

THE PROBLEM OF THE OPTIMAL MINIMAX LIMIT CONTROL OF OBJECTS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

O. Lobok, N. Savizkaia, B. Goncharenko

National University of Food Technologies

M. Sych

National University of Bioresources and Natural Resources of Ukraine

Key words:

*Minimax control
Regulators
Distributed parameter
systems
Optimization
Gradient projection
method
Point and mobile limit
control*

Article history:

Received 13.07.2018
Received in revised form
31.07.2018
Accepted 20.08.2018

Corresponding author:

B. Goncharenko

E-mail:

GoncharenkoBN@i.ua

ABSTRACT

The problem of minimax control synthesis for objects that are described by a two-dimensional heat conduction equation of parabolic type is solved in the paper. It is assumed that the control object functions under uncertainty conditions, and the perturbations acting on the object belong to some given hyperellipsoid. The problem of constructing a regulator in the state of an object for cases of point and mobile limit control is considered in accordance with the integral-quadratic quality criterion. With the help of numerical optimization methods, the problem of determining the optimal location of concentrated regulators at the boundary of a rectangular region and the problem of finding the optimal law of motion of a mobile limit regulator is solved. The problem is posed and solved in the minimax formulation when there is an optimal control on the state of the object functioning under uncertainty conditions so that the regulator minimizes the maximum control error from a set of possible values, taking into account the most unfavorable perturbations that can act on the object or system. In this case, the perturbations of the object belong to a given limited region. The results of computational experiments illustrating the effectiveness of the constructed limiting concentrated and moving regulators are presented. The obtained results indicate that the controls found in the work are indeed optimal and ensure minimum errors (deviations from the given state) of the functioning of the system and energy costs for the implementation of control under given conditions and in the absence of any information on external action other than the region of permissible perturbations.

In the work, for the first time, a minimax approach was used to control the objects described by the two-dimensional parabolic type thermal conductivity equation; the theoretical positions of synthesis of minimax regulators for cases of lumped boundary (point) and moving regulators are considered; algorithmic software is developed that allows to simulate the dynamics of the constructed minimax-regulators and to investigate the corresponding transients.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО МІНІМАКСНОГО ГРАНИЧНОГО КЕРУВАННЯ ОБ'ЄКТАМИ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

О.П. Лобок, Н.М. Савицька, Б.М. Гончаренко

Національний університет харчових технологій

М.А. Сич

Національний університет біоресурсів і природокористування України

У статті розв'язується задача синтезу мінімаксного керування для об'єктів, які описуються двовимірним рівнянням теплопровідності параболічного типу. Передбачається, що об'єкт керування функціонує в умовах невизначеності, причому збурення, що діють на об'єкт, належать до заданого гіпереліпсоїду. Розглядається задача побудови регулятора за станом об'єкта для випадків точкового та рухомого граничного керування згідно з інтегрально-квадратичним критерієм якості. За допомогою числових оптимізаційних методів розв'язана задача визначення оптимального розташування зосереджених регуляторів на границі прямокутної області та задача пошуку оптимального закону переміщення рухомого граничного регулятора. Задача ставиться та розв'язується в мінімаксній постановці, тобто знаходиться оптимальний регулятор за станом об'єкта, який функціонує в умовах невизначеності так, що він передбачає мінімізацію максимальної похибки (відхилення поточного стану системи від заданого або бажаного) з множини можливих значень з урахуванням найбільш несприятливих збурень, що можуть діяти на об'єкт або систему. Причому збурення об'єкта належать до заданої обмеженої області. Наводяться результати обчислювальних експериментів, які ілюструють ефективність побудованих зосереджених граничних (точкових) і рухомих регуляторів. Отримані результати свідчать про те, що знайдені керування дійсно є оптимальними і забезпечують мінімум похибки (відхилення від заданого стану) функціонування системи та енергетичних затрат на здійснення керування при заданих умовах і відсутності будь-якої інформації про зовнішній вплив, крім області допустимих збурень.

