УДК 004.942:004.827

Хомченко А. Н.,
д-р ф.-м. наук, профессор, Черноморский государственный университет им. Петра Могилы, г. Николаев, Украина
Сиденко Е. В.,
канд. техн. наук, Черноморский государственный университет им. Петра Могилы, г. Николаев, Украина

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ФУНКЦИИ – «ПАГОДЫ»: КОМПЬЮТЕРНЫЙ АНАЛИЗ КОГНИТИВНО-ГРАФИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

В работе представлен классический вариант функции-«пагоды», а также определены основные свойства, которые наследуют ее новые модифицированные модели. При этом использование когнитивно-графического анализа в оценке свойств соответствующих моделей позволяет определить класс семейства, к которому они относятся. Результаты анализа раскрывают новые возможности симпсоновых тел, в частности, их применение в теории нечетких множеств, как вариантов функции-«крышки» для построения некоторых функций принадлежности. Одним из наиболее интересных свойств функции-«пагоды» является ее применение для построения трехмерных функций принадлежности лингвистических переменных. При этом также сформулированы вероятностные свойства модификаций «пагоды». Анализ новых моделей «пагоды» показывает их высокую устойчивость к тестированию по критериям гармоничности в смысле Кёбе и Привалова.

Ключевые слова: *функция-«крышка»; функция-«пагода»; метод конечных элементов; семейство симпсоновых тел; функция принадлежности; базис.*

Введение. Классическая функция-«пагода» [1] является двумерным аналогом хорошо известной функции-«крышки» [2], получившей распространение в задачах кусочно-линейной интерполяции функции одного аргумента. Поверхность «пагоды» состоит из четырех фрагментов гиперболического параболоида (гипара) и осуществляет билинейную интерполяцию на конечном носителе прямоугольной (квадратной) формы. Первые успехи метода конечных элементов (МКЭ) стали возможны благодаря именно этим простым и наглядным финитным функциям. Сейчас нам известны многие интересные свойства «крышки» и «пагоды», в том числе и вероятностные. Естественным обобщением классической «пагоды» будет применение в качестве конструктивных элементов нелинейных функций – «крышек». Мы применяем набор кривых, образующих симметричные пары («полукрышки»). В работе тестируются 6 таких пар, из которых 5 пар – нелинейные.

Анализ предшествующих публикаций, цель работы. В МКЭ [3] одними из первых стали использовать «пагоду» Галлагер, Раттингер и Арчер (1964), Аргирис (1965), Зенкевич и Ченг (1967). «Пагода» в известном смысле обобщает пирамиду Куранта, который по праву считается основоположником МКЭ (1943). О способах построения «пагоды» можно прочитать в работе [4].

Цель работы – установить, какие свойства классической «пагоды» наследуют новые модели, как изменяется конфигурация модифицированных поверхностей, упростить вычисления интегральных характеристик, например, объем тела, ограниченного «пагодой» и ее носителем.

Когнитивно-графический анализ показывает, что тело, ограниченное «пагодой» и ее носителем, относится к семейству симпсоновых. Архимедовы и платоновы тела известны давно. О симпсоновых телах стали писать недавно. Определение симпсонова тела дают авторы [5]. Новые результаты показывают, что формула Симпсона дает больше, чем от нее ожидают. В тех случаях, когда это возможно, мы даем вероятностную интерпретацию классических и новых результатов. По мнению академика А. В. Скорохода [6] такие попытки представляют особый интерес, как пример проникновения вероятностных идей в невероятностные разделы математики.

Основная часть. Сначала покажем шесть симметричных пар функций-«полукрышек», из которых можно составить «крышку». Не уменьшая общности, будем рассматривать эти пары на каноническом интервале [0,1]. В качестве индексов также используем 0 и 1, в зависимости от того, на каком конце интервала функция принимает наибольшее значение, равное 1.

