УДК 004.315

В.А. Святный, д-р техн. наук, проф.,
В.В. Лапко, канд. техн. наук, доц.,
А.В. Самощенко, канд. техн. наук, доц.
Донецкий национальный технический университет, г. Покровск
aleksandr.samoshchenko@gmail.com

Математическое описание операции деления целых чисел в дополнительном коде с отрицательным и положительным нулем остатков делимого

В отличие от существующих подходов [1-4] дополнительные коды знаковых целых чисел операции деления задаются единообразной формулой для положительных и отрицательных чисел [5] и исчисляются как остаток по модулю, равный количеству двоичных наборов дополнительного кода числа. На основе предложенной модели дополнительного кода целых чисел аналитически обоснованы оригинальные способы фиксации переполнения разрядной сетки частного при делении целых чисел с использованием выходного переноса и признака нулевого значения старшего частичного остатка делимого. Показано, что нулевые значения частичных остатков делимого при определении цифр частного и вычислении последующего частичного остатка делимого следует рассматривать как положительный или отрицательный двоичный код в зависимости от знака делимого.

Ключевые слова: модуль дополнительного кода, остаток по модулю, дополнительный код, переполнение, отрицательный и положительный нуль дополнительного кода остатков делимого.

Введение

Практическая реализация операции деления целых чисел в дополнительном коде при допустимых значениях операндов предполагает контроль переполнения разрядной сетки частного. Упрощение контроля переполнения частного и уменьшение аппаратных затрат достигаются при использовании в схеме контроля стандартных информационных сигналов, формируемых при вычислении старшего частичного остатка делимого – выходного переноса и признака нулевого значения старшего остатка делимого. Для формирования корректного кода частного нулевые значения частичных остатков делимого при делении чисел произвольных знаков следует рассматривать как положительный или отрицательный нуль в соответствии со знаком делимого. Полученные в цикле деления цифры частного корректируются только при отрицательных значениях частного, причем единообразно – добавлением единицы к младшему разряду инверсного кода частного.

Общая методика деления целых чисел

При делении модулей целых чисел вычисляется значение частного, которое предполагает выполнение равенства [1-4]:

$$a = bd + c\,, \qquad (1)$$

где a, b, d, c – соответственно модули делимого, делителя, частного и остатка делимого.

Однозначность разложения делимого на составляющие и целочисленный характер деления обеспечиваются выполнением неравенств:

$$b \neq 0,\ \ c < b\,. \qquad (2)$$

При делении знаковых целых чисел решение задачи (1) сводится к решению уравнения

$$\mathrm{A} = \mathrm{BD} + \mathrm{C}\,, \qquad (3)$$

где A, B, D, C – соответственно знаковые целые числа делимого, делителя, частного и остатка делимого.

Если знаки «+» и «–» A, B, D, C обозначить соответственно как NA, NB, ND, NC и закодировать таким образом, чтобы

$$\mathrm{NX} = \begin{cases} 0 & \text{при } \mathrm{X} \geq 0; \\ 1 & \text{при } \mathrm{X} < 0, \end{cases} \qquad (4)$$

где X = A, B, D и C, то знак частного, согласно правилам алгебры, будет определяться логическим выражением

$$\mathrm{ND} = \mathrm{NA} \oplus \mathrm{NB}\,, \qquad (5)$$

Однозначность разложения знакового делимого на составляющие обеспечивается при ограничениях (2) на модули чисел и сохранении соотношения (1) между модулями чисел:

$$|\mathrm{A}| = |\mathrm{B} \cdot \mathrm{D}| + |\mathrm{C}|.$$

Следовательно, при произвольных знаках делимого и делителя корректное определение частного обеспечивается при выполнении следующего соотношения между знаковыми разрядами числовых данных:

$$\mathrm{NB} \oplus \mathrm{ND} = \mathrm{NC},$$

где NB ⊕ ND – знак слагаемого в уравнении (3), как результат произведения делителя и частного.

Учитывая, что ND = NA ⊕ NB, получим

$$NC = NB \oplus (NA \oplus NB).$$

Используя очевидные преобразования, получим окончательное выражение для знака корректного кода остатка делимого

$$NC = NA\,. \tag{6}$$

В задаче (1) $a \geq b{\cdot}d$. В силу этого и, согласно свойствам операции умножения неотрицательных целых чисел $b{\cdot}d$, формат числовых данных операции деления a, b и d ограничен неравенством

$$l_a \geq l_b + l_d\,, \tag{7}$$

где l_a, l_b, l_d – соответственно максимальное количество значащих разрядов делимого (длина двоичного кода модуля делимого), делителя и частного. При задании модулей делителя и частного кодами:

$$l_b = l_d = n\,, \tag{8}$$

неравенство (7) принимает вид

$$l_a \geq 2n\,. \tag{9}$$

В задаче (3) знаковые числовые данные содержат кроме цифровых разрядов одноразрядное поле знакового разряда, поэтому формат делителя и частного, модули которых ограничены соотношением (8), задается выражением

$$l_B = l_D = n + 1\,, \tag{10}$$

где l_B, l_D – соответственно длина знаковых числовых значений делителя и частного в задаче (3).

При однородной памяти компьютера, состоящей из ячеек длиною $n + 1$, более длинное делимое, модуль которого ограничен неравенством (9), компонуется в двух смежных ячейках памяти длиною $n + 1$. Поэтому формат знакового делимого в задаче (3) определяется как

$$l_A = 2n + 2\,, \tag{11}$$

где l_A – длина знакового делимого в задаче (3).

Поскольку, согласно (2), $c < b$ для отображения знакового кода остатка делимого C используется формат знакового делителя

$$l_C = l_B = n + 1, \tag{12}$$

где l_C – длина знакового кода остатка делимого в задаче (3).

При практическом решении задачи (3) знаковые числовые данные отображаются в дополнительных кодах [5]. Дополнительный код числовых значений частного, согласно (10), определяется соотношением

$$\mathrm{D_{ДК}}(n+1,1) = \begin{cases} (\mathrm{V}+\mathrm{D})_{mV} & \text{при } \mathrm{D} \in [-V/2;\ V/2); \quad (13) \\ \nexists & \text{при } \mathrm{D} \notin [-V/2;\ V/2), \quad (14) \end{cases}$$

где

- $\mathrm{D_{ДК}}(n+1,1)$ – отображение частного D в дополнительном коде длиною n+1, состоящего из двоичного целочисленного кода $d_{ДК}(n+1) \ldots d_{ДК}(2)\ d_{ДК}(1)$, старший разряд в котором определяет знак частного: $\mathrm{D_{ДК}}(n+1)$ = ND;
- $\mathrm{V} = 2{\uparrow}(n+1)$ – параметр отображения числовых данных дополнительным кодом длиною n+1 (модуль дополнительного кода длиною n+1);
- $(\mathrm{V}+\mathrm{D})_{mV}$ – остаток по модулю V смещенного кода V+D;
- $[-\mathrm{V}/2;\ \mathrm{V}/2)$ – область определения функции $\mathrm{D_{ДК}}(\mathrm{D})$, в которой обеспечивается однозначное отображение частного D дополнительным кодом $\mathrm{D_{ДК}}(n+1,1)$.