Уперше застосовано мінімаксний підхід для керування об'єктами, які описуються двовимірним рівнянням теплопровідності параболічного типу; розглянуто теоретичні положення синтезу мінімаксних регуляторів для випадків зосереджених граничних (точкових) і рухомих регуляторів; розроблено алгоритмічно-програмне забезпечення, яке дає змогу моделювати динаміку побудованих мінімаксних регуляторів і досліджувати відповідні перехідні процеси.

Ключові слова: мінімаксне керування, регулятори, системи з розподіленими параметрами, оптимізація, метод проекції градієнта, точкове та рухоме граничне керування.

Постановка проблеми. У зв'язку з широким розповсюдженням нових прогресивних технологій, пов'язаних з використанням електронних, іонних,

лазерних та інших випромінювань, останніми роками почалось інтенсивне вивчення можливостей оптимального керування розподіленими системами джерел шляхом зміни розташування точкових джерел випромінювань і законів пересування рухомих.

Постановка задач точкового і рухомого керування, деякі методи їх розв'язання наведені в [1—3]. Однією з дуже важливих і складних задач є вибір оптимальної стратегії точкового і рухомого керування для систем, що функціонують в умовах невизначеності. Саме цій проблемі і присвячена ця пропонована стаття, в якій розв'язуються задачі вибору оптимального розташування точкових регуляторів і пошуку оптимального закону руху (переміщення) рухомого джерела на границі прямокутної області для процесу теплоперенесення, перебіг якого відбувається в умовах неповної інформації. Теорія керування рухається в напрямку ускладнення досліджуваних явищ, процесів і зменшення інформації про систему керування, об'єкт, його особливості, властивості, характеристики, умови функціонування, зовнішні впливи. Враховуючи все вищезазначене, обраний напрям досліджень є перспективним і має високий рівень актуальності.

Мета статті: практичне застосування теорії синтезу мінімаксних регуляторів для задач керування вибором оптимального розташування точкових регуляторів і пошуку оптимального закону руху в умовах невизначеності зовнішніх збурень, що діють на них, крім області їхньої допустимості, а також дослідження ефективності запропонованих регуляторів за допомогою обчислювальних експериментів.

Викладення основних результатів дослідження. У багатьох технологічних об'єктах автоматизації наявні дифузійні процеси або теплоперенесення. Так, процес теплоперенесення в однорідній тонкій прямокутній пластині описується функцією $\varphi(x, t)$, яка в області $Q_T = \Omega \cdot (0, T)$, де $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$, $l_1, l_2 > 0$, $T < \infty$, задовольняє рівняння:

$$\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = a \Delta_x \varphi(x, t) + f_1(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (1)$$

а на границі Q_T — ще й додаткові умови:

$$\varphi(x, 0) = f_0(x), \quad x \in \Omega; \quad \varphi(x, t) = \sum_{i=1}^N \delta(x - v_i(t)) u_i(t), \quad (x, t) \in \Gamma \cdot (0, T). \quad (2)$$

Тут $\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ — двовимірний оператор Лапласа; $a > 0$ — коефіцієнт температуропровідності; Γ — границя прямокутної області Ω ; $\delta(x - y)$ — дельта-функція Дірака; $t \rightarrow v_i(t) \in \Gamma$ — вимірні функції, що задають рух граничних джерел; $u_i(t) \in L_2(0, T)$ — функції керування; $f_0(x) \in L_2(\Omega)$, $f_1(x, t) \in L_2(Q_T)$ — невідомі функції, що належать до області:

$$S_t = \{(f_0, f_1) : G(f_0; f_1(\tau), 0 < \tau < t) \leq 1\}, \quad t \in (0, T], \quad (3)$$

де

$$G(f_0; f_1(\tau), 0 < \tau < t) = F_0 \int_{\Omega} f_0^2(x) dx + F_1 \int_0^t \int_{\Omega} f_1^2(x, \tau) dx d\tau,$$

F_0, F_1 — додатні постійні величини, що відображають внесок перешкод; f_0 і $f_1(t)$ в результатуюче збурення, що діє на систему (1), (2).