Модель L:

$$L_0(x) = 1 - x,\ L_1(x) = x. \tag{1}$$

Модель F :

$$F_0(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1,\ F_1(x) = -2x^3 + 3x^2. \tag{2}$$

Модель G :

$$G_0(x) = -6x^5 + 15x^4 - 10x^3 + 1,\ G_1(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3. \tag{3}$$

Модель T :

$$T_0(x) = \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right),\ T_1(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right). \tag{4}$$

Модель Q :

$$Q_0(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)},\ Q_1(x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}. \tag{5}$$

Модель R :

$$R_0(x) = \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}},\ R_1(x) = \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}}. \tag{6}$$

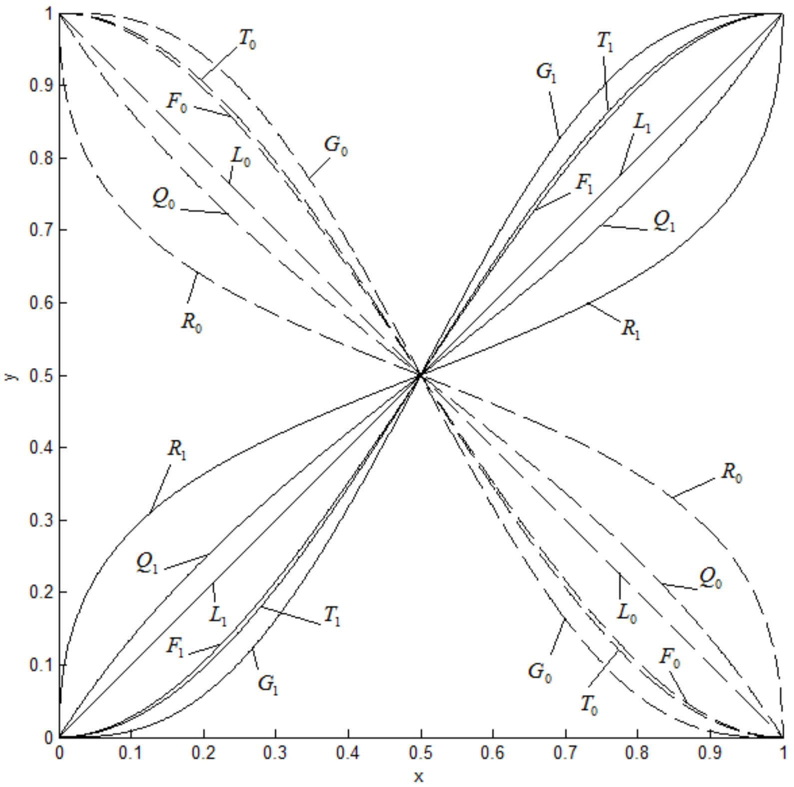

Рис. 1. Графики симметричных пар функций-«полукрышек».

На рис. 1 схематически изображены характерные пары симметричных графиков $\Phi_i(x)$ $(i = 0,1)$. Возрастающие функции $\Phi_1(x)$ – сплошные линии, убывающие $\Phi_0(x)$ – пунктир. Заметим, что все функции обладают свойствами:

$$0 \le \Phi_i(x) \le 1,\ \sum_{i=0}^{1} \Phi_i(x) = 1. \tag{7}$$

Кроме того, возрастающие функции имеют четко выраженные свойства функции распределения вероятностей в интервале [0,1]. Линейная функция $L_1(x)$ отвечает закону равномерного распределения, нелинейные функции описывают неравномерные распределения. Плотности неравномерных распределений различны, однако математическое ожидание во всех случаях равно 0,5. Фактически, здесь мы имеем дело с противоположными случайными событиями. Текущая абсцисса x делит интервал [0,1] на две части: $[0,x]$ и $[x,1]$. Если в [0,1] вбрасывать случайную точку, то вероятность попадания в $[0,x]$ определяет функция $\Phi_1(x)$, а $\Phi_0(x)$ – это вероятность попадания в $[x,1]$. Поэтому (7) обретает простой вероятностный смысл. Интересно, что любая линия из моделей (1)-(6) делит единичный квадрат на два равновеликих прямоугольных треугольника. Как видим, гипотенузу можно искажать, сохраняя неизменной площадь треугольника. Функция-«крышка» – это конструкция из двух «полукрышек» симметричной пары, соединенных верхними концами. При этом длина носителя естественно, увеличивается вдвое. Важно отметить, что в вершине «крышки» образуется гладкий максимум (как в моделях F,G,T) или острый максимум (как в моделях L,Q,R). Эти особенности отражаются на рельефе «пагоды». Заметим, что в теории нечетких множеств и нечеткой логики также применяются инварианты функции-«крышки», в частности, для определения и построения некоторых функций принадлежности (колоколообразная, гауссова, лапласова, П-подобная и треугольная) лингвистических переменных. В данных функциях абсциссой является диапазон изменения переменной X (при нормировании $X \in [0,1]$), а ординатой – степень принадлежности x, $x \in X$ к нечеткому множеству $\underset{\sim}{A}$ ($\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \in [0,1]$) [7]. Функция-«пагода» – это произведение $\Phi(x)\cdot\Phi(y)$ двух основных функций-«крышек» одной переменной. Она состоит из четырех одинаковых фрагментов. Поэтому достаточно построить только один фрагмент «пагоды», т. е. на единичном квадрате $(0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$. Классическая «пагода» – это двумерный аналог модели L. Наша задача – показать и другие возможные модификации «пагоды». Номера функций $\Phi(x),\Phi(y)$ выбираются в зависимости от того, в какой вершине квадрата мы хотим получить вершину «пагоды». На рис. 2 представлены: классическая «пагода» (версия L), а также три модификации F, G и R.

