прямо пропорційними «позитивним оцінкам вузлів-нащадків»* a_{ej}, то отримуємо аналогічний до (1) підсумок «позитивних оцінок нащадків»:

$$A_e = a_{e1} + a_{e2} + \ldots + a_{ej} + \ldots + a_{ene}, \quad (2)$$

а *відносний потік локальної ієрархії* *j*-го вузла-нащадка розраховується за формулою:

$$\lambda_{Tej} = w_{ej} / W_e = a_{ej} / A_e. \quad (3)$$

Якщо замість позитивної оцінки a_{ej} нащадок має *«негативну оцінку»* c_{ej} впливу на розподіл батьківського потоку W_e (при збільшенні негативної оцінки c_{ej} зменшується ієрархічний потік нащадка), то у формулах (2) та (3) потрібно використовувати:

$$a_{ej} = 1/c_{ej}. \quad (4)$$

Ділення лівої і правої частин рівняння (2) на A_e (а рівняння (1) – на W_e) визначить підсумок *відносних потоків локальних ієрархій* вузлів-нащадків λ_{Tej} = a_{ej} /A_e, = w_{ej} /W_e, які і використовуються в подальших розрахунках:

$$1 = \lambda_{Te1} + \lambda_{Te2} + \ldots + \lambda_{Tej} + \ldots + \lambda_{Tene}. \quad (5)$$

Очевидно, що парні відношення потоків нащадків не відрізняються від парних відношень їх відносних величин $\frac{w_{ej}}{w_{ei}} = \frac{w_{ej}}{W_e} \cdot \frac{W_e}{w_{ei}} = \frac{\lambda_{Tej}}{\lambda_{Tei}}$.

Ще раз розділимо вираз (5) на відносний потік локальної ієрархії *i*-го нащадка λ_{Tei} (*i = 1, 2,…, n_e*) і після перетворень

$$\frac{1}{\lambda_{Tei}} = \frac{\lambda_{Te1}}{\lambda_{Tei}} + \frac{\lambda_{Te2}}{\lambda_{Tei}} + \ldots + \frac{\lambda_{Tej}}{\lambda_{Tei}} + \ldots + \frac{\lambda_{Tene}}{\lambda_{Tei}},$$

$\frac{1}{\lambda_{Tei}} = A_{Tei}$ можна розрахувати величину:

$$\lambda_{Tei} = \frac{1}{A_{Tei}}, \qquad (6)$$

де $A_{Tei} = \frac{\lambda_{Te1}}{\lambda_{Tei}} + \frac{\lambda_{Te2}}{\lambda_{Tei}} + \ldots + \frac{\lambda_{Tej}}{\lambda_{Tei}} + \ldots + \frac{\lambda_{Tene}}{\lambda_{Tei}} =$

$\frac{w_{Te1}}{w_{Tei}} + \frac{w_{Te2}}{w_{Tei}} + \ldots + \frac{w_{Tej}}{w_{Tei}} + \ldots + \frac{w_{Tene}}{w_{Tei}} =$

$\frac{a_{Te1}}{a_{Tei}} + \frac{a_{Te2}}{a_{Tei}} + \ldots + \frac{a_{Tej}}{a_{Tei}} + \ldots + \frac{a_{Tene}}{a_{Tei}}$ – розрахований експертом за методом парного порівняння підсумок парних відношень між потоками нащадків.

Якщо використані у формулі (6) парні відношення $\lambda_{Tej} / \lambda_{Tei}$ є правильними, то далі за відомим λ_{Tei} визначають усі інші значення відносних потоків локальної ієрархії $\lambda_{Tej} = (\lambda_{Tej} / \lambda_{Tei})\cdot\lambda_{Tei}$, які і використовують у подальших розрахунках. Але якщо відношення $\lambda_{Tej} / \lambda_{Tei}$ є сумнівними (чи якщо застосована лінгвістично-числова таблиця Т. Л. Саати з приблизними числовими значеннями парних порівнянь), то при виведенні формули (6) замість λ_{Tei} підставляються інші значення λ_{Tej} і визначаються нові величини λ_{Tej}. У кінці таких розрахунків отримуємо квадратну матрицю порядку n_e, кожний рядок якої вміщує свої розраховані величини λ_{Tej}, які потім осереднюємо перед використанням.

Експерт може суб'єктивно визначати та коригувати потоки λ_{Tej}. Наприклад, якщо невідомі «локальні оцінки нащадків», то експерт може рівномірно розподілити за нащадками потік вузла-батька. *Якісні «локальні оцінки нащадків»* за впливом нащадка на розподіл потоку батьківського вузла (наприклад, «Авторитет», «Інтелект») експертом суб'єктивно переводяться у числову форму a_{ej} шляхом їх оцінки на відрізку від «Браку = 0» до «Еталону = 1». Статистичні дані можна отримати при заміні висновків одного експерта висновками групи експертів.

Глобальний пріоритет вузла визначається за величиною потоку вузла (підсумку вхідних чи вихідних потоків вузла).

Умови розділу потоку батьківського вузла по вузлах-нащадках:

1. *Є неприпустимим (крім оговорених випадків) відхилення від «1»* суми відносних потоків локальної ієрархії вузлів-нащадків згідно з (5) або *відхилення від «$W_e = 1$»* (чи іншого значення вхідного потоку W_e) підсумку потоків будь-якого перерізу мережі, бо це суперечить закону «бета» для потоків мережі у вузлі [3], є похибкою експерта і *усувається ним* зміною ***вхідних потоків вузлів-нащадків або перерізу*** (навіть якщо відхилення отримане при округленні розрахованих значень потоків). В іншому випадку це відхилення може бути використане для оцінки компетентності експерта.