Частное D в области определения функции (13) на разных участках изменения частного задается знаковыми двоичными кодами различного вида:

$$\mathrm{D} = \begin{cases} +\emptyset\ d_n \ldots d_2 d_1 & \text{при } \mathrm{D} \in [\emptyset; V/2); \quad (15) \\ -d_{n+1}\ d_n \ldots d_2 d_1 & \text{при } \mathrm{D} \in [-V/2;\ -1], \quad (16) \end{cases}$$

где d_i – соответственно цифровые разряды модуля частного при

$$0 \leq \mathrm{D} \leq (V/2 - 1) \text{ и } -V/2 \leq \mathrm{D} \leq -1;$$

$$i = n + 1, n \ldots 2, 1.$$

Таким образом, согласно (13) и (15), отображение положительных значений частного D представляется целочисленным двоичным кодом:

$$\begin{aligned} \mathrm{D_{ДК}}(n+1, 1) &= (\mathrm{V} + \mathrm{D})_{mV} = \\ &=(\mathrm{V} + (+0d_n \ldots d_2d_1))_{mV} = \\ &=(\mathrm{V} + 0d_n \ldots d_2d_1)_{mV} = [0]d_n \ldots d_2d_1, \end{aligned} \tag{17}$$

где $d_n \ldots d_2d_1$ – цифровые разряды модуля положительного частного; [0] – знаковый разряд положительного частного $\mathrm{D} \geq 0$.

Отображение отрицательных числовых значений частного D в дополнительном коде, согласно (13), представляется соотношением

$$\begin{aligned} \mathrm{D_{ДК}}(n+1, 1) &= (\mathrm{V} + \mathrm{D})_{mV} = \\ &=(\mathrm{V} - d_{n+1}\, d_n \ldots d_2d_1)_{mV} = \mathrm{V} - d_{n+1}d_n \ldots d_2d_1 = \\ &= 2^{n+1} - d_{n+1}d_n \ldots d_2d_1 = \\ &=(2^{n+1} - 1) - d_{n+1}d_n \ldots d_2d_1 + 1 = \\ &= 1_{n+1}1_n \ldots 1_21_1 - d_{n+1}d_n \ldots d_2d_1 + 1 = \\ &= (1_{n+1} - d_{n+1}){\cdot}2^n + (1_n - d_n){\cdot}2^{n-1} + \ldots \\ &\ldots + (1_2 - d_2){\cdot}2^1 + (1_1 - d_1){\cdot}2^0 + 1 = \\ &= \overline{d_{n+1}}{\cdot}2^n + \overline{d_n}{\cdot}2^{n-1} + \ldots + \overline{d_2}{\cdot}2^1 + \overline{d_1}{\cdot}2^0 + 1 = \\ &= [\overline{d_{n+1}}]\,\overline{d_n} \ldots \overline{d_2}\,\overline{d_1} + 1, \end{aligned} \tag{18}$$

где

- $d_{n+1}d_n \ldots d_2d_1$ – прямые цифровые разряды модуля отрицательного частного;
- $\overline{d_{n+1}}\ \overline{d_n} \ldots \overline{d_2}\ \overline{d_1}$ – инверсные значения цифровых разрядов модуля отрицательного частного;
- $[\overline{d_{n+1}}]$ – инверсный код в позиции знакового разряда дополнительного кода $\mathrm{D_{ДК}}(n+1)$.

Таким образом, согласно (13-14) и (17-18), процедура формирования дополнительного кода частного задается системой неравенств:

$$\mathrm{D_{ДК}}(n+1,\ 1) =$$
$$= \begin{cases} [d_{n+1}]d_n \dots d_2 d_1 \text{ при } 0 \le \mathrm{D} \le (V/2-1); & (19) \\ [\overline{d_{n+1}}]\overline{d_n} \dots \overline{d_2}\ \overline{d_1}+1 \text{ при } -V/2 \le \mathrm{D} \le -1; & (20) \\ \nexists \qquad \text{при } \mathrm{D} \notin [-V/2;\ V/2), & (21) \end{cases}$$

где

- $d_{n+1}d_n \dots d_2d_1$ – прямые значения цифровых разрядов модуля частного, определяемые решением задачи (1) в области существования функции $\mathrm{D_{ДК}(D)}$;
- $[d_{n+1}]$, $[\overline{d_{n+1}}]$ – цифровые коды в знаковой позиции дополнительного частного $\mathrm{D_{ДК}}(n+1)$.

Поскольку дополнительный код положительного и отрицательного частного формируется различным образом, то операция деления чисел при различных сочетаниях знаков операндов требует специального исследования.

Деление положительных чисел в дополнительном коде

При делении положительных чисел, согласно (19), максимальное значение модуля частного ограничено и определяется неравенством

$$|\mathrm{D}|_{\max} < 2^n.$$

В силу этого переполнение частного при делении положительных чисел определяется неравенством

$$\mathrm{A} < \mathrm{B}\cdot 2^n,$$

где $\mathrm{A} = +|\mathrm{A}|$: $|\mathrm{A}| \in [0;\ \mathrm{K}/2)$; $\mathrm{K} = 2\uparrow(2n + 2)$;
$\mathrm{B} = +|\mathrm{B}|$: $|\mathrm{B}| \in [1;\ \mathrm{V}/2)$.

Откуда получим:

$$\text{ПП}\left(\frac{+}{+}\right) = \begin{cases} 0 \text{ при } A_{n+1} < 0; \\ 1 \text{ при } A_{n+1} \ge 0, \end{cases} \qquad (22)$$

где $\mathrm{A}_{n+1} = \mathrm{A} - \mathrm{B}\cdot 2^n$; $\text{ПП}\left(\frac{+}{+}\right)$ – признак переполнения разрядной сетки частного при делении положительных чисел.

При представлении смещенного делителя $\mathrm{B}(n+1,\ 1)\cdot 2^n$ длиною $(2n+1)$ в формате делимого $\mathrm{A}(2n+2,\ 1)$ длиною $(2n+2)$ система неравенств (22) принимает вид

$$\text{ПП}\left(\frac{+}{+}\right) = \begin{cases} 0 \text{ при } \mathrm{A}^{n+1} < 0; \\ 1 \text{ при } \mathrm{A}^{n+1} \ge 0, \end{cases} \qquad (23)$$

где $\mathrm{A}^{n+1} = 2\cdot\mathrm{A} - \mathrm{B}\cdot 2^{n+1} = 2\cdot\mathrm{A}_{n+1}$.   (24)

При вычислении удвоенного остатка делимого A^{n+1} в дополнительном коде выражение (24) задается формулой

$$\mathrm{A_{ДК}^{n+1}} = \left(2\cdot\mathrm{A_{ДК}} - \mathrm{B_{ДК}}\cdot 2^{n+1}\right)_{mK}, \qquad (25)$$

где $\mathrm{A_{ДК}^{n+1}} = \left(\mathrm{K} + \mathrm{A}^{n+1}\right)_{mK}$; $\mathrm{A_{ДК}} = (\mathrm{K} + \mathrm{A})_{mK}$;
$\mathrm{B_{ДК}}\cdot 2^{n+1} = (\mathrm{K} + \mathrm{B}\cdot 2^{n+1})_{mK}$.

