(Англія, Франція, Німеччина) : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.04 / С. І. Синенко. – К., 2002. – 21 с.

8. Соколова А. В. Професійна підготовка вчителя у системі педагогічної освіти Англії і Шотландії : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : спец. 13.00.01 / А. В. Соколова. – О., 2009. – 20 с.

9. Andritsou M. La formation continue des professeus de langues étrangères / M. Andritsou // Le français dans le monde. – 2005. – № 325. – P. 25-29.

10. Asunta T. Developments in Teacher Education in Finland. In-service Education and Training [Electronic resource] / T. Asunta. – Available from : http://www.see-educoop.net/.../Tula.pdf.

11. Formarea profesională continuă în România. – Bucuresti, 2008. – 206 p.

12. Iucu R. Formarea cadrelor didactice. Sisteme, politici, strategii / R. Iucu. – Bucharest : Humanitas Educational, 2004. – 200 p.

13. National report – Romania // The PROSPECTS of teacher education in south-east Europe. – Ljubljana : Pedagoška fakulteta, 2006. – 582 p.

14. Strong Performers and Successful Reformers in Education: Lessons from PISA for the United States. – OECD Publishing, 2011. – 258 p.

Дата надходження до редакції: 11.11.2013 р.

УДК 51(07):373.5.016

Дмитро БЕЛЕШКО,
кандидат педагогічних наук,
професор кафедри математики
з методикою викладання
Рівненського державного гуманітарного університету

МЕТОД ДОВЕДЕННЯ ВІД СУПРОТИВНОГО. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ. ПРАКТИКА

У статті проаналізовано теоретичні основи доведення методом від супротивного; розглянуто класичні та некласичні схеми, практичне застосування означеного доведення, деякі питання методики, роль усних вправ та використання методу від супротивного в позакласній роботі.

Ключові слова: *теорема, метод від супротивного, закон виключення третього, класична та некласична схеми.*

В статье проанализированы теоретические основы доказательства методом от противного; рассмотрены классические и неклассические схемы, практическое применение указанного доказательства, некоторые вопросы методики, роль устных упражнений и использование метода от противного во внеклассной работе.

Ключевые слова: *теорема, метод от противного, закон исключенного третьего, классическая и неклассическая схемы.*

In the article analyzes the theoretical basis of the method of proof by contradiction, considered the classical scheme of proof by contradiction, non-classical scheme of proof by contradiction method, the practical application of the method of proof by contradiction, some issues of methodology, the role of oral exercises and use the method of contradiction in extracurricular activities.

Key words: *theorem, the method of contradiction, the law of excluded middle, classical and non-classical scheme.*

Постановка проблеми. Доведення методом від супротивного відіграє в математиці дуже важливу роль, адже ним користуються в тих випадках, коли пряме доведення є досить важким. При цьому майже кожне пряме доведення можна перетворити в доведення методом від супротивного.

Проведені нами дослідження дають змогу стверджувати, що при доведенні методом від супротивного виникають труднощі, які можна поділити на три види: математичні, логічні та психологічні. Зазначимо, що публікацій з означеної теми практично немає.

Теоретичні основи доведення методом від супротивного

Теорема. Побудова теореми. У математиці теоремою називають будь-яке твердження, що має доведення його істинності. Означене поняття характеризується двома основними ознаками:

1. Теорема – це існування твердження (правильного, справедливого). Нагадаємо, що твердженням у логіці називається речення, яке може бути істинним або хибним. При цьому важливу роль відіграють наступні логічні закони:

– *закон виключення третього:* будь-яке висловлювання може бути або істинним, або хибним (нічого третього бути не може);

– *закон несуперечності:* ніяке висловлювання не може бути одночасно і істинним, і хибним.

Речення, в якому неможливо одночасно визначити, істинне воно чи хибне, не є твердженням.

2. Істинність теореми визначається за допомогою доведення – спеціального роздуму, що складається з ланцюжка правильних висновків.

Твердження без доведення (навіть коли воно істинне) не є теоремою.

У шкільній математиці прийнято розрізняти теореми двох типів. До першого з них відносяться

© Белешко Д., 2014

теореми з наступною суттю: "Якщо A, то B", де A і B – деякі твердження. У цьому висловлюванні A називається умовою, а B – висновком теореми.

До другого типу відносяться так звані теореми існування, що трактуються наступним чином: "Існує об'єкт, який володіє даною властивістю P". У таких теоремах виділити умову і висновок неможливо.

Досвід засвідчує: учні не завжди чітко розуміють, що, зазвичай, стверджує теорема "Якщо A, то B", тому нерідко припускаються грубих помилок. У теоремі "Якщо A, то B" йдеться про те, що:

1) щоразу, коли виконується умова A, обов'язково істинним є і висновок B;

2) якщо умова A не виконується, то про істинність висновку B нічого сказати не можна (він може бути не лише істинним, а й хибним).

Приклад 1. Наведемо найбільш типові помилки, які допускають учні. Знаючи, що в прямокутнику діагоналі рівні, вони нерідко вважають, що якщо чотирикутник не є прямокутником, то його діагоналі нерівні між собою; з теореми "Якщо дві паралельні площини перетнути третьою, то прямі їх перетину паралельні" виводять, що якщо дві непаралельні площини перетнути третьою, то прямі їх перетину не є паралельними і т. д.

Пряме доведення теореми. Розрізняють два види доведення: пряме і непряме. Прямим називається доведення, коли воно є ланцюжком послідовно зв'язаних висновків, що безпосередньо ведуть від умови теореми до висновку (або від аксіоми і раніше доведених теорем до даної теореми).