2. *За логічними умовами* експерт може надати будь-якій локальній оцінці нащадка інше значення при дотриманні рівняння (5). Наприклад, якщо оцінка «c_{ei} = *Вік = 50*» перевищує дозволену величину «c_{eiL} = *Вік* $\leq$ *40*», то *при позитивному впливі* оцінок на процес приймається «c_{ei}^* = *Вік** = *0*», а *при негативному впливі* «$1/c_{ei}^*$ = *1/Вік** = *0*». Можна також використовувати оцінки впливу у вигляді нелінійних формул $c_{ei}^* = f(c_{ei},t)$, *які змінюються в часі*.

3. Якщо батьківський вузол має нащадків із позитивним і негативним впливом на процес, то цей вузол та його потік впливу треба або розділити на два вузли (перший – з позитивним, а другий – з негативним впливом), або організувати розподіл потоків серед нащадків згідно з попередніми вимогами.

4. «Відносні потоки локальних ієрархій» за рівнянням (5) та «локальні оцінки нащадків» за рівнянням (2) *можуть коригуватись такими коефіцієнтами*:

4.1. *Коефіцієнт потоку* $k_{Aej} = 0 \ldots A_{Aej}$ (тут A_{Aej} – будь-яке невід'ємне число, більше чи менше за 1) *коригує величини відносних потоків локальної ієрархії нащадків* λ_{Tej} за рівнянням (5) у бік зменшення чи збільшення, *що зменшує чи збільшує загальний потік перерізу мережі* (за відсутності k_{Aej} у розрахунках вважаємо $k_{Aej} = 1 = const$). При цьому рівняння (5) звичайно замінюється на нерівність:

$$\sum_{j=1}^{n_e} k_{Aej}\lambda_{Tej} \leq 1. \qquad (7)$$

Наприклад, за допомогою $k_{Aej} < 1$ оцінюється ступінь упевненості, нечіткості, ризику, сумніву, незнання (якщо ці ознаки рішень не мають окремих потоків), а при $k_{Aej} > 1$ загальний зменшений потік може збільшуватись до 1.

При $k_{Aej} < 1$ *частка потоку вилучається з мережі* і тоді для ряду задач за підсумком залишкових потоків можна оцінити ґрунтовність ієрархічного рішення.

4.2. *Локальний коефіцієнт* $k_{Bej} = 0 \ldots A_{Bej}$ може збільшувати чи зменшувати *теоретичну локальну оцінку нащадків* a_{Tej} (A_{Bej} – будь-яке невід'ємне число, більше чи менше за 1) і впливає лише на зміну *локальної ієрархії вузла-нащадка* без зміни величини загального потоку мережі:

$$a_{ej} = k_{Bej} \cdot a_{Tej}. \qquad (8)$$

За відсутності k_{Bej} у розрахунках будемо вважати $k_{Bej} = 1 = const$.

Приклади: для програмного коду існує захист паролями з теоретичною локальною оцінкою впливу a_{Tej} = *10 %*, але конкретна реалізація цього захисту оцінюється експертом як a_{ej} = *1 %* (k_{Bej} = *0,1*); «вік», «освіта» чи «вплив» людини оцінюються не за документами.

5. При використанні МІП дерево без зворотних зв'язків має вигляд рис. 2а, а те ж дерево *із*

зворотними зв'язками має вигляд рис. 2б (на рис. 2 стрілками показана скорочена кількість потоків вузлів). На рис. 2б ураховується: вплив критеріїв «2 – 5» на альтернативи «6 – 8», який не відрізняється від рис. 2а; вплив альтернатив на критерії «6 – 8» → «2* – 5*» (зворотний зв'язок нижчого ієрархічного рівня стосовно вищого ієрархічного рівня); взаємний вплив критеріїв «2* – 5*» → «2' – 5'» (зворотний зв'язок між вузлами одного рівня). Кількість змінних та складність системи практично не обмежена. Таким чином, *перевагою МІП є те, що метод не змінюється за наявності чи відсутності функціональних залежностей та зворотних зв'язків* (при аналізі мереж зі зворотними зв'язками в роботі [5] замість МАІ застосовується МАМ).

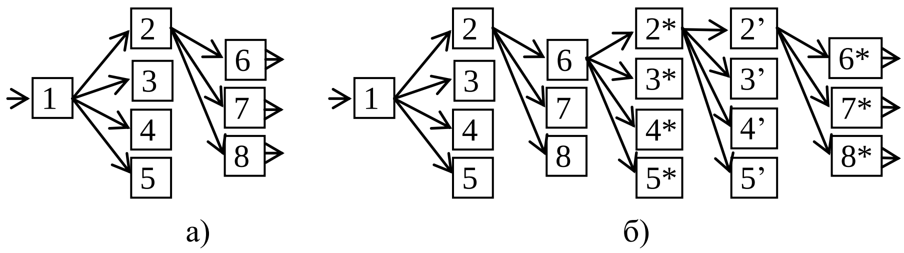

Рис. 2. Дерево без зворотних зв'язків (а) та зі зворотними зв'язками (б)

Приклади використання МІП

Розглянемо узагальнену найпростішу трирівневу схему розподілу ієрархічних потоків по вузлах мережі з виділеними сірим фоном глобальними номерами 1-8 (рис. 3). Схема складається з кореня дерева «1. Мета» з одиничним вхідним потоком $W_e = 1$, що розподіляється за чотирма критеріями $K1 – K4$ за визначеними експертом відносними потоками локальної ієрархії $\lambda_{12} – \lambda_{15}$, підсумок яких дорівнює одиниці.