Під розв'язком крайової задачі (1), (2) будемо розуміти таку функцію $\varphi(x, t) \in L_2(Q_T)$, яка задовольняє таку інтегральну тотожність:

$$-\int_0^T \int_{\Omega} \varphi(x, t) \left(\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + a \Delta_x \eta(x, t) \right) dx dt = \int_{\Omega} f_0(x) \eta(x, 0) dx + \int_0^T \int_{\Omega} f_1(x, t) \eta(x, t) dx dt -$$

$$-a \sum_{i=1}^N \int_0^T u_i(t) \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial n} \Big|_{x=v_i(t)} dt \quad \forall \eta(x, t) \in \Phi, \quad (4)$$

де $\frac{\partial}{\partial n}$ — похідна по зовнішній нормалі \bar{n} до границі Γ області Ω , $\Phi = \left\{ \eta(x, t) : \eta(x, t) \in H^{3,1}(Q_T), \eta(x, T) = 0, x \in \Omega; \eta(x, t) = 0, (x, t) \in \Gamma \cdot (0, T) \right\}$, $H^{3,1}(Q_T)$ — соболевський простір [4].

Можна показати [5], що розв'язок рівняння (4) при заданих керуваннях $u_i(t) \in L_2(0, T)$ існує і є єдиним в просторі $L_2(Q_T)$.

Задача вибору оптимальної стратегії мінімаксного керування [6; 8] буде полягати в тому, щоб знайти вектор-функції $v^*(t) = [v_1^*(t), v_2^*(t), \dots, v_N^*(t)]^T$ і $u^*(t) = [u_1^*(t), u_2^*(t), \dots, u_N^*(t)]^T$ з умови

$$I(u^*, v^*) = \inf_v \inf_u I(u, v), \quad (5)$$

де

$$I(u, v) = \sup_{S_T} \left[\int_{\Omega} S(x) \varphi(x, T) dx \right]^2 + \int_0^T \sum_{i=1}^N d_i \sup_{S_i} u_i^2(t) dt, \quad (6)$$

$S(x) \in L_2(\Omega)$, $d_i = const > 0$, $i = 1, 2, \dots, N$, при заданій структурі керування $u_i(t)$ у вигляді лінійного зворотного зв'язку виду:

$$u_i(t) = \int_{\Omega} R_i(x, t) \varphi(x, t) dx. \quad (7)$$

Розв'язування сформульованої задачі будемо здійснювати в два етапи: спочатку розв'яжемо задачу визначення оптимального керування $u^*(t)$ з умови

$$I(u^*, v) = \inf_u I(u, v) \quad (8)$$

при фіксованій вектор-функції $v(t)$, а потім знайдемо $v^*(t)$, при якому

$$I(u^*, v^*) = \inf_v I(u^*, v). \quad (9)$$

Використовуючи результати, наведені у [7; 8], можна довести справедливність такого твердження: оптимальне керування $u^*(t)$ оптимізаційної задачі (1), (2), (6), (7), що задовольняє необхідні умови оптимальності має вигляд:

$$u_i^*(t) = \int_{\Omega} R_i^*(x, t) \varphi(x, t) dx, \quad R_i^*(x, t) = a d_i^{-1} \alpha^{-1}(t) g(x, t) h(v_i(t), t), \quad (10)$$

де

$$\alpha(t) = 1 + a^2 \sum_{k=1}^N d_k^{-1} \int_t^T h^2(v_k(\tau), \tau) d\tau, \\ \begin{bmatrix} g(x, t) \\ h(x, t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} s_i e^{\lambda_i(t-T)} \begin{bmatrix} \omega_i(x) \\ r_i(x) \end{bmatrix}, \quad s_i = \int_{\Omega} S(x) \omega_i(x) dx. \quad (11)$$

У співвідношенні (11) $i = (i_1, i_2)$ — мультиіндекс,

$$r_i(x) = r_{i_1, i_2}(x_1, x_2) = \frac{2\pi}{\sqrt{l_1 l_2}} \begin{cases} (-1)^{i_1} \frac{i_1}{l_1} \sin \frac{\pi i_2 x_2}{l_2}, & x_1 = l_1, \\ -\frac{i_1}{l_1} \sin \frac{\pi i_2 x_2}{l_2}, & x_1 = 0, \\ (-1)^{i_2} \frac{i_2}{l_2} \sin \frac{\pi i_1 x_1}{l_1}, & x_2 = l_2, \\ -\frac{i_2}{l_2} \sin \frac{\pi i_1 x_1}{l_1}, & x_2 = 0, \end{cases} \\ x = (x_1, x_2) \in \Gamma,$$