Приклад 2. Довести, що якщо $a + b + c = 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Доведення. За умовою $a + b + c = 0$, тому $a + b = -c$, звідси – $(a + b)^3 = -c^3$ або $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = -c^3$, $a^3 + b^3 - 3abc = -c^3$; таким чином доведено, що $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Приклад 3. Довести справедливість рівності $8\cos10^0 \cos20^0 \cos40^0 = ctg10^0$.

Доведення.

$$8\cos10^0 \cos20^0 \cos40^0 = \frac{4 \cdot 2\sin10^0 \cos10^0 \cos20^0 \cos 40^0}{\sin10^0} =$$

$$= \frac{4\sin20^0 \cos20^0 \cos 40^0}{\sin10^0} = \frac{2\sin40^0 \cos 40^0}{\sin10^0} = \frac{\sin80^0}{\sin10^0} =$$

$$= \frac{\cos10^0}{\sin10^0} = ctg10^0.$$

Непрямі доведення. Розглянемо суть непрямого доведення. Нехай потрібно довести деяку теорему. Замість цього ми доводимо інше твердження, яке пов'язане з даним так, що з отриманого результату обов'язково випливає істинність означеної теореми. Більшість шкільних теорем доводяться непрямим методом, що викликає значні труднощі у вивченні математики.

Приклад 4. На стороні AD і на діагоналі AC паралелограма взято точки M і N таким чином, що $AM = \frac{1}{5}AD$, $AN = \frac{1}{6}AC$. Доведіть, що точки B, M, N належать одній прямій.

Доведення. $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Звідси отримаємо, що $5\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AD} - 5\overrightarrow{AB}$, $6\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AB}$, віднімемо від першого рівняння друге: $5\overrightarrow{BM} - 6\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{BM} = \frac{6}{5}\overrightarrow{BN}$. Тобто вектори $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{BN}$ колінеарні і точки B, M, N лежать на одній прямій.

Більша частина роздумів щодо вищеозначеного присвячена доведенню не того твердження, що подане в задачі, а обґрунтуванню колінеарності векторів $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{BN}$. Із цього результату потім легко виводиться потрібне.

Приклад 5. Довести, що для будь-яких $a>1$ виконується нерівність $(a^3 + a^2 + 2)^2 > 4(a^3 + 1)(a^2 + 1)$.

Розв'язування. Розглянемо допоміжне квадратне рівняння $x^2 - (a^3 + a^2 + 2)x + (a^3 + 1)(a^2 + 1) = 0$.

Легко перевірити, що числа $(a^3 + 1)$ і $(a^2 + 1)$ є його коренями. Тому дискримінант квадратного рівняння повинен бути додатним:

$$(a^3 + a^2 + 2)^2 - 4(a^3 + 1)(a^2 + 1) > 0.$$

$$(a^3 + a^2 + 2)^2 > 4(a^3 + 1)(a^2 + 1).$$

У наведеному прикладі замість потрібної нерівності ми спочатку довели, що допоміжне квадратне рівняння має два різних дійсних корені.

Приклад 6. У рівнобедреному трикутнику з основою a і бічною стороною b кут при вершині дорівнює 20^0. Доведіть, що $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Доведення.

$\sin30^0 = \sin(20^0 + 10^0) = \sin20^0 \cos10^0 + \cos20^0 \sin10^0 = 2\sin10^0 + \cos^2 10^0 + \cos^2 10^0 \sin10^0 - \sin^3 10^0 = 3\sin10^0\cos10^0 - \sin^3 10^0 = 3\sin10^0(1 - \sin^2 10^0) - \sin^3 10^0 = 3\sin10^0 - 4\sin^3 10^0$. За умовою $\sin10^0 = \frac{a}{2b}$, тому маємо $\frac{1}{2} = \frac{3a}{2b} - \frac{4a^3}{8b^3}$, звідси $-b^3 = 3ab^2 - a^3$ або $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Потрібні значні зусилля, щоб зрозуміти подібні доведення, але ще складніше придумати їх самостійно. Тому досить часто на уроках необхідно витратити чимало сил, щоб навчити учнів цьому.

Заперечення твердження. Маючи деяке висловлювання T, на його основі завжди можна скласти нове – "Неправильно, що T". Якщо висловлювання T є істинним, то нове висловлювання буде хибним і навпаки. Висловлювання "Неправильно, що T" позначається $\overline{T}$ і називається запереченням висловлювання T.

Зазвичай запереченням твердження T називається також висловлювання T, яке хибне, коли дане висловлювання істинне, та істинне, коли воно хибне.

Очевидно, що твердження T, у свою чергу, є запереченням для $\overline{T}$, тобто твердження $\overline{\overline{T}}$ (заперечення заперечення) рівносильне вихідному твердженню T (закон заперечення заперечення).

Описаний вище спосіб отримання заперечення, що називається зовнішнім, має серйозний недолік, адже із завданням у такій формі досить незручно працювати. Тому в математиці використовують інші, більш складні, але практичніші способи побудови заперечень (їх ще називають внутрішніми).

Приклад 7. Розглянемо твердження про те, що в будь-якому випуклому чотирикутнику сума діагоналей не менша від суми його сторін. Це висловлювання неправильне, тому його заперечення є істинним. Побудуємо заперечення спочатку зовнішнім способом: "Неправильно, що в будь-якому випуклому чотирикутнику сума діагоналей менша від суми сторін".

Заперечення, задане внутрішнім способом, формулюється наступним чином: «Існує хоча б один чотирикутник, в якого сума діагоналей менша за суму сторін».

Отже, при внутрішньому запереченні відбувається значна перебудова всього речення, виконати яку, звичайно, набагато складніше, ніж механічно прикріпити слова "неправильно, що…". Однак переваги цього заперечення досить очевидні, адже з таким завданням значно зручніше проводити подальшу роботу.

Яким же чином будуються внутрішні заперечення? Із цією метою учням буде достатньо зрозуміти і засвоїти два основні правила.