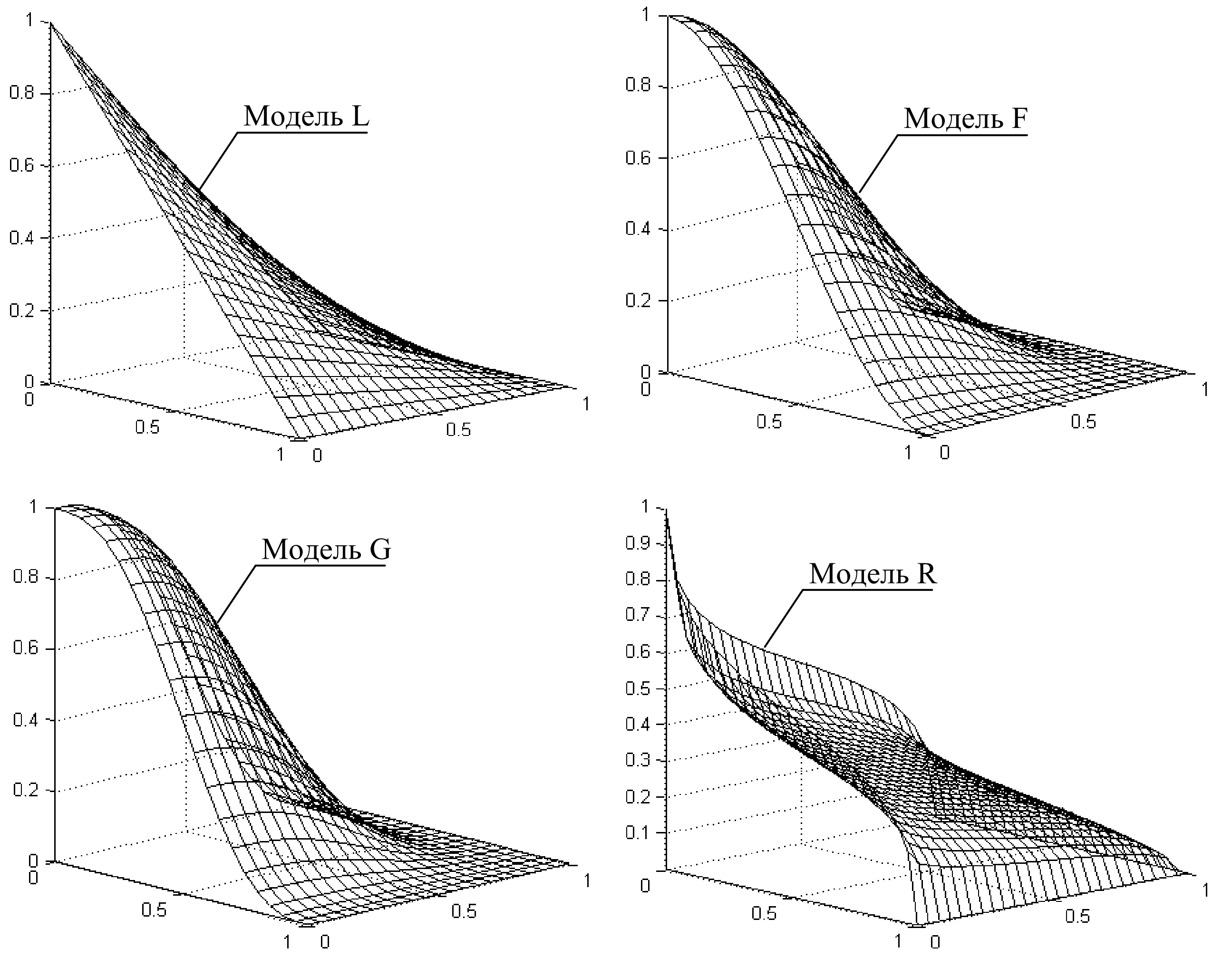

Рис. 2. Классическая «пагода» и нелинейные модификации.