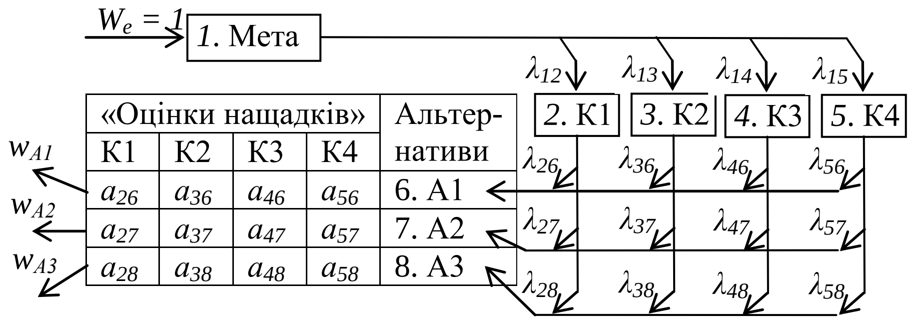

Рис. 3. Схема розподілу ієрархічних потоків

Критерії $K1 – K4$ є батьківськими вузлами для трьох альтернатив $A1 – A3$, кожна з яких має «локальні оцінки нащадків» за критеріями $K1 – K4$. За цими даними потрібно розрахувати реальні потоки альтернатив (w_{A1}, w_{A2}, w_{A3}), які й визначать ієрархію $A1$, $A2$, $A3$. За оцінками нащадків-альтернатив $A1 – A3$ розраховуються відносні потоки локальної ієрархії критеріїв: $\lambda_{26} – \lambda_{28}$ (для $K1$ за оцінками $a_{26} – a_{28}$); $\lambda_{36} – \lambda_{38}$ (для $K2$ за оцінками $a_{36} – a_{38}$); $\lambda_{46} – \lambda_{48}$ (для $K3$ за оцінками $a_{46} – a_{48}$); $\lambda_{56} – \lambda_{58}$ (для $K4$ за оцінками $a_{56} – a_{58}$).

Приклад 1. Мета: «Обрання лідера». На основі критеріїв «2. *К1: Вік (оцінка життєвого досвіду)*», «3. *К2: Досвід (практичної діяльності)*», «4. *К3: Освіта*», «5. *К4: Негативні якості*» необхідно обрати лідером одного з трьох кандидатів-альтернатив: «6. *А1: Валентина*», «7. *А2: Ваню*», «8. *А3: Николая*» (рис. 3).

Експерт суб'єктивно ввів відносні потоки локальної ієрархії за критеріями $K1 – K4$ ($\lambda_{12} = 0,1$; $\lambda_{13} = 0,5$; $\lambda_{14} = 0,2$; $\lambda_{15} = 0,2$) та визначив «оцінки нащадків-альтернатив» $A1 – A3$ стосовно батьківських вузлів $K1 – K4$ (табл. 1). При цьому в колонці «5. К4 = Негативні якості» величини a_{ej} визначені через c_{ej} за формулою (4) внаслідок негативного впливу c_{ej} на мету.

Таблиця 1

«Оцінки знизу» з боку нащадків-альтернатив *А1 – А3* батьківських вузлів *К1 – К4* при визначенні лідера

«Локальні оцінки нащадків»				Альтернативи
«2. К1 = Вік» $\lambda_{12} = 0,1$	**«3. К2 = Досвід»** $\lambda_{13} = 0,5$	**«4. К3 = Освіта»** $\lambda_{14} = 0,2$	**«5. К4 = Негативні якості»** $\lambda_{15} = 0,2$	
$a_{26} = 37$ *років*	$a_{36} = 60$ %	$a_{46} = 70$ %	$c_{56} = 70\ \% \rightarrow a_{56} = 0,0143$	«6. А1 = Валентин»
$a_{27} = 45$ *років*	$a_{37} = 80$ %	$a_{47} = 70$ %	$c_{57} = 40\ \% \rightarrow a_{57} = 0,025$	«7. А2 = Ваня»
$a_{28} = 50$ *років*	$a_{38} = 80$ %	$a_{48} = 70$ %	$c_{58} = 20\ \% \rightarrow a_{58} = 0,05$	«8. А3 = Николай»

Для критеріїв *К1 – К4* розраховані за формулою (6) значення відносних потоків локальних ієрархій наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Розраховані значення відносних потоків локальних ієрархій нащадків-альтернатив *А1 – А3* стосовно батьківських вузлів *К1 – К4* при визначенні лідера

«Відносні потоки локальної ієрархії»				Альтернативи
«2. К1 = Вік» $\lambda_{12} = 0{,}1$	**«3. К2 = Досвід»** $\lambda_{13} = 0{,}5$	**«4. К3 = Освіта»** $\lambda_{14} = 0{,}2$	**«5. К4 = Негативні якості»** $\lambda_{15} = 0{,}2$	
$\lambda_{26} = 0{,}28$	$\lambda_{36} = 0{,}28$	$\lambda_{46} = 0{,}33$	$\lambda_{56} = 0{,}16$	«6. А1 = Валентин»; $w_{A1} = 0{,}262$
$\lambda_{27} = 0{,}34$	$\lambda_{37} = 0{,}36$	$\lambda_{47} = 0{,}33$	$\lambda_{57} = 0{,}28$	«7. А2 = Ваня»; $w_{A2} = 0{,}337$
$\lambda_{28} = 0{,}38$	$\lambda_{38} = 0{,}36$	$\lambda_{48} = 0{,}33$	$\lambda_{58} = 0{,}56$	«8. А3 = Николай»; $w_{A3} = 0{,}397$

Реальні потоки альтернатив *А1 – А3* (табл. 2) розраховуються за формулами:

$$w_{A1} = \sum_{e=2}^{E=5} \lambda_{1e}\lambda_{e6} = 0{,}1 \cdot 0{,}28 + 0{,}5 \cdot 0{,}28 + 0{,}2 \cdot 0{,}33 + 0{,}2 \cdot 0{,}16 = 0{,}262.$$

$$w_{A2} = \sum_{e=2}^{E=5} \lambda_{1e}\lambda_{e7} = 0{,}1 \cdot 0{,}34 + 0{,}5 \cdot 0{,}36 + 0{,}2 \cdot 0{,}33 + 0{,}2 \cdot 0{,}28 = 0{,}337.$$

$$w_{A3} = \sum_{e=2}^{E=5} \lambda_{1e}\lambda_{e8} = 0{,}1 \cdot 0{,}38 + 0{,}5 \cdot 0{,}36 + 0{,}2 \cdot 0{,}33 + 0{,}2 \cdot 0{,}56 = 0{,}397.$$

«Николай» має найбільший потік ($w_{A3}=0{,}397$), і тому він обирається лідером.