де λ_i , $\omega_i(x)$ — власні значення і відповідні ортонормовані в просторі $L_2(\Omega)$ власні функції крайової задачі (1), (2), що мають вигляд:

$$\lambda_i = \lambda_{i_1, i_2} = a\pi^2 \left[(i_1/l_1)^2 + (i_2/l_2)^2 \right],$$

$$\omega_i(x) = \omega_{i_1, i_2}(x_1, x_2) = \frac{2}{\sqrt{l_1 l_2}} \sin \frac{\pi i_1 x_1}{l_1} \sin \frac{\pi i_2 x_2}{l_2}.$$

Значення функціоналу (6) на оптимальному керуванні (10) при цьому визначається за формулою:

$$I(u^*, v) = \frac{W(0)}{F_0 \alpha(0)} + \frac{1}{F_1} \int_0^T \frac{W(t)}{\alpha(t)} dt, \quad (12)$$

де

$$W(t) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i e^{2\lambda_i(t-T)}. \quad (13)$$

Перейдемо тепер до розв'язування оптимізаційної задачі (9), (12).

Розглянемо спочатку більш простий випадок, коли $v_i(t) \equiv z_i \in \Gamma$, $i = 1, 2, \dots, N$, тобто розв'яжемо задачу оптимального розташування точкових граничних керувань (10). Введемо позначення $z = [z_1, z_2, \dots, z_N]^T$, $J(z) = I(u^*, z) \equiv I(u^*, v)$. Тоді розглядувана задача буде полягати в тому, щоб знайти вектор $z = [z_1^*, z_2^*, \dots, z_N^*]^T$, при якому

$$J(z^*) = \inf_{z \in \Omega_z} J(z), \quad (14)$$

де $\Omega_z = \{z: z = [z_1, z_2, \dots, z_N]^T, z_i = (z_{1i}, z_{2i}) \in \Gamma, i = 1, 2, \dots, N; z_i \neq z_j, i \neq j\}$.

Враховуючи, що функція $J(z)$ є неперервно диференційованою функцією своїх аргументів, для розв'язання оптимізаційної задачі (14) скористаємось методом проекції градієнта [9]:

$$z^{k+1} = \text{Pr}_{\Omega_z} [z^k - \rho_k \nabla_z J(z^k)], k = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

де $\text{Pr}_{\Omega_z} [z] = [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$, $y_i = \text{Pr}_{\Gamma} [z_i]$ — проекція точки z_i на границю Γ прямокутної області Ω ; $z^k = [z_1^k, z_2^k, \dots, z_N^k]^T$ — наближений розв'язок, отриманий на k -й ітерації; z^0 — початкове наближення; ρ_k — крок спуску, який обирається з умови монотонного спадання функції мети $J(z)$ [9]; градієнт $\nabla_z J(z)$ визначається за формулою:

$$\begin{aligned} \nabla_z J(z) &= [\nabla_{z_1} J(z), \nabla_{z_2} J(z), \dots, \nabla_{z_N} J(z)]^T, \\ z &= [z_1, z_2, \dots, z_N]^T, z_i = (z_{1i}, z_{2i}) \in \Gamma, i = 1, 2, \dots, N, \\ \nabla_{z_n} J(z) &= -2a^2 \left[\frac{W(0)\theta_n(0)}{F_0 \alpha^2(0)} + \frac{1}{F_1} \int_0^T \frac{W(t)\theta_n(t)}{\alpha^2(t)} dt \right], \\ \theta_n(t) &= d_n^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1 - e^{(\lambda_i + \lambda_j)(t-T)}}{\lambda_i + \lambda_j} s_i s_j r_i(z_n) P_j(z_n), \end{aligned}$$