Используя очевидные свойства двоичного кода, выражение (25) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathrm{A_{ДК}^{n+1}} &= \left(2\cdot\mathrm{A_{ДК}} - \mathrm{B_{ДК}}\cdot 2^{n+1}\right)_{mK} = \\ &= \left(\mathrm{A_{ДК}} + \left(2^{2n+2}-1\right) - \mathrm{B_{ДК}}(n+1,1)0_{n+1}\dots 0_2 0_1 + 1\right)_{mK} = \\ &= \left(\mathrm{A_{ДК}} + 1_{2n+2}\dots 1_2 1_1 - \mathrm{B_{ДК}}(n+1,1)0_{n+1}\dots 0_2 0_1 + 1\right)_{mK} = \\ &= \left(\mathrm{A_{ДК}} + \overline{\mathrm{B_{ДК}}(n+1,1)}1_{n+1}\dots 1_2 1_1 + 1\right)_{mK} = \\ &= \left(\mathrm{A_{ДК}} + (\overline{\mathrm{B_{ДК}}(n+1,1)} + 1)0_{n+1}\dots 0_2 0_1\right)_{mK} = \\ &= \left(\mathrm{A_{ДК}} + \mathrm{B_{ДК}^{ПР}}(n+1,1)\cdot 2^{n+1}\right)_{mK}, \end{aligned} \qquad (26)$$

где $\mathrm{A_{ДК}} = (+\ |\mathrm{A}|)_{\mathrm{ДК}} = [0]\ |\mathrm{A}|\ (2n+1,\ 1)$;
$\mathrm{B_{ДК}} = (+\ |\mathrm{B}|)_{\mathrm{ДК}} = [0]\ |\mathrm{B}|\ (n,\ 1)$;
$\mathrm{B_{ДК}^{ПР}} = \left(\overline{\mathrm{B_{ДК}}(n+1,1)} + 1\right)$ – преобразованный дополнительный код делителя длиною $n+1$;
$\overline{\mathrm{B_{ДК}}(n+1,1)}$ – поразрядная инверсия дополнительного кода делителя.

Полная сумма в правой части выражения (26) образует двоичный код

$$\mathrm{E}\cdot 2^{n+2} + \mathrm{A_{ДК}^{n+1}} = 2\cdot|\mathrm{A}| + 2^{2n+2} - |\mathrm{B}|\cdot 2^{n+1} =$$
$$= \begin{cases} \ge 2^{2n+2} \text{ при } 2\cdot|\mathrm{A}| \ge |\mathrm{B}|\cdot 2^{n+1}; & (27) \\ < 2^{2n+2} \text{ при } 2\cdot|\mathrm{A}| < |\mathrm{B}|\cdot 2^{n+1}, & (28) \end{cases}$$

где E – выходной перенос полной суммы остатка делимого $\mathrm{A_{ДК}^{n+1}}$.

Отсюда, согласно (23) и (27)-(28)

$$\mathrm{E} = \begin{cases} 1 \text{ при ПП}\left(\frac{+}{+}\right) = 1; \\ 0 \text{ при ПП}\left(\frac{+}{+}\right) = 0. \end{cases}$$

Следовательно, формирование признака переполнения частного при делении положительных чисел описывается выражением

$$\text{ПП}\left(\frac{+}{+}\right) = \mathrm{E}. \qquad (29)$$

При отсутствии переполнения частного неизвестные прямые значения числовых разрядов положительного частного, согласно (1) и (19), определяются решением уравнения

$$\mathrm{A} = \mathrm{B}\cdot(d_{n+1}\cdot 2^n + d_n\cdot 2^{n+1} + \dots + d_2\cdot 2 + d_1). \qquad (30)$$

Отсюда следует, что состояние цифрового разряда в позиции знакового разряда d_{n+1} частного при делении положительных чисел определяется системой неравенств:

$$d_{n+1} = \begin{cases} 0 \text{ при } \mathrm{A}_{n+1} < 0; \\ 1 \text{ при } \mathrm{A}_{n+1} \ge 0, \end{cases}$$

где $\mathrm{A}_{n+1} = \mathrm{A} - \mathrm{B}\cdot 2^n < 0$, согласно (22), при отсутствии переполнения частного.

Следовательно, согласно (22)-(25), при делении положительных чисел получим

$$d_{n+1} = 0 \text{ при } \mathrm{NA_{ДК}^{n+1}} \ne \mathrm{NB_{ДК}} :\ \mathrm{NA_{ДК}^{n+1}} = 1,\ \mathrm{NB_{ДК}} = 0.$$

Таким образом, цифровой код в позиции знакового разряда дополнительного кода положительного частного определяется логическим выражением

$$[d_{n+1}] = \mathrm{ND} = \overline{\mathrm{NA_{ДК}^{n+1}} \oplus \mathrm{NB_{ДК}}}. \qquad (31)$$

В общем случае при $d_{n+1} \in [0;1]$ цифровой код $D_{ДК}(n) = d_n$, согласно (30), определяется системой неравенств:

$$d_n = \begin{cases} 0 \text{ при } A_n<0; \\ 1 \text{ при } A_n \ge 0, \end{cases}$$

где

$$A_n = \begin{cases} A\text{-}B\cdot 2^{n-1} = A_{n+1} + B\cdot 2^{n-1} \text{ при } d_{n+1}=0 : A_{n+1}<0; \\ A\text{-}B\cdot 2^{n}\text{-}B\cdot 2^{n-1} = A_{n+1}\text{-}B\cdot 2^{n-1} \text{ при } d_{n+1}=1 : A_{n+1}\ge 0. \end{cases}$$

При представлении смещенного делителя $B\cdot 2^{n-1}$ длиною $2n+1$ в формате делимого длиною $2n+2$ выражения принимают вид:

$$d_n = \begin{cases} 0 \text{ при } A^n<0; \\ 1 \text{ при } A^n \ge 0, \end{cases}$$

где $A^n = \begin{cases} 2\cdot A^{n+1}\text{-}B\cdot 2^{n+1} \text{ при } A^{n+1}<0; \\ 2\cdot A^{n+1}+B\cdot 2^{n+1} \text{ при } A^{n+1}\ge 0, \end{cases}$

$A^n = 4\cdot A_n$; $2\cdot A^{n+1} = 4\cdot A_{n+1}$.

При вычислении остатка A^n в дополнительном коде получим

$$d_n = \begin{cases} 0 \text{ при } NA^n_{ДК}=1 : NA^n_{ДК} \ne NB_{ДК}; \\ 1 \text{ при } NA^n_{ДК}=0 : NA^n_{ДК} = NB_{ДК}, \end{cases}$$

где

$$A^n_{ДК} = \begin{cases} \left(2\cdot A^{n+1}_{ДК}+B_{ДК}\cdot 2^{n+1}\right)_{mK} \text{ при } NA^{n+1}_{ДК} \ne NB_{ДК} : NA^{n+1}_{ДК}=1; \\ \left(2\cdot A^{n+1}_{ДК}+B^{ПР}_{ДК}\cdot 2^{n+1}\right)_{mK} \text{ при } NA^{n+1}_{ДК} = NB_{ДК} : NA^{n+1}_{ДК}=0. \end{cases}$$

Таким образом, при делении положительных чисел $D_{ДК}(n) = d_n$ определяется соотношениями:

$$d_n\left(\frac{+}{+}\right) = \overline{NA^n_{ДК} \oplus NB_{ДК}}, \quad (32)$$

где

$$A^n_{ДК} = \begin{cases} \left(2\cdot A^{n+1}_{ДК}+B_{ДК}\cdot 2^{n+1}\right)_{mK} \text{ при } NA^{n+1}_{ДК} \ne NB_{ДК}; & (33) \\ \left(2\cdot A^{n+1}_{ДК}+B^{ПР}_{ДК}\cdot 2^{n+1}\right)_{mK} \text{ при } NA^{n+1}_{ДК} = NB_{ДК}. & (34) \end{cases}$$

При очевидных изменениях индексов выражения (32)-(34) описывают правила формирования также всех младших разрядов частного.