Але якщо від лідера вимагається фізична витривалість (при виборі лідера космонавтів), то збільшення віку може розглядатись як негативний фактор впливу на функцію мети: у цьому випадку «оцінку нащадків» визначають за формулою (4).

Приклад 2. Класифікація та кластеризація об'єктів за МІП полягає в тому, що на вхід орієнтованого дерева рішень надходить конкретний об'єкт (Николай), а на виході альтернатив на основі критеріїв «2. К1: Вік = 50 років», «3. К2: Досвід = 80 %», «4. К3: Освіта = 70 %», «5. К4: негативні якості = 20 %» отримується відповідь про належність цього об'єкта до альтернатив «6. А1. Командир», «7. А2. Старшина», «8. А3. Рядовий». Вважаємо, що всі відносні потоки локальної ієрархії λ_{ej} *суб'єктивно визначив експерт* згідно з табл. 3.

Таблиця 3

Таблиця відносних потоків локальної ієрархії λ_{ej}

«Відносні потоки локальної ієрархії»				Альтернативи
«2. К1 = Вік = 50 років» $\lambda_{12} = 0{,}1$	**«3. К2 = Досвід = 80 %»** $\lambda_{13} = 0{,}5$	**«4. К3 = Освіта = 70 %»** $\lambda_{14} = 0{,}2$	**«5. К4 = Негативні якості = 20 %»** $\lambda_{15} = 0{,}2$	
$\lambda_{26} = 0{,}8$	$\lambda_{36} = 0{,}7$	$\lambda_{46} = 0{,}6$	$\lambda_{56} = 0{,}1$	«6. А1 = Командир» $w_{A1} = 0{,}57$
$\lambda_{27} = 0{,}1$	$\lambda_{37} = 0{,}3$	$\lambda_{47} = 0{,}3$	$\lambda_{57} = 0{,}3$	«7. А2 = Старшина» $w_{A2} = 0{,}28$
$\lambda_{28} = 0{,}1$	$\lambda_{38} = 0{,}0$	$\lambda_{48} = 0{,}1$	$\lambda_{58} = 0{,}6$	«8. А3 = Рядовий» $w_{A3} = 0{,}15$

Реальні потоки альтернатив *А1 – А3* (табл. 3) розраховуються за формулами:

$$w_{A1} = \sum_{e=2}^{E=5} \lambda_{1e}\lambda_{e6} = 0{,}1 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}57.$$

$$w_{A2} = \sum_{e=2}^{E=5} \lambda_{1e}\lambda_{e7} = 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}28.$$

$$w_{A3} = \sum_{e=2}^{E=5} \lambda_{1e}\lambda_{e8} = 0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}5 \cdot 0{,}0 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}15.$$

Розраховані оцінки дозволяють отримати класифікацію з використанням цифрових характеристик за всіма альтернативами. Наприклад, при введенні згідно з формулою (8) *локальних коефіцієнтів* $k_{Be}=0 \ldots 1$ для альтернатив за оцінкою «Командира» ($k_{B6} = 1{,}0$), «Старшини» ($k_{B7} = 0{,}25$) і «Рядового» ($k_{B8} = 0{,}025$) отримуємо «*Загальну оцінку = 1,0·0,57 + 0,25·0,28 + 0,025·0,15 = 0,644*».

Приклад 3. Принципи класифікації ступеня захисту інформації описуються за даними табл. 4 (при цьому ми не розглядаємо відомі чотири підсистеми захисту від несанкціонованого доступу чи забезпечення 4-х рівнів захищеності). Кожний критерій захисту *К1 – К4* вважаємо функціонально залежним від одного чи кількох показників захисту ($F_1 – F_7$): F_1 – технічний захист приміщення, *коефіцієнт потоку* $k_{AF1} = 0{,}8$; F_2 – захист програмного забезпечення, $k_{AF2} = 0{,}9$; F_3 – захист від помилок персоналу, $k_{AF3} = 1{,}0$; F_4 – криптографічний захист, $k_{AF4} = 1{,}0$; F_5 – захист від електромагнітного випромінювання, $k_{AF5} = 1{,}0$; F_6 – захист від розповсюдження сигналів проводами, $k_{AF6} = 1{,}0$; F_7 – ієрархія доступу до інформації, $k_{AF7} = 1{,}0$.