Правило №1

Твердження	Його заперечення
1. Усі дані об'єкти володіють однією і тією ж властивістю Р. 2. Випадковість: об'єкти А і В володіють властивістю Р	1. Хоча б один із даних об'єктів не володіє властивістю Р або існує хоча б один такий об'єкт, який не володіє властивістю Р. 2. Хоча б один з об'єктів А або В не володіє властивістю Р

Правило №2

Твердження	Його заперечення
1. Деякі з даних об'єктів володіють властивістю Р або існує хоча б один об'єкт, що володіє властивістю Р. 2. Випадковість: хоча б один з об'єктів А або В володіє властивістю Р	1. Усі дані об'єкти не володіють властивістю Р. 2. Об'єкти А і В не володіють властивістю Р

Приклад 8.

1. При будь-якому натуральному значенні n дріб $\frac{12n+1}{30n+2}$ нескоротний	1. Існує хоча б одне натуральне число n, при якому дріб $\frac{12n+1}{30n+2}$ скоротний
2. У прямокутному трикутнику куб гіпотенузи завжди більший ніж сума кубів його катетів	2. Знайдеться хоча б один прямокутний трикутник, в якого куб гіпотенузи не більший ніж сума кубів його катетів
3. Існує трикутник, в якого всі висоти менші 1 см, а площа – не менша 100 см^2	3. Будь-який трикутник, в якого всі висоти менші 1 см, має меншу площу ніж 100 см^2

Важливим також для учнів є вміння створювати заперечення для твердження виду "Якщо А, то В". Усе це робиться на основі наступних простих роздумів. Кожне висловлювання виду "Якщо А, то В" стверджує, що в усіх випадках, коли виконується умова А, обов'язково повинен виконуватися і висновок В. У зв'язку з цим заперечення може бути сформульовано наступним чином: "Існує хоча б один випадок, коли умова А виконується, а висновок В – ні".

Приклад 9.

1. Якщо в трикутнику два кути гострі, то третій кут – тупий	1. Існує хоча б один трикутник, в якого два кути гострі, а третій – не тупий
2. Дві прямі, перпендикулярні одній і тій же площині, паралельні	2. Існує хоча б одна пара прямих перпендикулярних до даної площини, але непаралельних між собою
3. Якщо дві паралельні площини перетнути третьою, то прямі перетину паралельні	3. Існує три таких площини, з яких перші дві паралельні, а третя перетинає їх не по паралельних прямих

Несумісне твердження. У математиці часто доводиться мати справу з логічними несумісними твердженнями, тому необхідно розрізняти два типи несумісності.

1. Суперечливість твердження. Логіка визначає це поняття наступним чином: «Два твердження називаються суперечливими, якщо вони не можуть бути одночасно ні істинними, ні хибними».

Отже, при істинності одного з них інше завжди буде хибним і, навпаки, при хибності одного, інше – істинне.

Найважливіший випадок такого типу ми вже розглядали: будь-яке твердження Т і його заперечення є логічно суперечливими.

2. Протилежні твердження. Два твердження називаються супротивними, якщо не можуть бути одночасно істинними, але можуть бути одночасно хибними.

Ось декілька прикладів таких тверджень:

1. Різниця двох зростаючих на R функцій є зростаючою функцією	1. Різниця двох зростаючих на R функцій не є зростаючою функцією
2. Якщо функція має тільки один максимум, то він є найбільшим значенням функції на всій її області визначення	2. Якщо функція має лише один максимум, то він не є найбільшим значенням функції на всій її області визначення
3. Якщо F є первісною функції f, то F(-x) є первісною функції f(-x)	3. Якщо F є первісною функції f, то F(-x) не є первісною функції f(-x)

Загалом, для твердження типу "Якщо А, то В" дуже легко створити протилежне, що визначається як "Якщо А, то не В".

Зауваження. Термін «протилежне твердження» досить невдалий, адже використовується в елементарній математиці не лише у вказаному виді, але й в іншому змісті. Досить часто для твердження "Якщо А, то В" протилежним називають твердження "Якщо А, то не В". Щоб запобігти двозначності, протилежність у змісті в логіці називають контрарністю.

Якщо ми зустрічаємося з парою логічно несумісних тверджень, то сприймаємо цей факт як прояв суперечності, що свідчить про те, що хоча б одне із вказаних тверджень хибне.

Помилковим є висновок про те, що в будь-якому випадку одне із тверджень є істинним. Це істинно, якщо наша пара тверджень суперечлива, і хибно, якщо твердження контрарні.

У результаті розглянемо три твердження:

1. Якщо пряма перетинає графік функції, то вона не є дотичною до даного графіка.

2. Якщо пряма перетинає графік функції, то вона є дотичною до даного графіка.

3. Існує лише один випадок, коли пряма, що перетинає графік функції, є дотичною до даного графіка.

Твердження 1 і 2 – контрарні і тому не можуть бути одночасно істинними. Звідси слідує, що або одне з них, або обидва – хибні (у даному випадку обидва є хибними).

Твердження 1 і 3 – суперечливі, тому можна вважати, що одне із них є істинним, а інше – хибним.

Усе сказане в логіці визначається у вигляді двох законів правильного мислення.

Закон несуперечності. Два несумісні твердження не можуть бути одночасно істинними, адже хоча б одне із них – хибне.

Закон виключення третього. Два суперечливих твердження не можуть бути одночасно хибними, одне з них обов'язково є істинним.

Спростування. На практиці часто доводиться мати справу із твердженнями, істинність яких сумлінна – гіпотезами.

Якщо гіпотезу вдається довести, то вона перетворюється в теорему. Нерідко гіпотези виявляються хибними. Доведення хибності деякого твердження називається його спростуванням.

У шкільній математиці використовують два основні способи спростування.