Конечное значение остатка делимого, согласно (6), формируется по значению первого частичного остатка делимого $A^1_{ДК}$:

$$C_{ДК}(n+1,1) = \begin{cases} A^1_{ДК}(2n+2,n+2) \text{ при } NA^1_{ДК}=NA_{ДК} & (35) \\ \left(A^1_{ДК}(2n+2,n+2)+B_{ДК}(n+1,1)\right)_{mV} & \\ \text{при } NA^1_{ДК} \ne NA_{ДК} : NA^1_{ДК} \ne NB_{ДК}, & (36) \end{cases}$$

где $C_{ДК}(n+1,1)$ – целочисленный остаток делимого при делении положительных чисел.

Деление целых чисел в дополнительном коде при положительном делимом и отрицательном делителе

При отрицательном значении частного, образованного делением положительного делимого и отрицательного делителя, максимальное значение модуля частного, согласно (20), определяется выражением

$$|D|_{max} \le 2^n.$$

В силу этого переполнение разрядной сетки частного задается системой неравенств:

$$ПП\left(\frac{+}{-}\right) = \begin{cases} 0 \text{ при } A_{n+1} \le 0; \\ 1 \text{ при } A_{n+1}>0, \end{cases} \quad (37)$$

где $A_{n+1} = A + B\cdot 2^n$; $A \in [0;K/2)$; $B \in [-V/2;-1]$; $ПП\left(\frac{+}{-}\right)$ – признак переполнения отрицательного частного.

При представлении смещенного делителя $B\cdot 2^n$ длиною $2n+1$ в формате делимого длиною $2n+2$ соотношения (37) принимают вид

$$ПП\left(\frac{+}{-}\right) = \begin{cases} 0 \text{ при } A^{n+1} \le 0; \\ 1 \text{ при } A^{n+1}>0, \end{cases} \quad (38)$$

где $A^{n+1} = 2\cdot A_{n+1} = 2\cdot A + B\cdot 2^{n+1}$ – удвоенный остаток делимого; $B\cdot 2^{n+1}$ – двоичный код делителя длиною $2n+2$.

При вычислении удвоенного остатка A^{n+1} в дополнительном коде операция задается выражением

$$A^{n+1}_{ДК} = \left(2\cdot A_{ДК}+B_{ДК}\cdot 2^{n+1}\right)_{mK}, \quad (39)$$

где $A_{ДК} = (+|A|)_{ДК} = |A|$; $B_{ДК}\cdot 2^{n+1} = 2^{2n+2} - |B|$.

Полная сумма в правой части выражения (39) образует двоичный код:

$$E\cdot 2^{2n+2} + A^{n+1}_{ДК} = 2\cdot|A| + 2^{2n+2} - |B|\cdot 2^{n+1} =$$
$$= 2^{2n+2} + 2\cdot|A| - |B|\cdot 2^{n+1} =$$
$$= \begin{cases} < 2^{2n+2} \text{ при } 2\cdot|A|<|B|\cdot 2^{n+1}; \\ > 2^{2n+2} \text{ при } 2\cdot|A|>|B|\cdot 2^{n+1}; \\ \ \ 2^{2n+2} \text{ при } 2\cdot|A|=|B|\cdot 2^{n+1}, \end{cases}$$

где E – выходной перенос полной суммы остатка $A^{n+1}_{ДК}$. Откуда следует, согласно (38), что

$$E = \begin{cases} 0 \text{ при } A^{n+1}<0; \\ 1 \text{ при } A^{n+1}>0; \\ 1 \text{ при } A^{n+1}(2n+2,1)=0. \end{cases}$$

Следовательно, признак переполнения разрядной сетки частного, в соответствии с (38) и (39), формируется согласно логическому выражению

$$ПП\left(\frac{+}{-}\right) = E \oplus ZA, \quad (40)$$

$$\text{где } ZA = \begin{cases} 0 \text{ при } A^{n+1}_{ДК} \ne 0; \\ 1 \text{ при } A^{n+1}_{ДК}(2n+2,1)=0. \end{cases} \quad (41)$$

В общем случае при делении положительного делимого и отрицательного делителя дополнительный код отрицательного частного, согласно (20), определяется системой равенств:

$$\left[\overline{d_{n+1}}\right]\overline{d}_n \ldots \overline{d}_2\ \overline{d}_1+1=$$
$$= \begin{cases} [1]\overline{d}_n \ldots \overline{d}_2\ \overline{d}_1+1 \text{ при } D \in [-2^n;-1]; \\ [0]\overline{0}_n \ldots \overline{0}_2\ \overline{0}_1+1 \text{ при } D = -2^n, \end{cases} \quad (42)$$

где [1], [0] – соответственно цифровые двоичные коды в знаковых позициях отрицательного частного соответственно при $D > -2^n$ и $D = -2^n$.

Неизвестные прямые значения цифровых разрядов частного (42) определяются, согласно (1) и (37) решением уравнения

$$\mathrm{A} = -\mathrm{B}\cdot(d_{n+1}\cdot 2^{n} + d_{n}\cdot 2^{n-1} + \ldots + d_{2}\cdot 2 + d_{1}). \qquad (43)$$

Отсюда следует, что $\mathrm{D_{ДК}}(n+1) = d_{n+1}$ определяется системой неравенств:

$$d_{n+1}\left(\frac{+}{-}\right) = \begin{cases} 0 \text{ при } \mathrm{A}_{n+1}<0; \\ 1 \text{ при } \mathrm{A}_{n+1}\geq 0, \end{cases}$$

где $\mathrm{A}_{n+1} = \mathrm{A} + \mathrm{B}\cdot 2^{n} : \mathrm{A}\geq 0,\ \mathrm{B}<0$.

Следовательно, согласно (39) и (42)-(43), инверсные значения двоичного кода в знаковой позиции дополнительного кода отрицательного частного определяются соотношениями:

$$\overline{d_{n+1}}\left(\frac{+}{-}\right) = \begin{cases} 1 \text{ при } \mathrm{NA}^{n+1}_{\text{ДК}}=\mathrm{NB}_{\text{ДК}}; \\ 0 \text{ при } \mathrm{NA}^{n+1}_{\text{ДК}}\neq \mathrm{NB}_{\text{ДК}}. \end{cases} \qquad (44)$$

В сокращенной записи получим

$$\overline{d_{n+1}}\left(\frac{+}{-}\right) = \overline{\mathrm{NA}^{n+1}_{\text{ДК}}\oplus \mathrm{NB}_{\text{ДК}}}. \qquad (45)$$

При $d_{n+1}\in[0;1]$ прямое значение двоичного кода $\mathrm{D}(n) = d_{n}$, согласно (43), определяется системой неравенств:

$$d_{n} = \begin{cases} 0 \text{ при } \mathrm{A}_{n}<0; \\ 1 \text{ при } \mathrm{A}_{n}\geq 0, \end{cases}$$

где $\mathrm{A}_{n} = \begin{cases} \mathrm{A}+\mathrm{B}\cdot 2^{n}+\mathrm{B}\cdot 2^{n-1}=\mathrm{A}_{n+1}+\mathrm{B}\cdot 2^{n-1} \text{ при } d_{n+1}=1; \\ \mathrm{A}+\mathrm{B}\cdot 2^{n-1}=\mathrm{A}_{n+1}-\mathrm{B}\cdot 2^{n-1} \text{ при } d_{n+1}=0. \end{cases}$

При представлении смещенного делителя $\mathrm{B}\cdot 2^{n-1}$ длиною $2n$ в формате делимого длиною $2n+2$ и вычислении остатка делимого A_{n} в дополнительном коде получим:

$$\overline{d}_{n}\left(\frac{+}{-}\right) = \begin{cases} 1 \text{ при } \mathrm{A}^{n}_{\text{ДК}}=1 : \mathrm{NA}^{n}_{\text{ДК}}=\mathrm{NB}_{\text{ДК}}; \\ 0 \text{ при } \mathrm{A}^{n}_{\text{ДК}}=0 : \mathrm{NA}^{n}_{\text{ДК}}\neq \mathrm{NB}_{\text{ДК}}, \end{cases} \qquad (46)$$