Наприклад, експерт за критеріями *К1 – К4* суб'єктивно визначає:

– теоретичні значення потоків локальної ієрархії ($\lambda_{12} = 0{,}8$; $\lambda_{13} = 0{,}08$; $\lambda_{14} = 0{,}07$; $\lambda_{15} = 0{,}05$);

– відповідні формулі (7) *коефіцієнти потоку* k_A^e, що ураховують ступінь практичної реалізації захисту. Наприклад, для критерію «2. К1»

$k_A^2 = k_{AF1} \cdot k_{AF2} \cdot k_{AF3} \cdot k_{AF4} = 0,72$. У цьому випадку ступінь захисту вимірюється за формулою:

$$w_{A1} = \sum_{e=2}^{E=5} \lambda_{1e} k_A^e = 0,8 \cdot 0,72 + 0,08 \cdot 1,0 + 0,07 \cdot 1,0 + 0,05 \cdot 1,0 = 0,776.$$

Таблиця 4

Принципи класифікації степені захисту інформації

«Відносні потоки локальної ієрархії»				Альтернатива
«2. *К1*» $\lambda_{12} = 0,8$; $k_A^2 = k_{AF1} \cdot k_{AF2} \cdot k_{AF3} \cdot k_{AF4} = 0,72$	**«3. *К2*» $\lambda_{13} = 0,08$; $k_A^3 = k_{AF5} = 1,0$**	**«4. *К3*» $\lambda_{14} = 0,07$; $k_A^4 = k_{AF6} = 1,0$**	**«5. *К4*» $\lambda_{15} = 0,05$; $k_A^5 = k_{AF5} = 1,0$**	
$\lambda_{12} \cdot k_A^{K1} = 0,576$	$\lambda_{13} \cdot k_A^{K2} = 0,08$	$\lambda_{14} \cdot k_A^{K3} = 0,07$	$\lambda_{15} \cdot kA^{K4} = 0,05$	«6. *А1*= Степзнь захисту» $w_{A1} = 0,776$

Приклад 4. Визначення загальної функції мети для багатокритеріальної задачі. Припустимо, що ми маємо чотири функції мети *F1 – F4* (вони є вузлами-критеріями *К1 – К4*), які залежать від трьох змінних $x_1 - x_3$:

$$F_1 = 5x_1 + 9x_2 + 3x_3^2 \to \max,$$

{F_1 = *К1* – критерій за прибутком};

$$F_2 = x_1 + 4x_2 + 12x_3^2 \to \max,$$

{F_2 = *К2* – критерій за прибутком у часі [4]};

$$F_3 = 0,1x_1 + 0,4x_2 + 0,5x_3^2 \to \max,$$

{F_3 = *К3* – критерій за привабливістю};

$$F_4 = 0,2743x_1 + 0,9615x_2 + 3,175x_3^2 \to \min;$$

{F_4 = *К4* – критерій за витратою часу (або собівартістю)}.

Згідно з МІП, немає потреби нормалізувати коефіцієнти при змінних для запобігання впливу їх величин на кінцеве рішення, бо ця нормалізація автоматично виконується через значення потоків локальної ієрархії (для $F_1 - F_4$ нормалізований ваговий коефіцієнт дорівнює його відношенню до підсумку всіх вагових коефіцієнтів).

В узагальненій функції мети $F_0 = w_{A1}x_1 + w_{A2}x_2 + w_{A3}x_3^2 \to \max$ вагові коефіцієнти $w_{A1} - w_{A3}$ при змінних $x_1 - x_3$ є альтернативами *А1 – А3*.

Для критеріїв *К1 – К4* експерт суб'єктивно визначає їхній вплив на рішення через відносні потоки локальної ієрархії $\lambda_{12} - \lambda_{15}$ (табл. 5). З формул для функцій мети $F_1 - F_4$ нам відомі «оцінки нащадків» a_{ej} щодо впливу на розподіл батьківського потоку вузлів *К1 – К4* ($F_1 - F_4$). За значеннями a_{ej} розраховуємо за формулою (6) відносні потоки локальної ієрархії λ_{ej} батьківських вузлів-критеріїв *К1 – К4*. Тому що критерій «5. К4 = F_4», згідно з формулою функції мети, є негативним (спрямований до мінімуму), то коефіцієнти при змінних для F_4 позначаємо як c_{5j} з перерахунком на a_{5j}, згідно з формулою (4), і наступним визначенням λ_{5j}. Коефіцієнти потоків ($k_{xj} = 0 \ldots A_e$, $j = 1,2,3$) призначені для коригування експертом значущості функції мети (A_e – довільне невід'ємне число).

Таблиця 5

Визначення загальної функції мети для багатокритеріальної задачі

«Оцінки нащадків» та «Відносні потоки локальної ієрархії»								Альтернативи
«2. К1 = F_1» $\lambda_{12} = 0,2$		**«3. К2 = F_2» $\lambda_{13} = 0,6$**		**«4. К3 = F_3» $\lambda_{14} = 0,15$**		**«5. К4 = F_4» $\lambda_{15} = 0,05$**		
a_{2j}	λ_{2j}	a_{3j}	λ_{3j}	a_{4j}	λ_{4j}	c_{5j}	λ_{5j}	
5	0,294	1	0,059	0,1	0,1	0,2743	0,729	«6. x_1». k_{x1} = 1. А1 = w_{A1} = 0,146
9	0,529	4	0,235	0,4	0,4	0,9615	0,208	«7. x_2». k_{x2} = 1. А2 = w_{A2} = 0,317
3	0,177	12	0,706	0,5	0,5	3,1750	0,063	«8. x_3^2». k_{x3} = 1. А3 = w_{A3} = 0,538

Реальні потоки альтернатив *А1 – А3* (табл. 5) розраховуються за формулами:

$$w_{A1} = k_{x1} \sum_{e=2}^{E=5} \lambda_{1e}\lambda_{e,j=1} = 1 \cdot (0,2 \cdot 0,294 + 0,6 \cdot 0,059 + 0,15 \cdot 0,1 + 0,05 \cdot 0,729) = 0,146.$$

$$w_{A2} = k_{x2} \sum_{e=2}^{E=5} \lambda_{1e}\lambda_{e,j=2} = 1 \cdot (0,2 \cdot 0,529 + 0,6 \cdot 0,235 + 0,15 \cdot 0,4 + 0,05 \cdot 0,208) = 0,317.$$

$$w_{A3} = k_{x3} \sum_{e=2}^{E=5} \lambda_{1e}\lambda_{e,j=3} = 1 \cdot (0,2 \cdot 0,177 + 0,6 \cdot 0,706 + 0,15 \cdot 0,5 + 0,05 \cdot 0,063) = 0,538.$$

Таким чином, об'єднана функція мети має вигляд (вона не враховує Парето – оптимальні розв'язки):

$$F_0 = 0,146x_1 + 0,317x_2 + 0,538x_3^2 \to \max.$$

Можна також спочатку розділити потоки між альтернативами А1 – А3, а потім отримані потоки поділити між лінійними та нелінійними складовими альтернатив. Так пом'якшується *відмічений проф. Е. С. Вентцель (СРСР) недолік математичного програмування* стосовно командного призначення однієї функції мети.