Спосіб 1. Щоб впевнитися в тому, що твердження "Якщо А, то В" – хибне, достатньо привести хоча б один випадок, який демонструє, що А виконується, а В – ні. Це зображення і називається контрприкладом.

Приклад 10. Чи правильно, що із неперервності функції слідує її диференціювання? Ні. У якості доведення достатньо навести функцію y=|x|, яка в точці x=0 є неперервною, але недиференційованою.

Якщо в чотирикутнику дві протилежні сторони рівні, а дві інші – паралельні, чи можна стверджувати, що чотирикутник – паралелограм? Ні. Контрприкладом є рівнобічна трапеція.

Спосіб 2. Сутність цього способу полягає в наступному. Нехай дана деяка гіпотеза, яку ми хочемо спростувати. Для цього ми тимчасово вважаємо її істинною і робимо висновок, що випливає з означеного факту. Якщо вдасться зробити висновок, логічно несумісний із деяким істинним твердженням, то це означатиме, що гіпотеза неправильна.

Приклад 2. Якщо у турнірі беруть участь 15 шахістів, чи можливо, що у деякий момент кожен із них зіграє рівно 7 партій?

Розв'язок. Припустимо, що така ситуація можлива. Спробуймо підрахувати, скільки всього партій було зіграно. Для цього зауважимо, що добуток 7х15 дорівнює подвоєному числу партій. Проте число 7х15 не є парним! Отриманий результат є абсурдним: число 7х15 повинно бути парним, хоча таким не є. Це і спростовує нашу гіпотезу.

Доведення методом від супротивного

Ідея цього методу є досить простою. Якщо потрібно довести деяку теорему T, то замість неї ми можемо сформулювати заперечення $\overline{T}$ і спростувати його. Зважаючи на те, що із двох тверджень T і $\overline{T}$ одне є істинним, спростування твердження $\overline{T}$ є одночасно доведенням теореми T.

Приклад 12. Довести, що у прикладі на множення

$$\begin{array}{r} xxx3 \\ xx \\ \hline xxx7 \\ xxxxx \\ \hline xxxxx7 \end{array}$$

допущено помилку.

Доведення. Замість доведення даного твердження будемо спростовувати його заперечення "приклад розв'язаний правильно". Із цією метою застосуємо спосіб приведення до абсурду. Насправді, якщо вважати, що обчислення здійснене без помилок, то друга цифра другого множника дорівнює 9, оскільки тільки в цьому випадку перший добуток буде закінчуватися на 7. Проте другий добуток більший від першого, тому перша цифра другого множника повинна бути більшою за іншу, тобто більшою 9. Отримали абсурдний висновок, адже цифр, більших за 9, не буває. Це означає, що заперечення, сформульоване нами, спростовано. Одночасно ми отримали доведення потрібного твердження.

Як бачимо, спосіб від супротивного є одним із різновидів непрямого доведення.

Приклад 13. Довести, що число $\sqrt[3]{2}$ не можна подати у вигляді суми $p+\sqrt{q}$, де p і q – раціональні числа.

Доведення. Спершу з'ясуємо, що ми хочемо довести. Необхідно впевнитися в тому, що які б не були раціональні числа p і q, завжди $p+\sqrt{q}\neq\sqrt[3]{2}$. Заперечення цього твердження звучить так: існує хоча б одна така пара раціональних чисел p і q, що $p+\sqrt{q}=\sqrt[3]{2}$.

Спростуємо це твердження. Насправді, підносячи обидві частини нашого рівняння до кубу, отримаємо $p^3+3pq+\left(3p^2+q\right)\sqrt{q}=2$. Звідси $\sqrt{q}=\dfrac{x-p^3-3pq}{3p^2+q}$ ($3p^2+q>0$).

Отримали абсурдний результат: з одного боку, $\sqrt{q}$ – число ірраціональне (за умовою), а з другого – раціональне, отримане із раціональних чисел за допомогою операцій додавання, віднімання, множення й ділення. Це означає, що спростування заперечення нашої теореми завершено, адже доведено те, що потрібно було довести.

Приклад 14. Довести, що рівняння $3x^2 - 4y^2 = 13$ не має цілих розв'язків.

Доведення. Будемо спростовувати заперечення, що рівняння $3x^2 - 4y^2 = 13$ має хоча б один розв'язок a, b у цілих числах. Тоді справедлива рівність $3a^2 - 4b^2 = 13$, або $3(a^2 - 1) - 4b^2 = 10$. Не важко помітити, що a – непарне число, тому $a^2 - 1$ ділиться на 4, а значить на 4 ділиться і ліва частина рівняння. У правій частині – число 10, яке на 4 не ділиться.

Отримана суперечність спростовує заперечення і одночасно доводить, що рівняння $3x^2 - 4y^2 = 13$ не має цілих розв'язків.

Класична схема доведення методом від супротивного

У шкільній практиці учням подається наступна таблиця доведення теорем способом від супротивного.

Сутність способу доведення від супротивного:

1.	Робимо припущення, суперечливе тому, що потрібно довести
2.	З'ясуємо, що слідує із зробленого припущення на основі аксіом, попередніх теорем і означень
3.	Встановлюється логічна несумісність між тим, що отримали, і тим, що відомо з умови даної теореми, з аксіом, означень або раніше доведених теорем
4.	Висновок: припущення є неправильним, правильне те, що потрібно було довести

Такий порядок роздумів називається класичною схемою, адже добре відомий учителю і широко використовується на уроках математики. Неважко зрозуміти, що в цілому означені припущення лише за формою відрізняються від схеми попереднього пункту.

Недоліки класичної схеми. Використання класичної схеми доведення методом від супротивного приховує в собі два серйозні недоліки, які вчитель завжди повинен враховувати в роботі.

Перший із них полягає в тому, що учні, запам'ятавши алгоритм роботи, перестають розуміти логічну сутність доведення. Воно для них перетворюється в формальну процедуру, яка не має чіткого логічного смислу.