где

$$\mathrm{A}^{n}_{\text{ДК}} = \begin{cases} \left(2\cdot \mathrm{A}^{n+1}_{\text{ДК}}+\mathrm{B}_{\text{ДК}}\cdot 2^{n+1}\right)_{mK} \text{при } \overline{d_{n+1}}=0 : \mathrm{NA}^{n+1}_{\text{ДК}}\neq \mathrm{NB}_{\text{ДК}}; \\ \left(2\cdot \mathrm{A}^{n+1}_{\text{ДК}}+\mathrm{B}^{\text{ПР}}_{\text{ДК}}\cdot 2^{n+1}\right)_{mK} \text{при } \overline{d_{n+1}}=1 : \mathrm{NA}^{n+1}_{\text{ДК}}=\mathrm{NB}_{\text{ДК}}; \end{cases}$$

$\mathrm{A}^{n} = 4\cdot \mathrm{A}_{n};\ 2\cdot \mathrm{A}^{n+1} = 4\cdot \mathrm{A}_{n+1}$.

В сокращенной записи получим

$$\overline{d}_{n}\left(\frac{+}{-}\right) = \overline{\mathrm{NA}^{n}_{\text{ДК}}\oplus \mathrm{NB}_{\text{ДК}}}. \qquad (47)$$

При очевидных изменениях индексов выражения (46)-(47) описывают правила формирования также всех младших разрядов отрицательного частного.

Конечное значение остатка делимого $\mathrm{C_{ДК}}(n+1,1)$ формируется по значению частичного остатка делимого $\mathrm{A}^{1}_{\text{ДК}}$, который, согласно (6), при $\mathrm{NA}^{1}_{\text{ДК}} \neq \mathrm{NA}_{\text{ДК}}$ корректируется:

$$\mathrm{C_{ДК}}(n+1,1) = \begin{cases} \mathrm{A}^{1}_{\text{ДК}}(2n+2,n+2) \text{ при } \mathrm{NA}^{1}_{\text{ДК}}=\mathrm{NA}_{\text{ДК}}; \\ \left(\mathrm{A}^{1}_{\text{ДК}}(2n+2,n+2)+\mathrm{B}^{\text{ПР}}_{\text{ДК}}(n+1,1)\right)_{mV} \\ \text{при } \mathrm{NA}^{1}_{\text{ДК}}\neq \mathrm{NA}_{\text{ДК}} : \mathrm{NA}^{1}_{\text{ДК}}=\mathrm{NB}_{\text{ДК}}. \end{cases} \qquad (48)$$

Дополнительный код частного, согласно (20), формируется путем коррекции полученного инверсного кода частного

$$\left[\overline{d_{n+1}}\right]\ldots\overline{d}_{2}\ \overline{d}_{1} : \mathrm{D_{ДК}}(n+1,1) = \left[\overline{d_{n+1}}\right]\overline{d}_{n}\ldots\overline{d}_{2}\ \overline{d}_{1} + 1. \qquad (49)$$

Деление целых чисел в дополнительном коде при отрицательном делимом и положительном делителе

При отрицательном значении частного, образованного делением отрицательного делимого и положительного делителя максимальное значение модуля частного, согласно (20), ограничено и определяется неравенством

$$|\mathrm{D}|_{\max} \leq 2^{n}.$$

Тогда признак переполнения отрицательного частного задается системой неравенств:

$$\text{ПП}\left(\frac{-}{+}\right) = \begin{cases} 0 \text{ при } \mathrm{A}_{n+1} \geq 0; \\ 1 \text{ при } \mathrm{A}_{n+1}<0, \end{cases} \qquad (50)$$

где $\text{ПП}\left(\frac{-}{+}\right)$ – признак переполнения разрядной сетки частного при делении отрицательного делимого и положительного делителя;
$\mathrm{A}_{n+1} = \mathrm{A} + \mathrm{B}\cdot 2^{n} : \mathrm{A} \in [-\mathrm{K}/2;-1],\ \mathrm{B} \in [1;\mathrm{V}/2)$.

В силу этого имеем:

$$\text{ПП}\left(\frac{-}{+}\right) = \begin{cases} 0 \text{ при } \mathrm{A}^{n+1} >0; \\ 0 \text{ при } \mathrm{A}^{n+1}=0; \\ 1 \text{ при } \mathrm{A}^{n+1}<0, \end{cases} \qquad (51)$$

где $\mathrm{A}^{n+1} = 2\cdot \mathrm{A} + \mathrm{B}\cdot 2^{n+1}$, $\mathrm{A}^{n+1} = 2\cdot \mathrm{A}_{n+1}$ – удвоенный остаток делимого; $\mathrm{B}\cdot 2^{n+1}$ – смещенный код делителя длиною $2n+2$.

При вычислении остатка A^{n+1} в дополнительном коде операция задается в виде

$$\mathrm{A}^{n+1}_{\text{ДК}} = \left(2\cdot \mathrm{A}_{\text{ДК}}+\mathrm{B}_{\text{ДК}}\cdot 2^{n+1}\right)_{mK}, \qquad (52)$$

где $\mathrm{A}_{\text{ДК}} = (2^{2n+2} + \mathrm{A})_{mK} = 2^{2n+2} - |\mathrm{A}|$;
$\mathrm{B}_{\text{ДК}}\cdot 2^{n+1} = (2^{2n+2} + \mathrm{B}\cdot 2^{n+1})_{mK} = |\mathrm{B}|\cdot 2^{n+1}$.

Полная сумма в правой части выражения (52) образует двоичный код:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\cdot 2^{2n+2} + \mathrm{A}^{n+1}_{\text{ДК}}(2n+2,1) &= (2\cdot 2^{2n+2} - 2\cdot|\mathrm{A}|)_{mK} + |\mathrm{B}|\cdot 2^{n+1} \\ &= 2^{2n+2} - 2\cdot|\mathrm{A}| + |\mathrm{B}|\cdot 2^{n+1} = \\ &= \begin{cases} <2^{2n+2} \text{ при } 2\cdot|\mathrm{A}| >|\mathrm{B}|\cdot 2^{n}; \\ 2^{2n+2} \text{ при } 2\cdot|\mathrm{A}| =|\mathrm{B}|\cdot 2^{n}; \\ >2^{2n+2} \text{ при } 2\cdot|\mathrm{A}| <|\mathrm{B}|\cdot 2^{n}, \end{cases} \end{aligned}$$

где E – выходной перенос полной суммы остатка $\mathrm{A}^{n+1}_{\text{ДК}}$. Откуда следует, что

$$\mathrm{E} = \begin{cases} 0 \text{ при } 2\cdot|\mathrm{A}|>|\mathrm{B}|\cdot 2^{n} : \mathrm{A}^{n+1} >0; \\ 1 \text{ при } 2\cdot|\mathrm{A}|=|\mathrm{B}|\cdot 2^{n} : \mathrm{A}^{n+1}=0; \\ 1 \text{ при } 2\cdot|\mathrm{A}|<|\mathrm{B}|\cdot 2^{n} : \mathrm{A}^{n+1}<0. \end{cases} \qquad (53)$$