Для усунення ще одного недоліку (обов'язкового використання лише наявних ресурсів без можливості їх коригування за рахунок продажу власних ресурсів та придбання додаткових ресурсів при наявності виділених на це коштів [1; 4]) використовуємо математичну модель лінійного програмування у вигляді:

$$F_0 = \sum_{j=1}^{n} w_{Aj} k_{xj} x_j = \sum_{j=1}^{n} \left[\left(\sum_{e=2}^{E=5} \lambda_{1e} \lambda_{Tej} \right) k_{xj} x_j \right] \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} x_j \le b_i + x_{n+i} - x_{n+m+i};$$

$$(\sum_{i=1}^{m} s_{1i} x_{n+i}) - (\sum_{i=1}^{m} s_{2i} x_{n+m+i}) \le S\,,$$

де $e = \overline{2, E = 4}$, $j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, m}$ – порядкові номери функцій мети, товарів та ресурсів; x_j – кількість товарів (чи альтернатив *A1 – A3*); x_{n+i} – придбані ресурси за ціною s_{1i}; x_{n+m+i} – продані ресурси за ціною s_{2i}; $w_{Aj} = \sum_{e=2}^{E=5} \lambda_{1e} \lambda_{Tej}$ – загальний локальний пріоритет товару x_j *у відносних одиницях* при $\sum_{j=1}^{n} w_{Aj} = 1$; $k_{xj} = 0...1$ – визначений експертом коефіцієнт потоків за дозволом випуску товару x_j; d_{ij} – норми витрат *i*-го ресурсу на *j*-ий товар; b_i – наявний *i*-й ресурс; S – кошти, що виділені на придбання додаткових ресурсів.

Приклад 5. Аналіз ієрархій на основі законів потоків мережі. У роботі [6] уперше використані закони Кірхгофа для «електричної» мережі потоків з метою визначення розподілу за гілками максимального потоку мережі. У роботі [3] був продовжений цей напрям і показано, що потоки в мережі описуються за допомогою двох систем законів – «альфа» та «бета». Згідно з [3], «електрична» схема заміщення мережі з потоками надає можливість додатково до «активних опорів» ввести в гілки мережі «реактивні опори», «ємності збереження потоків», «джерела потоків», «регулюючі елементи» тощо, що відкриває перед МІП *перспективи аналізу зміни ієрархій у часі*.

Приклад 6. МІП дозволяє виконати аналіз ієрархій у підприємницькій діяльності при наявності статистичних даних «оцінок нащадків». При цьому мається на увазі: *АВС – аналіз* (класифікація ресурсів, покупців, постачальників та ін. по їх впливу на кінцевий результат на основі «*принципу Парето 20 %:80 %*»: 20 % зусиль дають 80 % результатів); розрахунок собівартості за видами діяльності (*Activity Based Costing, ABC*); чисельні напрямки аналізу підприємницької діяльності (*SAS Activity – Based Management*), які охоплюють підвищення прибутку, управління ризиками, даними, фінансами тощо.

Приклад 7. Використання формули Байєса для розпізнавання хвороб . Формула Байєса визначає *апостеріорну ймовірність появи класу (образу хвороби)* Ω_i, ($i = 1, 2,..., m$ – порядковий номер класу) за визначеними апріорними умовними ймовірностями того, що незалежні ознаки хвороби $X = \{x_1, x_2,..., x_j,..., x_n\}$,($j = 1, 2,..., n$ – порядковий номер ознаки x_j) присутні в образі Ω_i:

$$P_{\Omega i} = \frac{P_0(\Omega_i) p(x_1 | \Omega_i) p(x_2 | \Omega_i)...p(x_j | \Omega_i)...p(x_n | \Omega_i)}{\sum_{i=1}^{m} P_0(\Omega_i) p(x_1 | \Omega_i) p(x_2 | \Omega_i)...p(x_j | \Omega_i)...p(x_n | \Omega_i)}, \quad (9)$$

де *n* – загальна кількість ознак (*n* для всіх класів Ω_i однакова); $P_0(\Omega_i)$ – апріорна ймовірність існування i-го образу Ω_i (визначається на основі попереднього досвіду з урахуванням ризику помилки); $p(x_j|\Omega_i)$ – апріорна умовна ймовірність того, що ознака x_j присутня в образі Ω_i (ця умовна ймовірність замінюється на $p(\bar{x}_j | \Omega_i) = 1 - p(x_j | \Omega_i)$, якщо немає ознаки x_j); $\sum_{i=1}^{m} P_0(\Omega_i) \prod_{j=1}^{n} p(x_j | \Omega_i)$ – ймовірність наявності ознак x_j в усіх класах (образах); $P_0(\Omega_i) \prod_{j=1}^{n} p(x_j | \Omega_i)$ – ймовірність наявності ознак x_j в *i*-му класі (образі).

Спочатку розглянемо звичайні розрахунки за Байєсом. Згідно з даними табл. 6, розпізнавання трьох класів хвороб Ω_1, Ω_2, Ω_3 відбувається за чотирма узагальненими ознаками $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ для 15-ті навчальних образів (по 5 пацієнтів на кожну хворобу).