Отметим, что модели «пагоды» на основе кривых *G* и *T* практически не отличаются от модели *F*, а модель *Q* близка к модели *R*. Что же касается объема между «пагодой» и ее носителем, то для всех модификаций он, как и следовало ожидать, одинаков. Таким образом, получен набор из шести равновеликих тел. Понятно, что это только часть коллекции. Инвариантность объема при изменении рельефа накрывающей поверхности – одно из замечательных свойств полученных тел. Интересным, но мало изученным является применение свойств и особенностей функции-«пагоды» для построение трехмерных функций принадлежности лингвистических переменных. Так, например, в работе [7] автор представляет вниманию читателей нечеткие множества типа 2, в которых степень принадлежности определяется нечеткой мерой. Нечеткие множества второго порядка являются обобщением нечетких множеств первого порядка и разрабатывались для обработки большей степени неопределенности [8]. Еще в начале исследований, связанных с теорией нечетких множеств, высказывались соображения о том, что функция принадлежности нечеткого множества первого порядка практически не содержит неопределенности, связанной с ней, что, в свою очередь противоречит слову «нечеткий», что означает «много неопределенности». Другое интересное свойство связано с процедурой вычисления объема. В некоторых случаях при точном интегрировании функций $Z(x,y)$ возникают известные технические трудности. В таких случаях применяются формулы приближенного интегрирования. Мы пришли к выводу, что построенные тела относятся к семейству симпсоновых тел, хотя условия теоремы Симпсона нарушены. По определению, сформулированному авторами [5], только тело модели *L* можно считать симпсоновым. Приведем это

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тело называется симпсоновым, если оно удовлетворяет двум условиям:

1) основания тела лежат в двух параллельных опорных плоскостях;

2) сечение, проведенное параллельно опорным плоскостям на расстоянии x от одной из них, имеет площадь $S(x)$, которая выражается многочленом от x не выше второй степени.

Наши примеры показывают, что полиномиальное представление $S(x)$ и ограничение на степень полинома априори не являются необходимыми. Поэтому мы предлагаем более простое определение симпсонова тела.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тело называется симпсоновым, если его объем можно вычислить точно, используя приближенную формулу Симпсона (правило трех равноудаленных сечений).

Читатель может убедиться, что не каждая тройка параллельных сечений даёт точный результат. Именно поэтому при исследовании новых моделей так необходим когнитивно-графический анализ. Интересно проанализировать, какие еще свойства классической «пагоды» наследуют нелинейные модели.

В частности, мы проверили новые модели «пагоды» на гармоничность. Напомним, что кроме дифференциального критерия гармоничности Лапласа (1782), существуют интегральные критерии: Кёбе (1906) и Привалова (1925).

Дифференциальный критерий имеет вид:

$$\frac{\partial^2 Z(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Z(x,y)}{\partial y^2}=0; \tag{8}$$

интегральный критерий Кёбе

$$\frac{1}{l}\int_l Z(x,y)\,dl = Z\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), \tag{9}$$

где левая часть – среднее интегральное (по периметру носителя) значение $Z(x,y)$, правая часть – значение функции в барицентре квадрата;

интегральный критерий Привалова

$$\frac{1}{S}\iint_S Z(x,y)\,dS = Z\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right), \tag{10}$$

где левая часть – среднее интегральное (по площади носителя) значение $Z(x,y)$.

Анализ показывает, что классическая функция-«пагода» выдерживает тестирование по всем критериям гармоничности. Нелинейные «пагоды» являются гармоническими в смысле Кёбе и Привалова.