Не менш важливим є другий недолік, пов'язаний із першим пунктом класичної схеми.

Некласичні схеми доведення способом від супротивного

У математичній практиці використовується певний ряд схем міркувань, які за своєю логічною природою рівносильні розглянутим вище схемам доведення від супротивного. Вчителю корисно знати ці схеми, вони нерідко зустрічаються в науковій і навчальній літературі.

Під час аналізу матеріалу ми використовуємо елементи математичної логіки.

Схема 1. Нехай потрібно довести теорему $A \Rightarrow B$ ("Якщо А, то В"). Перетворимо формулювання наступним чином:

$$(A \Rightarrow B) \equiv \left(\overline{A} \vee B\right) \equiv \left(\overline{A} \vee \overline{\overline{B}}\right) \equiv \left(\overline{\overline{B}} \vee \overline{A}\right) \equiv \left(\overline{B} \Rightarrow \overline{A}\right)$$

Отже, замість теореми $A \Rightarrow B$ можна довести теорему $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ ("Якщо не В, то не А"). Теорема $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ називається контрпозицією теореми $A \Rightarrow B$.

Сутність нашої схеми полягає в тому, що замість теореми $A \Rightarrow B$ ми доводимо її контрпозицію $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Приклад 15. Довести, що у простого трицифрового числа цифри не можуть створювати арифметичну прогресію.

Доведення. Контрпозиція нашого твердження є такою: якщо цифри трицифрового числа створюють арифметичну прогресію, то воно не може бути простим.

І справді, нехай цифри числа мають вигляд $x, x+d, x+2d$. Розглянемо їх суму $x+x+d+x+2d = 3(x+d)$. Як бачимо, сума цифр ділиться на 3, тому і саме число ділиться на 3, тобто не є простим.

Процес доведення цим способом полягає в тому, що ми заперечуємо висновок теореми і, не використовуючи умови А, приходимо до заперечення цієї умови (доводимо $\overline{A}$).

Відзначимо, що побудувати контрпозицію для заданої теореми не завжди просто. Корисно звернути увагу на теореми типу $AB \Rightarrow C$. Контрпозиція отримується таким чином: $\overline{C} \Rightarrow \overline{AB}$, що не важко перетворити на: $(\overline{C} \Rightarrow \overline{AB}) \equiv (\overline{\overline{C}} \vee \overline{AB}) \equiv (\overline{\overline{C}} \vee \overline{A} \vee \overline{B}) \equiv ((\overline{\overline{C}} \vee \overline{A}) \vee \overline{B}) \equiv (\overline{\overline{C}A} \vee \overline{B}) \equiv (A\overline{C} \Rightarrow \overline{B})$.

Отже, контрпозицію можна представити у вигляді $A\overline{C} \Rightarrow \overline{B}$, тобто в якості умови використовується заперечення висновку вихідної теореми і однієї з умов, в якості зауваження – заперечення залишеної умови.

Схема 2. Перетворимо теорему $A \Rightarrow B$ наступним чином:

$(A \Rightarrow B) \equiv (\overline{A} \vee B) \equiv (\overline{A} \vee B \vee \overline{A}) \equiv ((\overline{A} \vee B) \vee \overline{A}) \equiv (\overline{A\overline{B}} \vee \overline{A}) \equiv (A\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$.

Теорема "Якщо А, то В" рівносильна теоремі "Якщо А і не В, то не А". Тому замість вихідної теореми можна спробувати довести отриману. У цьому і полягає суть схеми 2.

Приклад 16. Довести, що якщо натуральне число n не є цілим степенем числа 10, то $lg\, n$ – ірраціональне число.

Доведення. У даному випадку: А) натуральне число n не є цілим степенем числа 10; В) $lg\, n$ – ірраціональне число.

Замість теореми $A \Rightarrow B$ будемо доводити теорему $A\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, тобто виходячи з умови $A\overline{B}$, доведемо, що n має бути цілим степенем числа 10.

Отже, нехай $lg\, n$ – раціональне число, тобто $lg\, n = \frac{p}{q}$ де p і q – натуральні числа. Тоді $10^{\frac{p}{q}}$, або $10^p = n^q$. Звідси випливає, що n^q є числом типу 10…0, а це можливо лише у випадку, коли n є цілим степенем числа 10.

Твердження $A\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ доведено, а також доведено і дану теорему $A \Rightarrow B$.

Як бачимо, процес доведення за схемою 2 полягає в тому, що ми заперечуємо висновок теореми $A \Rightarrow B$, зберігаючи її умову, і на цій основі з допомогою роздумів приходимо до заперечення умови. З отриманого результату випливає суперечність: виявляються одночасно істинними твердження A і $\overline{A}$, що неможливо.

Схема 3. Означена схема ґрунтується на наступному перетворенні:

$(A \Rightarrow B) \equiv (\overline{A} \vee B) \equiv (\overline{A} \vee B \vee B) \equiv ((\overline{A} \vee B) \vee B) \equiv (\overline{A\overline{B}} \vee \overline{B}) \equiv (A\overline{B} \Rightarrow B)$.

Тобто замість теореми $A \Rightarrow B$ можна довести теорему $A\overline{B} \Rightarrow B$ ("Якщо А і не В, то В").

Приклад 17. Доведіть, що яке б не було ціле число n, частки $\frac{n-6}{15}$ і $\frac{n-5}{24}$ одночасно не можуть бути цілими числами.

Доведення. У нашому випадку:

А) n є будь-яким цілим числом;

В) $\frac{n-6}{15}$ і $\frac{n-5}{24}$ не є одночасно цілими числами.