Таблиця 6

Навчальні дані (в колонці «№» вказані порядкові номери хворих)

Клас хвороби Ω_1					Клас хвороби Ω_2					Клас хвороби Ω_3				
№	Ознаки хвороби x_j				№	Ознаки хвороби x_j				№	Ознаки хвороби x_j			
	x_1	x_2	x_3	x_4		x_1	x_2	x_3	x_4		x_1	x_2	x_3	x_4
1	–1	1	–1	–1	6	–1	1	1	–1	11	–1	1	1	–1
2	1	–1	–1	1	7	1	1	–1	–1	12	1	–1	1	–1
3	–1	1	–1	1	8	1	–1	1	–1	13	–1	1	1	1
4	1	–1	–1	1	9	1	1	–1	1	14	–1	–1	1	1
5	1	–1	1	–1	10	–1	1	–1	1	15	–1	–1	1	1

З даних табл. 6 визначимо умовні ймовірності того, що ознака x_j присутня або відсутня в образі Ω_i (табл. 7). У табл. 6 для класу Ω_1 ознака x_1 спостерігається у 3-х пацієнтів (для них «$x_1 = 1$») і відсутня у 2-х пацієнтів (для них «$x_1 = -1$»). Тому умовна ймовірність (відносна частота) наявності ознаки x_1 в образі Ω_1 дорівнює $p(x_1|\Omega_1) = 3/5 = 0{,}6$; умовна ймовірність відсутності ознаки x_1 в образі Ω_1 дорівнює $p(\bar{x}_1 | \Omega_1) = 2/5 = 0{,}4$. Розрахунки умовних ймовірностей для інших ознак виконується аналогічно.

Таблиця 7

Навчальні умовні ймовірності того, що ознаки x_j присутні або відсутні у образі Ω_i

Ознаки x_j	Ω_1		Ω_2		Ω_3	
	$p(x_j\|\Omega_1)$	$p(\bar{x}_j \mid \Omega_1)$	$p(x_j\|\Omega_2)$	$p(\bar{x}_j \mid \Omega_2)$	$p(x_j\|\Omega_3)$	$p(\bar{x}_j \mid \Omega_3)$
x_1	3/5 = 0,6	0,4	3/5 = 0,6	0,4	1/5 = 0,2	0,8
x_2	2/5 = 0,4	0,6	4/5 = 0,8	0,2	2/5 = 0,4	0,6
x_3	1/5 = 0,2	0,8	2/5 = 0,4	0,6	4/5 = 0,8	0,2
x_4	5/5 = 1	0	2/5 = 0,4	0,6	4/5 = 0,8	0,2

При однаковій небезпечності хвороб і відсутності додаткових відомостей, вважаємо всі хвороби рівноймовірними: $P_0(\Omega_1)=1/3$; $P_0(\Omega_2)=1/3$; $P_0(\Omega_3)=1/3$.

Тепер наша система навчена і готова до діагностики хвороб. Припустимо, що новий хворий, якому треба поставити діагноз, має такі апостеріорні ознаки $X^0 = \{x_1^0 = -1,\ x_2^0 = -1,\ x_3^0 = 1,\ x_4^0 = 1\}$ (тут значення «1» означає наявність ознаки, а «-1» – її відсутність).

Далі розраховуються чисельники формули Байєса $P_0(\Omega_i)\prod_{j=1}^{n} p(x_j^0 \mid \Omega_i)$ для кожного класу окремо за таким правилом: перші дві відсутні ознаки ($x_1^0 = -1$; $x_2^0 = -1$) означають, що в табл. 7 використовується колонка праворуч з ймовірностями $p(\bar{x}_j \mid \Omega_i)$, а наступні дві ознаки ($x_3^0 = 1$; $x_4^0 = 1$) означають, що в табл. 7 використовується колонка ліворуч з ймовірностями $p(x_j|\Omega_i)$: для першого класу $P_0(\Omega_1)\prod_{j=1}^{n} p(x_j^0 \mid \Omega_1) = (1/3)\cdot 0,4\cdot 0,6\cdot 0,2\cdot 1 = 0,016$; для другого класу $P_0(\Omega_2)\prod_{j=1}^{n} p(x_j^0 \mid \Omega_2) = (1/3)\cdot 0,4\cdot 0,2\cdot 0,4\cdot 0,4 = 0,00426$; для третього класу $P_0(\Omega_3)\prod_{j=1}^{n} p(x_j^0 \mid \Omega_3) = (1/3)\cdot 0,8\cdot 0,6\cdot 0,8\cdot 0,8 = 0,102$.

Знаменник у формулі Байєса однаковий для всіх класів (він дорівнює підсумку розрахованих значень), і тому можна порівнювати лише величини чисельників.

Компаратор системи вкаже на хворобу Ω_3, тому що ймовірність її появи більша.

Тепер перейдемо до розрахунків Байєсових ймовірнісних мереж згідно з МІП.

Вхідний батьківський потік ймовірностей $W_e=1$ розділяється згідно з чисельником формули (9) на три однакові локальні потоки ($\lambda_{\Omega 1} = 1/3$, $\lambda_{\Omega 2} = 1/3$, $\lambda_{\Omega 3} = 1/3$), які дорівнюють апріорним ймовірностям відповідних хвороб ($P_0(\Omega_1)$, $P_0(\Omega_2)$, $P_0(\Omega_3)$). Кожний з потоків ймовірностей хвороб ($\lambda_{\Omega 1} = 1/3$, $\lambda_{\Omega 2} = 1/3$, $\lambda_{\Omega 3} = 1/3$), згідно з чисельником формули (9), повинен пройти «фільтрацію» через ознаки хвороб x_j у вигляді операції множення, яка в МІП відбувається між потоками батьківського вузла та нащадка (рис. 5). На рис. 5 ознаки хворого, який проходить тестування, виділені сірим фоном, а результат розрахунків альтернатив наведений у вигляді вихідних потоків $\lambda_{\Omega 1}^* = 0,016$, $\lambda_{\Omega 2}^* = 0,00426$, $\lambda_{\Omega 3}^* = 0,102$. Стрілки з лівого боку таблиці підкреслюють зменшення загального потоку перерізу мережі.