Анализ графических образов нелинейных функций $Z(x,y)$ показывает, что они, подобно классическому билинейному базису, способны интерполировать функцию двух аргументов $f(x,y)$ по известным значениям этой функции в вершинах квадрата. Иначе говоря, нет необходимости ограничиваться полиномиальной интерполяцией, если есть другие функции (4), (5), (6), обладающие свойствами базиса (7). На примере классического базиса рассмотрим задачу интерполирования функции $f(x,y)$ в единичном квадрате. Пусть нам известны четыре значения функции f_{ij} в вершинах (узлах) квадрата (рис. 2). Индексы i и j – это абсцисса и ордината конкретной вершины. Интерполянт ищут в виде:

$$P(x,y)=Z_{00}(x,y)\cdot f_{00}+Z_{10}(x,y)\cdot f_{10}+Z_{11}(x,y)\cdot f_{11}+Z_{01}(x,y)\cdot f_{01}. \quad (11)$$

Обычно [1-3] базис $\{Z_{ij}(x,y)\}$ находят методом обратной матрицы, составляя и решая СЛАУ с матрицей 4 × 4. Мы можем составить 4 функции классического базиса по аналогии с функцией $Z_{00}(x,y)$, график которой изображен на рис. 2 (модель *L*).

При этом получим:

$$Z_{00}(x,y)=(1-x)(1-y);\ Z_{10}(x,y)=x(1-y);$$
$$Z_{11}(x,y)=xy;\ Z_{01}(x,y)=y(1-x). \quad (12)$$

Аналогично составляются базисы других моделей. Легко заметить, что каждая функция (12) равна единице в «своём» узле (где индексы i, j совпадают с координатами узла), во всех остальных узлах она равна нулю. При этом сумма функций (12) равна единице. Это интересно, что единицу можно представить не только суммой чисел, но и суммой функций, подчиненных интерполяционной гипотезе. Поэтому в последние годы в научной литературе появилась группа методов, объединенных общим названием: методы разложения единицы. Как и следовало ожидать, все приведенные здесь модели наследуют эти свойства классического базиса (12).

Теперь для всех моделей дадим вероятностную интерпретацию функций $Z_{ij}(x,y)$. Пусть $M(x,y)$ – текущая точка внутри квадрата. Через точку *M* проведем две прямые параллельно координатным осям. При этом образуется 4 прямоугольника. Теперь вбросим случайную точку в единичный квадрат. Нетрудно заметить, что каждая функция $Z_{ij}(x,y)$ определяет вероятность попадания случайной точки в прямоугольник, противолежащий узлу (i,j). Так $Z_{00}(x,y)$ – это вероятность попадания в северо-восточный прямоугольник, $Z_{10}(x,y)$ – вероятность попадания в северо-западный прямоугольник и т. д. Равенство суммы функций единице означает, что мы имеем дело с полной группой случайных событий. Формула (11) напоминает математическое ожидание не только по форме. Она осуществляет взвешенное усреднение граничных значений функции.

С помощью любого из приведенных базисов можно решить барицентрическую задачу Мёбиуса о поузловом распределении единичной массы квадратной пластины со смещенным барицентром. Формула (11) восстанавливает стационарное температурное поле пластины, в вершинах которой присоединены термоэлементы, поддерживающие температуры f_{ij}. Эта формула иллюстрирует несеточную версию метода Монте-Карло со случайными блужданиями. Она использует одношаговую 4-маршрутную схему блужданий со случайным стартом в точке $M(x,y)$. Стоит отметить, что все модели дают близкие результаты, а в некоторых точках температуры просто совпадают. Нетрудно догадаться, что совпадения наблюдаются в центре квадрата, на серединах сторон и в вершинах. По крайней мере 9 точек безразличны к выбору базиса.

Выводы. В качестве конструктивных элементов, формообразующих «пагоду» применяются нелинейные функции-«крышки». Подобран набор из 6-ти симметричных пар кривых. Сформулированы вероятностные свойства модификаций «пагоды». На основе когнитивно-графического анализа и результатов расчета установлена инвариантность объема тела при изменении рельефа финитной функции, накрывающей носитель. Во всех случаях точное значение объема дает правило трех параллельных сечений. Это неожиданный результат, т. к. условия теоремы Симпсона в большинстве случаев нарушены. Сформулировано новое (более простое) определение симпсонова тела. Доказано, что новые функции являются гармоническими по Кёбе-Привалову, и могут служить базисами в задачах диагностики температурного поля пластины. Полученные результаты исследования дают возможность рассматривать функцию-«пагоду» как инвариант трехмерных нечетких множеств.