Відповідно до схеми 3 доведемо наступне: якщо n – довільне ціле число, а $\frac{n-6}{15}$ і $\frac{n-6}{24}$ одночасно є цілими числами, то хоча б однин із представлених дробів виявиться нецілим числом. Звідси, за умовою $\frac{n-6}{15} = u$, а $\frac{n-6}{24} = v$, де u і v – цілі числа. Отже, отримаємо:

$$n = 15u + 6; \; n = 24v + 5$$

або

$$15u + 6 = 24v + 5; \; 24v - 15u = 1;$$

$$3(8v - 5u) = 1; \; 8v - 5u = \frac{1}{3}.$$

Останнє рівняння неможливе, якщо u і v – цілі числа, тому доводиться визнати, що хоча б одне із чисел u або v – неціле.

Таким чином, ми довели теорему про те, що $A\bar{B}\Rightarrow B$, а отже, $A\Rightarrow B$.

Схема 4. Нехай потрібно довести теорему $A\Rightarrow B$. Для цього розглянемо деяке правильне твердження I. Маємо:

$$(A\Rightarrow B)\equiv(\bar{A}\vee B)\equiv(\bar{A}\vee B\vee I\bar{I})\equiv(\overline{A\bar{B}}\vee I\bar{I})\equiv(A\bar{B}\Rightarrow I\bar{I}).$$

Як бачимо, теорема $A\Rightarrow B$ рівносильна теоремі $A\bar{B}\Rightarrow I\bar{I}$, що і є логічною основою схеми 4. На відміну від попередніх схем, тут має місце складність: істинне твердження і зазвичай невідоме до доведення. Його слід шукати в процесі роздумів. Як наслідок – формулювання $A\bar{B}\Rightarrow I\bar{I}$ стає відомим тільки після доведення.

Приклад 18. На площині дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою.

Доведення. Нехай a, b, c – три прямі площини, і нехай $a||c$ і $b||c$. Потрібно довести, що $a||b$. Відповідно до схеми 4 вважатимемо, що, $a||c$ і $b||c$, a – непаралельне b. Нам потрібно довести, що справедливе твердження $I\bar{I}$, де I – деяке правильне висловлювання. Отже, якщо а непаралельне b, то ці прямі перетинаються в деякій точці M, через яку проходять дві різні прямі a і b, паралельні одній і тій же прямій c. У той же час в аксіомі паралельності зазначено, що через точку M, яка не лежить на прямій c, можна провести не більше однієї прямої, яка паралельна с. Таким чином, з умови випливає, що $a||c$, $b||c$ і a – непаралельне. Отже, ми вивели правильність твердження $I\bar{I}$, тобто довели теорему $A\bar{B}\Rightarrow I\bar{I}$, що рівносильне доведенню вихідної теореми $A\Rightarrow B$.

Схема 5. Представлена схема доведення схожа до попередньої і заснована на наступному перетворенні: нехай F – деяке хибне висловлювання, тоді:

$$(A\Rightarrow B)\equiv(\bar{A}\vee B)\equiv(\bar{A}\vee B\vee F)\equiv(\overline{A\bar{B}}\vee F)\equiv(A\bar{B}\Rightarrow F).$$

Приклад 19. Довести, що суміжні кути не можуть бути тупими.

Доведення. Відповідно до схеми 5 доведемо наступне: із припущення, що існують два суміжні кути, які є тупими, випливає хибне твердження.

Насправді, нехай $\angle 1$ і $\angle 2$ – два суміжні тупі кути, тоді $\angle 1+\angle 2>180^0$. Останнє твердження – хибне, адже відомо, що $\angle 1+\angle 2>180^0$. Таким чином, доведено твердження, що $A\bar{B}\Rightarrow F$, а $A\Rightarrow B$.

Практика застосування доведення методом від супротивного

Доведення методом від супротивного – досить непроста справа. Зважаючи на це, спробуємо обґрунтувати деякі деталі, що полегшують практичне засвоєння означеного способу, а також відповімо на найбільш поширені запитання, які найчастіше задають учителі та учні старших класів.

Запитання 1. Чи можна довести методом від супротивного будь-яку теорему?

Відповідь. Так. Кожне пряме доведення теореми можна перетворити в доведення способом від супротивного. Робиться це дуже просто: припускаємо “супротивне”, а потім повторюємо “пряме” доведення. В результаті отримуємо суперечність, яка і доводить теорему. Інша справа, чи потрібно будь-яку теорему доводити методом від супротивного? Звісно, ні.

Приклад 20. Доведіть нерівність

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c).$$

Пряме доведення. Розглянемо різницю:

$$a^2+b^2+c^2+3-2(a+b+c)=(a^2-2a)+(b^2-2b)+(c^2-2c)+3=$$
$$=(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(c^2-2c+1)=(a-1)^2+$$
$$+(b-1)^2+(c-1)^2\geq 0.$$

Нерівність доведено.

Доведення від супротивного. Припустимо протилежне: існує хоча б один набір чисел a, b, c, при якому:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 < 2(a+b+c).$$

При цьому матимемо:

$a^2 + b^2 + c^2 + 3 - 2(a+b+c) < 0$, однак насправді: $a^2 + b^2 + c^2 + 3 - 2(a+b+c) = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0$

Це суперечить припущенню, а отже, дає змогу відкинути його і вважати, що вихідне твердження доведено.

Запитання 2. Що відбудеться, якщо доводити методом від супротивного хибне твердження?

Відповідь. Ніякого результату (позитивного чи негативного) не спостерігатимемо, ми просто не прийдемо до суперечності. Крім того. ніякого висновку відносно істинності чи хибності твердження, яке ми доводимо, дійти цим способом не вдасться.

Запитання 3. Замість “припустимо протилежне” учень помилково говорить “припустимо, що висновок теореми правильний”. До чого призведуть такі роздуми?