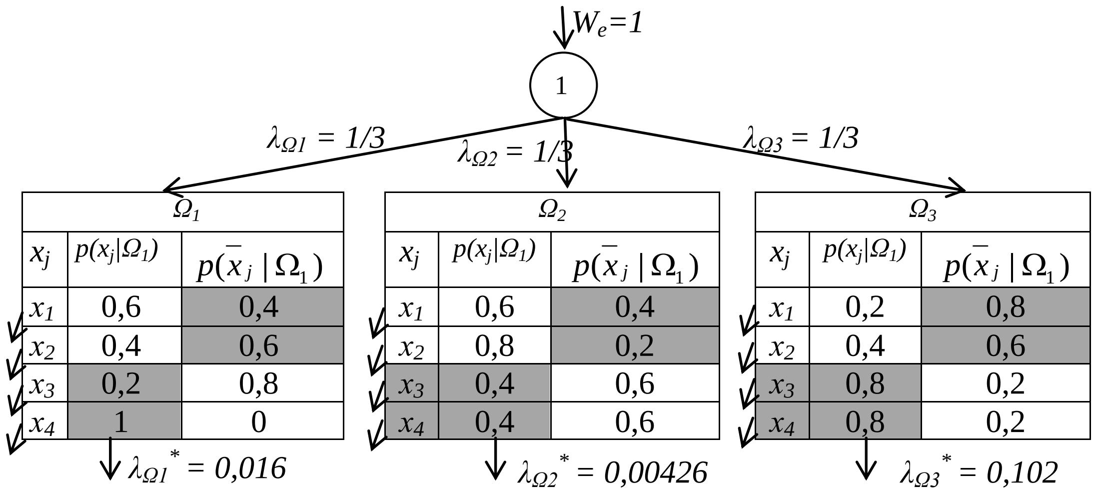

Рис. 5. Байєсівська ймовірнісна мережа класифікації хвороб Ω_1, Ω_2, Ω_3

Висновки

1. У порівнянні з методами аналізу ієрархій (МАІ та МАМ) *метод ієрархічних потоків* (МІП) у сукупності з *груповим методом визначення потоків нащадків*: дозволяє розв'язувати нові класи задач (введння Байєсівського аналізу;

використання нелінійних оцінок впливу нащадків на основі логічних залежностей та нелінійних функцій; розрахунок зміни ієрархій у часі); замінює два методи – МАІ та МАМ; має простішу теоретичну основу; скорочує розрахунки; вектор не співпадаючих між собою оцінок впливу нащадка на розподіл потоку батьківського вузла замінює однозначною величиною, що спрощує розрахунки; відміняє логічно не обґрунтовані зворотні оцінки впливу нащадків з їх додатковими зайвими математичними діями. МІП дозволяє розрахувати: узагальнену функцію мети багатокритеріальної задачі; кластеризацію; виконати ранжування напрямків підприємницької діяльності.

2. Коефіцієнти потоків та локальні коефіцієнти дозволяють отримати більш точний розподіл ієрархічних потоків.

3. Якщо вузли-нащадки мають і позитивний і негативний вплив на вузол батька, то вузол батька бажано розділити на вузли позитивного та негативного впливу на мету.

ЛІТЕРАТУРА

1. Катренко А. В. Системний аналіз об'єктів та процесів комп'ютерізації / А. В. Катренко. – Львов : «Новий світ, 2000». – 424 с.
2. Коваленко И. И. Представление знаний на основе теории грубых множеств / И. И. Коваленко, Т. В. Пономаренко, А. В. Швед. – Николаев : «Илион», 2013. – 52 с.
3. Кутковецький В. Я. Теоретичні основи мереж потоків / В. Я. Кутковецький // Наукові праці : науково-методичний журнал. – Т. 160. Вип. 148. Комп'ютерні технології. – Миколаїв : Вид-во ЧДУ ім. Петра Могили, 2011. – С. 173–183.
4. Кутковецький В. Я. Дослідження операцій : підручник : у 2 ч. / В. Я. Кутковецький. – Миколаїв : МДГУ, 2007. – Ч. 1. – 312 с.; Ч. 2. – 272 с.
5. Саати Т. Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети / Т. Л. Саати. – М. : Либроком, 2011. – 360 с.
6. Christiano P. Electrical Flows, Laplacian Systems, an Faster Approximation of Maximum Flow in Undirected Graph [Електронний ресурс] / [Christiano P., Kelner J. A., Madry A., Shang-Hua Teng, Spealman D.]. – Режим доступу : http://people.csail.mit.edu/madry/docs/maxflow.pdf (18.10.2011).
7. Pawlak Z. Rough Sets Theoretical Aspects of Reasoning about Data / Z. Pawlak. – Boston ; London : Academic Publishers, 1991. – 229 p.
8. Uzga-Rebrovs O. Nenoteiktibu parvaldisana 3 / O. Uzga-Rebrovs. – Rezekne : R. A. Izdevnieciba, 2010. – 560 l pp.

 Дата надходження статті до редколегії 23.04.2014 р.

КУТКОВЕЦТКИЙ Валентин Якович – доктор технічних наук, професор, Чорноморський державний університет імені Петра Могили.

Коло наукових інтересів: дослідження операцій, загальна теорія електротехніки.