де $P_j(z_n) = [P_j^1(z_n), P_j^2(z_n)]$,

$$P_j^k(z_n) = P_{j_1, j_2}^k(z_{1n}, z_{2n}) = \frac{2\pi^2 j_1 j_2}{(l_1 l_2)^{3/2}} \cos \frac{\pi j_k z_{kn}}{l_k} \begin{cases} 0, & z_{kn} = 0, z_{kn} = l_k, \\ -1, & z_{3-k, n} = 0, & k = 1, 2. \\ (-1)^{j_{3-k}}, & z_{3-k, n} = l_{3-k}, \end{cases}$$

Умова зупинки приймалася у вигляді $|J(z^{k+1}) - J(z^k)| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ — задана точність розв'язку.

Програма може бути реалізована на сучасній алгоритмічній мові при таких початкових даних: $l_1 = 2,0$, $l_2 = 1,0$, $T = 2,0$, $F_0 = 0,25$, $F_1 = 2,0$, $d_i = 1,0$, $i = 1, 2, \dots, N$, $S(x) = 1,0$, $\varepsilon = 0,001$, $\rho_0 = 0,8$, число регуляторів $N = 5$, за значення коефіцієнта теплопровідності a було взято 0,4, що відповідає коефіцієнту теплопровідності мідної пластини. Розмірність всіх величин задана в системі [метр, час, град. °С, ккал.]. Нескінченні ряди (11), (13) обривались кінцевими сумами, що складались із трьох перших членів. При числовому моделюванні оптимальних керувань $u_i^*(t)$ припускалось, що збурення $f_0(x)$ і $f_1(x, t)$ дорівнюють:

$$f_0(x_1, x_2) = 2 \sin \frac{\pi x_1}{l_1} \sin \frac{\pi x_2}{l_2}, f_1(x_1, x_2, t) = t \sin \frac{\pi x_1}{l_1} \cos \frac{\pi x_2}{l_2}.$$

Відзначимо, що ці збурення є допустимими, оскільки

$$G(f_0, f_1(\tau), 0 < \tau < t) = F_0 l_1 l_2 + \frac{1}{12} F_1 l_1 l_2 t^3 = 0,5 + \frac{1}{3} t^3 < 1, \forall t \in (0, 0,2)$$

і, як наслідок, $f_0(x)$ та $f_1(x, t)$ належать до області (3).

У табл. 1. дано початкове розташування $z^0 = [z_1^0, z_2^0, \dots, z_N^0]^T$ точкових граничних регуляторів. Значення функції $J(z)$ при такому розташуванні керувань дорівнює $J(z^0) = 0,975632$. Оптимальне розташування регуляторів $z^* = [z_1^*, z_2^*, \dots, z_N^*]^T$, отримане за алгоритмом (15), подано в табл. 2, причому $J(z^*) = 0,571874$.

Таблиця 1

k	z_{1k}^0	z_{2k}^0
1	2,0	0,0
2	1,0	0,0
3	0,0	0,0
4	0,0	0,5
5	0,0	1,0

Таблиця 2

k	z_{1k}^*	z_{2k}^*
1	1,349	0,0
2	1,0	0,0
3	0,651	0,0
4	0,0	0,5
5	0,651	1,0

На рис. 1 зображені графіки оптимальних точкових керувань (10), що оптимально розташовані на границі Γ області Ω в точках $z_i^* \in \Gamma$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Повернемося тепер до оптимізаційної задачі (9), (12). Розглянемо для простоти одне ($N=1$) рухоме джерело і нехай збурення $f_1(x, t)$ в правій частині рівняння (1) будуть відсутні. Позначимо $u(t) = u_1(t)$, $v(t) = v_1(t)$, $d = d_1$, $J(v) = I(u^*, v)$. Тоді задача мінімізації функціонала

$$J(v) = W(0)(F_0\alpha(0))^{-1} \quad (16)$$

еквівалентна наступній оптимізаційній задачі:

$$L(v) = \int_0^T h(v(\tau), \tau) d\tau \rightarrow \sup_{\substack{t \rightarrow v(t) \in \Gamma \\ t \in (0, T)}}$$

де $\alpha(t)$, $h(x, t)$, $W(t)$ — функції, що визначаються за формулами (11), (13).