Відповідь. Якщо учень стверджує, що в усіх випадках, коли виконується умова, висновок теореми істинний, ніяких роздумів більше не потрібно, адже це припущення фактично означає, що теорема прийнята без доведення. Такий підхід не відповідає духу математики і не може бути схвалений, тому що завдяки цьому способу можна прийти без доведення і до хибного твердження.

Запитання 4. Учень міркує над таким завданням: припустимо, що умова теореми не виконується. До чого призведуть такі міркування?

Відповідь. Як відомо, якщо умовно теорема не виконується, то про істинність висновку нічого сказати не можна: він може виявитися як істинним, так і хибним. Виходячи з викладеного вище, подальші роздуми нічого не дадуть для доведення. Цей спосіб роздумів є задовільним.

Запитання 5. В якому випадку при доведенні від супротивного можна використовувати спосіб контрприкладу?

Відповідь. Цей спосіб можна використовувати при доведенні від супротивного теорем існування. Наприклад, існує об’єкт, якому притаманна дана властивість Р. У цьому випадку заперечення звучить таким чином: “який би не був об’єкт, для нього властивість Р не виконується”. Якщо після цього ми приведемо контрприклад, то цим спростуємо заперечення і доведемо потрібне.

Приклад 21. Чи можливе таке положення: один із множників збільшили на два, а добуток не збільшився.

Розв’язання. Припустимо, що це неможливо, тобто завжди $a(b+2)>ab$ або $ab+2a>ab$, $2a>0$. Однак, якщо $a=0$, то отримаємо $0>0$, а це неправильно. Наше припущення помилкове.

Відповідь. Твердження, про яке йдеться в задачі, можливе, наприклад, коли другий множник рівний нулю.

Спростування гіпотези. Основне призначення доведення від супротивного – спростування хибних гіпотез. Тому вправи такого типу є основними в процесі навчання.

Приклад 22. Чи можна розміняти 25 гривень, маючи одногривневу, тригривневу та п'ятигривневу купюри, таким чином, щоб усього отримати рівно 10 купюр?

Розв'язання. Припустимо, що можна, тоді отримаємо рівняння $25=x_1+x_2+...+x_{10}$, де $x_1,...,x_{10}$, тобто купюри номіналом 1, 3 або 5 гривень. Однак дане рівняння неможливе, адже в лівій частині його є непарне число, а у правій – парне.

Приклад 23. У туристичному поході брали участь 33 учні. Сума їхнього віку рівна 430 років. Чи справедливе твердження, що є 20 учнів, сума років яких більша 260?

Розв'язання. Припустимо протилежне: сума років будь-яких 20 учнів не більша 260. Виберемо 20 найстарших учнів. Зважаючи на те, що сума їх років не більша 260, то серед вибраних буде хоча б один учень, вік якого складає не більше 13 років. Тому кожен із 13 чоловік, які залишилися, не старші 13 років, а сума їх років не більша 13х13=169 років. Отже, загальна сума не більша 260+169=429 років, що суперечить умові.

Приклад 24. Розв'яжемо рівняння $5^x+12^x=13^x$.

Розв'язання. Знайдемо один із коренів: $x=2$. Також слід переконатися, що інших розв'язків немає. Для цього застосуємо міркування від супротивного. Припустимо, що є корінь $x=a\neq2$, тобто:

$$5^a+12^a=13^a$$

або

$$\left(\frac{5}{13}\right)^a+\left(\frac{12}{13}\right)^a=1$$

Однак, якщо $a>2$, то:

$$\left(\frac{12}{13}\right)^a<\left(\frac{5}{13}\right)^2, \left(\frac{12}{13}\right)^a<\left(\frac{12}{13}\right)^2,$$

а тому:

$$\left(\frac{5}{13}\right)^a+\left(\frac{12}{13}\right)^a<\left(\frac{5}{13}\right)^2+\left(\frac{12}{13}\right)^2=1$$

Аналогічно, якщо $a<2$, то:

$$\left(\frac{5}{13}\right)^a+\left(\frac{12}{13}\right)^a>1$$

Приходимо до протиріччя, однак, як і при $a\neq2$, у нас одночасно повинно бути:

$$\left(\frac{5}{13}\right)^a+\left(\frac{12}{13}\right)^a=1 \text{ і } \left(\frac{5}{13}\right)^a+\left(\frac{12}{13}\right)^a\neq1$$

Тому $x = 2$ – єдиний корінь нашого рівняння.

Приклад 25. Довести, що неможливо провести пряму так, щоб вона перетинала всі сторони 1001-кутника.

Вказівка. Сума чисел вершин многокутника, що лежать по різні сторони від прямої, інваріантна.

Приклад 26. У кожну клітинку квадратної таблиці 25х25 довільним способом вписано одне із чисел 1 або (-1). Під кожним стовпчиком пишеться добуток усіх чисел, які стоять у цьому стовбці. Справа від кожної сторони пишеться добуток усіх чисел, які стоять у цьому рядку. Доведіть, що сума 50 вписаних добутків не рівна нулю.

Вказівка. Добуток усіх 50 отриманих чисел – інваріант.

Приклади корисне застосування методу від супротивного

У математичній практиці часто зустрічається наступний випадок застосування доведення способом від супротивного.

Приклад 27. У курсі алгебри доводиться, що для квадратного рівняння з дійсними коефіцієнтами мають місце три теореми:

1. Якщо дискримінант додатний, то квадратне рівняння має дійсні та різні корені.
2. Якщо дискримінант рівний нулю, то квадратне рівняння має один дійсний корінь.
3. Якщо дискримінант від'ємний, то квадратне рівняння дійсних коренів не має.

У цьому випадку правильні всі три теореми, обернені даним. Нехай, наприклад, потрібно довести, що корені квадратного рівняння дійсні та різні, то дискримінант цього рівняння додатний.