Следовательно, при делении отрицательного делимого и положительного делителя признак переполнения частного, согласно (51) и (53), описывается логическим выражением

$$\text{ПП}\left(\frac{-}{+}\right) = \overline{\mathrm{E}}. \qquad (54)$$

В общем случае при делении отрицательного делимого и положительного делителя дополнительный код отрицательного частного определяется через инверсный код в соответствии с соотношениями (20) и (42). При этом прямые значения цифровых разрядов частного при отсутствии переполнения определяются, согласно (1), решением уравнения

$$\mathrm{A} = -\mathrm{B}\cdot(d_{n+1}\cdot 2^{n} + d_n\cdot 2^{n-1} + \ldots + d_2\cdot 2 + d_1). \qquad (55)$$

Следовательно, при отсутствии переполнения частного ($\mathrm{A}_{n+1} \geq 0$) прямой код в знаковой позиции частного определяется выражением

$$d_{n+1}\left(\frac{-}{+}\right) = \begin{cases} 1 \text{ при } \mathrm{A}_{n+1} = 0; \\ 0 \text{ при } \mathrm{A}_{n+1} > 0. \end{cases}$$

Откуда, согласно (41), (51)-(52), следует:

$$\overline{d_{n+1}}\left(\frac{-}{+}\right) = \begin{cases} 0 \text{ при } \mathrm{ZA}=1 : \mathrm{NA}_{\text{ДК}}^{n+1}=0; \\ 1 \text{ при } \mathrm{ZA}=0 : \mathrm{NA}_{\text{ДК}}^{n+1}\neq 0. \end{cases}$$

Приняв, согласно (6),

$$\mathrm{N}(n+1) = \begin{cases} \mathrm{NA}_{\text{ДК}} \text{ при } \mathrm{ZA}=1 : \mathrm{NA}_{\text{ДК}}=1; \\ \mathrm{NA}_{\text{ДК}}^{n+1} \text{ при } \mathrm{ZA}=0 : \mathrm{NA}_{\text{ДК}}^{n+1}=0, \end{cases}$$

получим:

$$\overline{d_{n+1}}\left(\frac{-}{+}\right) = \begin{cases} 0 \text{ при } \mathrm{N}(n+1)\neq \mathrm{NB}_{\text{ДК}}; \\ 1 \text{ при } \mathrm{N}(n+1)= \mathrm{NB}_{\text{ДК}}, \end{cases} \qquad (56)$$

где $\mathrm{N}(n+1)$ – признак знакового разряда отрицательного нуля или знак значащего частичного остатка делимого при делении отрицательного делимого и положительного делителя.

В силу этого цифровой код в знаковой позиции отрицательного частного, согласно (56), формируется в соответствии с логическим выражением

$$\overline{d_{n+1}}\left(\frac{-}{+}\right) = \overline{\mathrm{N}(n+1)\oplus \mathrm{NB}_{\text{ДК}}}. \qquad (57)$$

При $d_{n+1} \in [0;1]$ двоичный код $\mathrm{D}(n) = \mathrm{d}_n$, согласно (55), определяется системой неравенств:

$$d_n\left(\frac{-}{+}\right) = \begin{cases} 0 \text{ при } \mathrm{A}_n>0; \\ 1 \text{ при } \mathrm{A}_n\leq 0, \end{cases} \qquad (58)$$

где

$$\mathrm{A}_n = \begin{cases} \mathrm{A}+\mathrm{B}\cdot 2^{n}+\mathrm{B}\cdot 2^{n-1}=\mathrm{A}_{n+1}+\mathrm{B}\cdot 2^{n-1} \text{ при } d_{n+1}=1; \\ \mathrm{A}+\mathrm{B}\cdot 2^{n-1}=\mathrm{A}_{n+1}-\mathrm{B}\cdot 2^{n}+\mathrm{B}\cdot 2^{n-1} = \\ \quad = \mathrm{A}_{n+1}-\mathrm{B}\cdot 2^{n-1} \text{ при } d_{n+1}=0. \end{cases}$$

При представлении смещенного делителя $\mathrm{B}\cdot 2^{n-1}$ длиною $2n$ в формате делимого длиною $2n + 2$ получим:

$$\mathrm{A}^{n} = \begin{cases} 2\cdot \mathrm{A}^{n+1}+\mathrm{B}\cdot 2^{n+1} \text{ при } d_{n+1}=1; \\ 2\cdot \mathrm{A}^{n+1}-\mathrm{B}\cdot 2^{n+1} \text{ при } d_{n+1}=0, \end{cases}$$

где $\mathrm{A}^{n} = 4\cdot \mathrm{A}_n$; $2\cdot \mathrm{A}^{n+1} = 4\cdot \mathrm{A}_{n+1}$.

При вычислении остатка A^{n} в дополнительном коде выражение принимает вид:

$$\mathrm{A}_{\text{ДК}}^{n}= \begin{cases} \left(2\cdot \mathrm{A}_{\text{ДК}}^{n+1}+\mathrm{B}_{\text{ДК}}\cdot 2^{n+1}\right)_{mK} \text{при } \mathrm{N}(n+1)\neq \mathrm{NB}_{\text{ДК}} : \overline{d_{n+1}}=0; \\ \left(2\cdot \mathrm{A}_{\text{ДК}}^{n+1}+\mathrm{B}_{\text{ДК}}^{\text{ПР}}\cdot 2^{n+1}\right)_{mK} \text{при } \mathrm{N}(n+1)= \mathrm{NB}_{\text{ДК}} : \overline{d_{n+1}}=1. \end{cases} \qquad (59)$$

Тогда, согласно (58), получим:

$$\overline{d_n}\left(\frac{-}{+}\right) = \begin{cases} 1 \text{ при } \mathrm{NA}_{\text{ДК}}^{n}=0 : \mathrm{ZA}^{n}(\mathrm{H})=0; \\ 0 \text{ при } \mathrm{ZA}^{n}(\mathrm{H})=1; \\ 0 \text{ при } \mathrm{NA}_{\text{ДК}}^{n}=1 : \mathrm{ZA}^{n}(\mathrm{H})=0, \end{cases}$$

где $\mathrm{ZA}^{n}(\mathrm{H}) = \begin{cases} 0 \text{ при } \mathrm{A}_{\text{ДК}}^{n}(2n+2,n+2)\neq 0; \\ 1 \text{ при } \mathrm{A}_{\text{ДК}}^{n}(2n+2,n+2)=0; \end{cases}$

$\mathrm{ZA}^{n}(\mathrm{H})$ – признак нулевого значения в вычисляемой части частичного остатка делимого $\mathrm{A}_{\text{ДК}}^{n}(2n+2,n+2)$.

Откуда получим:

$$\overline{d_n}\left(\frac{-}{+}\right) = \begin{cases} 1 \text{ при } \mathrm{N}(n)= \mathrm{NB}_{\text{ДК}}; \\ 0 \text{ при } \mathrm{N}(n)\neq \mathrm{NB}_{\text{ДК}}, \end{cases} \qquad (60)$$

где $\mathrm{N}(n) = \begin{cases} \mathrm{NA}_{\text{ДК}} \text{ при } \mathrm{ZA}^{n}(\mathrm{H})=1; \\ \mathrm{NA}_{\text{ДК}}^{n} \text{ при } \mathrm{ZA}^{n}(\mathrm{H})=0; \end{cases}$

$\mathrm{N}(n)$ – признак знакового разряда отрицательного нуля остатка $\mathrm{A}_{\text{ДК}}^{n}$ делимого или знак значащего частичного остатка $\mathrm{A}_{\text{ДК}}^{n} \neq 0$ делимого при делении отрицательного делимого и положительного делителя.