ЛІТЕРАТУРА

1. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. – М. : Мир, 1997. – 350 с.
2. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж. Оден. – М. : Мир, 1976. – 464 с.
3. Марчук Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. – М. : Наука, 1981. – 416 с.
4. Хомченко А. Н. П'ять способів побудови функції-«пагоди» / А. Н. Хомченко, І. О. Астіоненко, Н. О. Козуб // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Тавр. держ. агротехнол. ун-т. – Вип. 4. Т. 37. – Мелітополь : ТДАТУ, 2008. – С. 24–31.
5. Кукуш О. Г. Призматоїд та його об'єм / О. Г. Кукуш, Р. П. Ушаков // У світі математики. Т. 8. Вип. 2. – К. : ТВІМС, 2002. – С. 46–50.
6. Скороход А. В. Особливий характер теорії ймовірностей в математичних науках / А. В. Скороход // У світі математики. Т. 3. Вип. 2. – К. : ТВІМС, 1997. – С. 2–4.
7. Пегат А. Нечеткое моделирование и управление/ А. Пегат ; пер. с англ.. – М. : БИНОМ, 2012. – 798 с.
8. Ремезова Е. М. Нечеткие множества второго порядка: понятие, анализ и особенности применения / Е. М. Ремезова // Современные проблемы науки и образования. – № 5. – М. : Академия Естествознания, 2013. – С. 48–60.

Хомченко А. Н., Сіденко Є. В.,
Чорноморський державний університет імені Петра Могили, м. Миколаїв, Україна

Деякі узагальнення функції-«пагоди»: комп'ютерний аналіз когнітивно-графічних властивостей

В роботі представлено класичний варіант функції-«пагоди», а також визначені основні властивості, які успадковують її нові модифіковані моделі. При цьому використання когнітивно-графічного аналізу в оцінці властивостей відповідних моделей дозволяє визначити клас сімейства, до якого вони належать. Результати аналізу розкривають нові можливості сімпсонових тіл, зокрема, їх застосування в теорії нечітких множин, як варіантів функції-«кришки» для побудови деяких функцій належності. Однією з найбільш цікавих властивостей функції-«пагоди» є її застосування для побудови тривимірних функцій належності лінгвістичних змінних. При цьому також сформульовані ймовірнісні властивості модифікацій «пагоди». Аналіз нових моделей «пагоди» показує їх високу стійкість до тестування за критеріями гармонійності в сенсі Кёбе і Привалова.

Ключові слова: *функція-«кришка»; функція-«пагода»; метод кінцевих елементів; сімейство сімпсонових тіл; функція належності; базис.*

Khomchenko A. N., Sidenko Ie. V.,
Petro Mohyla Black Sea State University, Mykolaiv, Ukraine

Some generalizations of «pagoda»-function: computer analysis of cognitive-graphical properties

In this work the classical «pagoda»-function, which is a two-dimensional analogue of the well-known «roof»-function, which became widespread in the problems of piecewise linear interpolation of a function of one argument is analyzed. Now we know many interesting properties of the «roof»-function and «pagoda»-function, including probabilistic. The aim is to determine what features of the classic «pagoda»-function inherit the new models, how to change the configuration of modified surfaces, and also simplify the calculations of integral characteristics. Cognitive-graphic analysis shows that the body is limited by «pagoda»-function and its carrier belongs to the Simpson's family. The new results show that Simpson's formula gives more than it is expected. The «roof»-function is a construction of two «semi-roofs» of symmetrical pairs, which are connected by the upper ends. Thus the length of the carrier is doubled. Note that in the theory of fuzzy sets and fuzzy logic are also used invariants of «roof»-function, in particular, to identify and build some of the membership functions. An interesting but poorly studied is the application of the properties and characteristics of «pagoda»-function for the construction of three-dimensional membership functions of linguistic variables. The analysis shows that the classical «pagoda»-function withstands testing for all the harmony criteria, and can serve as a basis in the diagnostics of the temperature field of plate.

Key words: *«roof»-function; «pagoda»-function; finite elements method; family of Simpson's bodies; membership function; basis.*

Дата поступления статьи в редколлегию 12.11.2015