Припустимо протилежне: дискримінант від'ємний або рівний нулю. У цьому випадку на основі теорем 2 і 3 наше рівняння має або один корінь, або взагалі не має коренів, що суперечить умові. Отже, припущення доведеться відхилити.

Розглянутий приклад є частиною загальної теореми Гаубера.

Теорема Гаубера. Нехай дано n теорем "Якщо A_1, то B_1", "Якщо A_2, то B_2", …, "Якщо A_n, то B_n". При цьому виконуються дві вимоги:

1. Умова A_1, A_2,…A_n, охоплює всі можливі випадки.
2. Висновки B_1, B_2,…B_n взаємно виключають одне одного.

Як наслідок – усі обернені теореми "Якщо B_1, то A_1", "Якщо B_2, то A_2",…, "Якщо B_n, то A_n" теж правильні.

Доведення. Доведемо, що теорема "Якщо B_1, то A_1" правильна. Припустимо протилежне, що існує хоча б один випадок, коли B_1 виконується, а A_1 не виконується, та спростуємо цю гіпотезу. Отже, якщо B_1 істинне, то B_2, B_3, …, B_n – усі хибні (за умовою), а тому твердження A_2, A_3, …, A_n також повинні бути хибними. Приходимо до висновку, що можливий такий випадок, при якому всі твердження A_1, A_2, ..., A_n не виконуються. Це суперечить умові теореми. Теорема "Якщо B_1, то A_1" – правильна.

Аналогічним способом доводиться, що теореми "Якщо B_2, то A_2", …, "Якщо B_n, то A_n" також правильні.

Висновки. Підсумовуючи все вищезазначене, приходимо до висновку, що навчання методу доведення від супротивного – це навчання аналізу готових доведень із різних розділів шкільної математики, їх відтворення, самостійного конструювання доведення.

До перспективних напрямів дослідження належить проблема з'ясування труднощів методу від супротивного при сприйнятті учнями та використання методу від супротивного у позакласній роботі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Литвиненко І. Навчання учнів доведенням методом від супротивного / І. Литвиненко // Математика в школі. – 2008. – № 11-12. – С. 37-41.
2. Калужнин Л. А. Элементы теории множеств и математической логики в школьном курсе математики / Л. А. Калужнин. – М., 1978. – 144 с.

3. Кужель О.В. Елементи теорії множин і математичної логіки / О. В. Кужель. – К., 1977. – 196 с.
4. Мартищук О.І. Взаємно обернені, взаємно протилежні твердження і співвідношення між ними / О. І. Мартищук // У світі математики. – К., 1978. – Вип. 9. – С. 58-68.
5. Олонічев П.М. Перше знайомство з математичною логікою / П. М. Олонічев // У світі математики. – К., 1979. – Вип. 10. – С. 11-22.
6. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойа. – М., 1975. – 372 с.
7. Присяжнюк М. М. Застосування геометричних перетворень до розв’язування задач на доведення : метод. посіб. / М. М. Присяжнюк, О. В. Ткачук. – Рівне : РДГУ, 2012. – 67 с.
8. Прокопенко Л. М. Мова логіки / Л.М. Прокопенко // У світі математики. – К., 19678. – Вип. 1. – С. 30-50.
9. Середа В. Ю. Про доведення математичних тверджень / В. Ю. Середа // У світі математики. – К.. 1980. – Вип. 11. – С. 143-150.
10. Сущанський В. І. Логічні тотожності / В. І. Сущанський // У світі математики. – К., 1975. – Вип. 6. – С. 27-32.
11. Хромой Я. В. Квантори та деякі їх застосування в елементарній математиці / Я. В. Хромой // У світі математики. – К., 1973. – Вип. 4. – С. 107-121.

Дата надходження до редакції: 01.10.2014 р.

УДК [53.54-126]:378.147

Микола БОРДЮК,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри фізики
Рівненського державного гуманітарного університету

Ніна БОРДЮК,
старший викладач кафедри теорії
та методики професійної освіти
Рівненського державного гуманітарного університету

Тетяна ШЕВЧУК,
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри фізики
Рівненського державного гуманітарного університету

АЛГОРИТМ ФОРМУВАННЯ ЗНАНЬ ПРО ОТРИМАННЯ ПОЛІМЕРНИХ НАНОКОМПОЗИТІВ У МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ ВИВЧЕННІ КУРСУ «ТЕХНОЛОГІЯ ВИРОБНИЦТВА КОНСТРУКЦІЙНИХ МАТЕРІАЛІВ»

У статті аналізуються питання формування знань про технології отримання полімерних нанокомпозитів у процесі вивчення курсу «Технології виробництва конструкційних матеріалів». Пропонується алгоритм отримання таких знань.

Ключові слова: *технології виробництва, полімерні нанокомпозити, практичні та лабораторні роботи, міжпредметні зв’язки.*

В статье анализируются вопросы формирования знаний о технологиях получения полимерных нанокомпозитов в процессе изучения курса «Технологии производства конструкционных материалов». Предлагается алгоритм получения таких знаний.

Ключевые слова: *технологии производства, полимерные нанокомпозиты, практические и лабораторные работы, межпредметные связи.*

This article analyzes the issue of forming knowledge about technology of polymer nanocomposites in the study course "Technology of production of construction materials." An algorithm to obtain such know ledge.

Key words: *production technology, polymer nanocomposites, practical and laboratory work, interdisciplinary communication.*

Постановка проблеми. Початок XXI століття характеризується важливими відкриттями, що мають стратегічне значення для вдосконалення знань у галузі природничих наук і матеріалознавства. Більш високий рівень методів дослідження матеріалів за допомогою електронної мікроскопії високої здатності, зондової скануючої електронної мікроскопії, високоселективної мас-спектроскопії, вдосконалення підготовки зразків дало можливість

 © Бордюк М., Бордюк Н., Шевчук Т., 2014