Таким образом, $\mathrm{D}_{\text{ДК}}(n) = \overline{d_n}$, согласно (60), определяется логическим выражением

$$\overline{d_n}\left(\frac{-}{+}\right) = \overline{\mathrm{N}(n)\oplus \mathrm{NB}_{\text{ДК}}}. \qquad (61)$$

Выражения (59)-(61) определяют общие правила формирования также всех младших разрядов частного $\overline{d_{n-1}}\ldots\overline{d_2}\ \overline{d_1}$.

Целочисленный остаток делимого $\mathrm{C}_{\text{ДК}}(n+1,1)$ представляется значением частичного остатка $\mathrm{A}_{\text{ДК}}^{1}$, который, согласно (6), при $\mathrm{NA}_{\text{ДК}}^{1}\neq \mathrm{NA}_{\text{ДК}}$ корректируется:

$$\mathrm{C}_{\text{ДК}}(n+1,1) = \begin{cases} \mathrm{A}_{\text{ДК}}^{1}(2n+2,n+2) \text{ при } \mathrm{N}(1)=\mathrm{NA}_{\text{ДК}}; \\ \left(\mathrm{A}_{\text{ДК}}^{1}(2n+2,n+2)+\mathrm{B}_{\text{ДК}}^{\text{ПР}}(n+1,1)\right)_{mV} \\ \text{при } \mathrm{N}(1)\neq \mathrm{NA}_{\text{ДК}} : \mathrm{N}(1)=\mathrm{NB}_{\text{ДК}}, \end{cases} \qquad (62)$$

где $\mathrm{N}(1) = \begin{cases} \mathrm{NA}_{\text{ДК}} \text{ при } \mathrm{ZA}^{1}(\mathrm{H})=1; \\ \mathrm{NA}_{\text{ДК}}^{1} \text{ при } \mathrm{ZA}^{1}(\mathrm{H})=0; \end{cases}$

$$\mathrm{ZA}^{1}(\mathrm{H}) = \begin{cases} 0 \text{ при } \mathrm{A}_{\text{ДК}}^{1}(2n+2,n+2)\neq 0; \\ 1 \text{ при } \mathrm{A}_{\text{ДК}}^{1}(2n+2,n+2)=0. \end{cases}$$

Дополнительный код частного $\mathrm{D}_{\text{ДК}}(n+1,1)$ при делении отрицательного делимого и положительного делителя, согласно (20), формируется после коррекции полученного инверсного кода частного:

$$\mathrm{D}_{\text{ДК}}(n+1,\ 1) = [\overline{d_{n+1}}]\overline{d_n}\ \ldots\ \overline{d_2}\ \overline{d_1} + 1. \qquad (63)$$

Деление целых отрицательных чисел в дополнительном коде

При положительном значении частного, образованного делением отрицательных чисел, максимальное значение модуля частного, согласно (19), ограничено и определяется неравенством

$$|\mathrm{D}|_{\max} < 2^{n}.$$

В силу этого признак переполнения частного задается системой неравенств:

$$\text{ПП}\left(\frac{-}{-}\right) = \begin{cases} 0 \text{ при } \frac{|\mathrm{A}|}{|\mathrm{B}|}<2^{n}; \\ 1 \text{ при } \frac{|\mathrm{A}|}{|\mathrm{B}|}\geq 2^{n}, \end{cases}$$

где ПП$\left(\frac{-}{-}\right)$ – признак переполнения частного при делении отрицательных чисел.

Откуда получим:

$$ПП\left(\frac{-}{-}\right) = \begin{cases} 0 \text{ при } A_{n+1}>0; \\ 1 \text{ при } A_{n+1}<0; \\ 1 \text{ при } A_{n+1}=0, \end{cases}$$

где $A_{n+1} = A - B\cdot2^n$; $A\in[-K/2; -1]$, $B = [-V/2; -1]$.

При представлении смещенного делителя $B\cdot2^n$ длиною $2n+1$ в формате делимого длиною $2n+2$ и вычислении остатка A_{n+1} в дополнительном коде система неравенств примет вид:

$$ПП\left(\frac{-}{-}\right) = \begin{cases} 0 \text{ при } NA^{n+1}_{ДК}=0 : ZA=0; \\ 1 \text{ при } NA^{n+1}_{ДК}=1 : ZA=0; \\ 1 \text{ при } NA^{n+1}_{ДК}=0 : ZA=1, \end{cases} \quad (64)$$

где $A^{n+1}_{ДК} = \left(2\cdot A_{ДК}+B^{ПР}_{ДК}\cdot2^{n+1}\right)_{mK}$;
$A^{n+1}_{ДК} = (2^{2n+2} - |A|)_{mK} = 2^{2n+2} - |A|$;
$B_{ДК}\cdot2^{n+1} = (2^{2n+2} - |B|\cdot2^{n+1})_{mK} = 2^{2n+2} - |B|\cdot2^{n+1}$.

Полная сумма в выражении $A^{n+1}_{ДК}$ образует двоичный код

$$E\cdot2^{2n+2} + A^{n+1}_{ДК} = (2\cdot2^{2n+2} - 2\cdot|A|)_{mK} + |B|\cdot2^{n+1} = \\ =2\cdot2^{2n+2} - 2\cdot|A| + |B|\cdot2^{n+1} = \\ = \begin{cases} >2^{2n+2} \text{ при } NA^{n+1}_{ДК}=0 : ZA=0; \\ <2^{2n+2} \text{ при } NA^{n+1}_{ДК}=1 : ZA=0; \\ 2^{2n+2} \text{ при } ZA=1 : A^{n+1}_{ДК}=0, \end{cases}$$

E – выходной перенос полной суммы $A^{n+1}_{ДК}$.

Откуда получим:

$$E = \begin{cases} 1 \text{ при } NA^{n+1}_{ДК}=0 : ZA=0; \\ 0 \text{ при } NA^{n+1}_{ДК}=1 : ZA=0; \\ 1 \text{ при } ZA=1. \end{cases}$$

Следовательно, при делении отрицательных чисел переполнение разрядной сетки частного, согласно (64), описывается логическим выражением

$$ПП\left(\frac{-}{-}\right) = \overline{E \oplus ZA}. \quad (65)$$

При отсутствии переполнения частного прямые значения цифровых разрядов положительного частного, согласно (19), определяются решением уравнения

$$A = B\cdot([d_{n+1}]\cdot2^n + d_n\cdot2^{n-1} + \ldots + d_2\cdot2 + d_1). \quad (66)$$

Таким образом, в общем случае, согласно (64) и (66), получим:

$$[d_{n+1}] = \begin{cases} 0 \text{ при } N(n+1)\neq NB_{ДК} : NB_{ДК}=1; \\ 1 \text{ при } N(n+1)=NB_{ДК} : NB_{ДК}=1, \end{cases}$$

где $N(n+1) = \begin{cases} NA_{ДК} \text{ при } ZA=1; \\ NA^{n+1}_{ДК} \text{ при } ZA=0. \end{cases}$

При отсутствии переполнения частного, согласно (64), $NA^{n+1}_{ДК} = 0$ и $ZA = 0$, поэтому система неравенств вырождается в равенство

$$[d_{n+1}] = 0. \quad (67)$$

В общем случае при $d_{n+1} \in [0;1]$ двоичный код $D(n) = d_n$ определяется, согласно (66), системой неравенств:

$$d_n\left(\frac{-}{-}\right) = \begin{cases} 0 \text{ при } A_n > 0; \\ 1 \text{ при } A_n = 0; \\ 1 \text{ при } A_n < 0, \end{cases}$$

где $A_n = \begin{cases} A_{n+1}\text{-}B\cdot2^{n-1} \text{ при } A_{n+1}\leq0; \\ A_{n+1}+B\cdot2^{n-1} \text{ при } A_{n+1}>0. \end{cases}$

При представлении смещенного кода $B\cdot2^{n-1}$ длиною $2n$ в формате делимого длиною $2n+2$ и вычислении остатка в дополнительном коде получим:

$$d_n\left(\frac{-}{-}\right) = \overline{N(n) \oplus NB_{ДК}}, \quad (68)$$

где $A^n_{ДК} = \begin{cases} \left(2\cdot A^{n+1}_{ДК}+B^{ПР}_{ДК}\cdot2^{n+1}\right)_{mK} \text{ при } N(n)=NB_{ДК}; \\ \left(2\cdot A^{n+1}_{ДК}+B_{ДК}\cdot2^{n+1}\right)_{mK} \text{ при } N(n)\neq NB_{ДК}; \end{cases}$

$N(n) = \begin{cases} NA_{ДК} \text{ при } ZA^n(H)=1 : A^n_{ДК}(2n+2,n+2)=0; \\ NA^n_{ДК} \text{ при } ZA^n(H)=0 : A^n_{ДК}(2n+2,n+2)\neq0; \end{cases}$

$A^n = 4\cdot A_n$; $2\cdot A^{n+1} = 4\cdot A_{n+1}$.

Соотношения (68) определяют правила вычисления также всех младших разрядов частного $D(n\text{-}1,1) = d_{n-1} \ldots d_2\, d_1$.

Остаток делимого $C_{ДК}(n+1,1)$ определяется частичным остатком делимого $A^1_{ДК}$, который, согласно (6), при $N(1) \neq NA_{ДК}$ корректируется:

$$C_{ДК}(n+1,1) = \begin{cases} A^1_{ДК}(2n+2,n+2) \text{ при } N(1)=NA_{ДК}; \\ \left(A^1_{ДК}(2n+2,n+2)+B_{ДК}(n+1,2)\right)_{mV} \\ \text{ при } N(1)\neq NB_{ДК} : N(1)=NA^1_{ДК}; \end{cases}$$

$$N(1) = \begin{cases} NA_{ДК} \text{ при } ZA^1(H)=1 : A^1_{ДК}(2n+2,n+2)=0; \\ NA^1_{ДК} \text{ при } ZA^1(H)=0 : A^1_{ДК}(2n+2,n+2)\neq0. \end{cases}$$

Заключение

Основные преимущества предлагаемого математического описания операции деления целых чисел в дополнительном коде сводятся к следующему:

– дополнительные коды целых чисел операции деления задаются единообразной формулой для положительных и отрицательных чисел и исчисляются как остаток по модулю, равный количеству двоичных наборов дополнительного кода чисел;

– переполнение разрядной сетки частного фиксируется на этапе вычисления знакового разряда частного путем контроля выходного переноса старшего частичного остатка делимого (при делении (+,+) и (–,+)) или выходного переноса и нулевого значения старшего остатка делимого (при делении (+,–) и (–,–));

– показано, что нулевые значения остатков делимого при определении цифр частного и вычислении последующих частичных остатков делимого следует рассматривать как положительный нуль при положительном делимом и как отрицательный нуль – при отрицательном делимом;

– результат деления чисел в дополнительном коде корректируется только при отрицательных значениях частного;

– при отсутствии переполнения знаковый и цифровые разряды дополнительного кода частного вычисляются одинаковым способом.

Список литературы

1.Бабич Н.П., Жуков И.А. Компьютерная схемотехника. Методы построения и проектирования. – К.: МК-Пресс, 2004. – 576 с.

2.Корнейчук В.И., Тарасенко В.П. Основы компьютерной арифметики. – К.: «Корнейчук», 2002. – 176 с.

3.Дроздов Е.А., Комарницкий В.А., Пятибратов А.П. Электронные вычислительные машины Единой системы. – М.: Машиностроение, 1981. – 648 с.

4.Орлов С.А, Цилькер Б.Я. Организация ЭВМ и систем: Учебник для ВУЗов. 2-е изд. – СПб.: Питер, 2011. – 688 с.

5.Святный В.А. Математическое описание компьютерных операций суммирования и вычитания целых чисел при смещенных кодах операндов / В.А.Святный, В.В.Лапко, А.В.Самощенко. // Наукові праці Донецького національного технічного університету. Серія "Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка". – 2016. – Вип. 1(22). - с.75-83.

Надійшла до редакції 30.08.2016

В.А. СВЯТНИЙ, В.В. ЛАПКО, О.В. САМОЩЕНКО
Донецький національний технічний університет, м. Покровськ

МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ОПЕРАЦІЇ ДІЛЕННЯ ЦІЛИХ ЧИСЕЛ В ДОПОВНЯЛЬНОМУ КОДІ ІЗ НЕГАТИВНИМ ТА ПОЗИТИВНИМ НУЛЕМ ЗАЛИШКІВ ДІЛЕНОГО

Доповняльні коди цілих чисел зі знаком в операції ділення описуються єдиною формулою для позитивних та негативних чисел і обчислюються як залишок за модулем, який дорівнює кількості двійкових наборів доповняльного коду числа. На базі запропонованої моделі доповняльного коду цілих чисел аналітично обґрунтовано оригінальні засоби фіксації переповнення розрядної сітки при діленні цілих чисел із використанням вихідного переносу та ознаки нульового значення старшого часткового залишку діленого. Показано, що нульове значення часткових залишків діленого при визначенні цифр результату та обчисленні наступного часткового залишку діленого необхідно трактувати як позитивний чи негативний двійковий код в залежності від знаку діленого.

Ключові слова: модуль доповняльного коду, залишок за модулем, доповняльний код, переповнення, негативний та позитивний нуль доповняльного коду залишків діленого.

V.A. SVYATNY, V.V. LAPKO, A.V. SAMOSHCHENKO
Donetsk National Technical University, Pokrovsk

MATHEMATICAL DESCRIPTION OF COMPLEMENT INTEGERS DIVISION WITH NEGATIVE AND POSITIVE ZERO OF DIVIDEND REMAINDER

In division operation of complement integer numbers with sign is described by a single formula for the positive and negative numbers and is calculated as remainder modulo which is equal to quantity of binary sets of complement number. Based on the proposed model of complement integer numbers we justified analytically original ways of determining the bit grid overflow at division integer numbers with using output carry and sign of zero state of partial remainder of the dividend. It was shown that the zero value of partial remainder of the dividend at determining digit of quotient and calculation of the following partial remainder of dividend should be seen as positive or negative binary code, depending on the sign of the dividend.

Practical realization of operation division complement integer numbers at allowable values of the operands is assumed control the bit grid overflow of quotient. Using of a standard information signals in control scheme generated at the calculation of partial remainder of the dividend - output carry and the sign of zero state of the dividend, give simplification of the control of the quotient overflow and reducing hardware costs. To form a correct code of quotient zero value of partial remainder of the dividend when dividing numbers with arbitrary signs should be considered as positive or negative zero in the according to the sign of dividend. The accumulated digits of quotient in the cycle of division has a correction only for negative values of quotient by adding one to the LSB inverted code of quotient.

In this mathematical description of the operation division of integers in additional code some advantages can be allocated. Integer's additional codes of division operation are set a uniform formula for positive and negative numbers and calculated as a residue modulo equal to the number of binary sets additional code numbers. Zero values residues dividend in determining the numbers private and calculation of subsequent partial remains of the dividend should be seen as positive zero with a positive dividend and a negative zero with a negative dividend. The result of the division of numbers in the additional code is only adjusted for negative values of the private. In the absence of overflow and sign additional code digits private are calculated in the same way.

Key words: module of complement, remainder modulo, complement, overflow, positive and negative zero of complement dividend remainder.