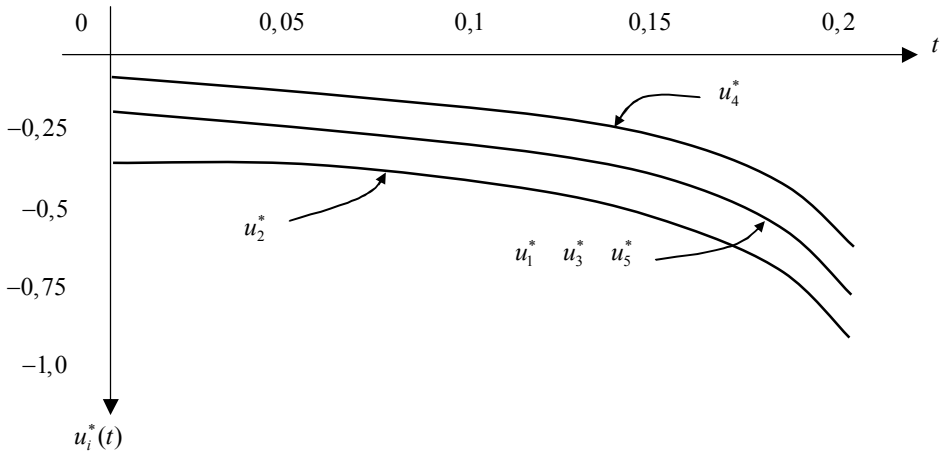


Рис. 1. Графіки оптимальних граничних точкових керувань

Для розв'язання останньої задачі також використовувався метод проекції градієнта виду:

$$v^{k+1}(t) = \text{Pr}_\Gamma [v^k(t) + \rho_k \delta[L(v^k); t]], \quad t \in (0, T), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (17)$$

де $v^0(t)$ — початкове наближення; $v^k(t)$ — наближений розв'язок, отриманий на k -му кроці; ρ_k — крок спуску до точки мінімуму; $\delta[L(v); t]$ — градієнт Фреше функціонала $L(v)$, який обчислюється за формулою:

$$\delta[L(v); t] = 2h(v(t), t)\rho(v(t), t), \quad \rho(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} s_i e^{\lambda_i(t-T)} P_i(x).$$

Алгоритм зупиняється, коли виконується умова $|L(v^{k+1}) - L(v^k)| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$ — задана точність розв'язку.

Числова реалізація алгоритму (17) проводилась при попередніх початкових даних. Нижче наведені результати обчислювальних розрахунків. В табл. 3 дано початковий закон руху $v^0(t) = (v_1^0(t), v_2^0(t))$ рухомого граничного джерела. Оптимальний закон руху $v^*(t) = (v_1^*(t), v_2^*(t))$ рухомого регулятора (10), отриманий за алгоритмом (17), подано в табл. 4.

Таблиця 3

t	$v_1^0(t)$	$v_2^0(t)$
0,0	0,0	0,0
0,02	0,667	0,0
0,04	1,333	0,0
0,06	2,0	0,0
0,08	2,0	0,5
0,10	2,0	1,0
0,12	1,333	1,0
0,14	0,667	1,0
0,16	0,0	1,0
0,18	0,0	0,5

Таблиця 4

t	$v_1^*(t)$	$v_2^*(t)$
0,0	0,010	0,0
0,02	0,765	0,0
0,04	1,230	0,0
0,06	1,990	0,0
0,08	2,0	0,5
0,10	1,990	1,0
0,12	1,285	1,0
0,14	0,664	1,0
0,16	0,010	1,0
0,18	0,0	0,5

Значення функціонала (16) при цьому зменшилось з $J(z^0) = 0,639538$ до $J(z^*) = 0,438419$. На рис. 2 зображено оптимальне керування (10), рух якого здійснюється по оптимальній траєкторії, наведеній в табл. 4. Оптимальна траєкторія складається з чотирьох частин, кожна з яких нагадує параболу і визначає (описує) рух регулятора вздовж відповідної границі прямокутної області.

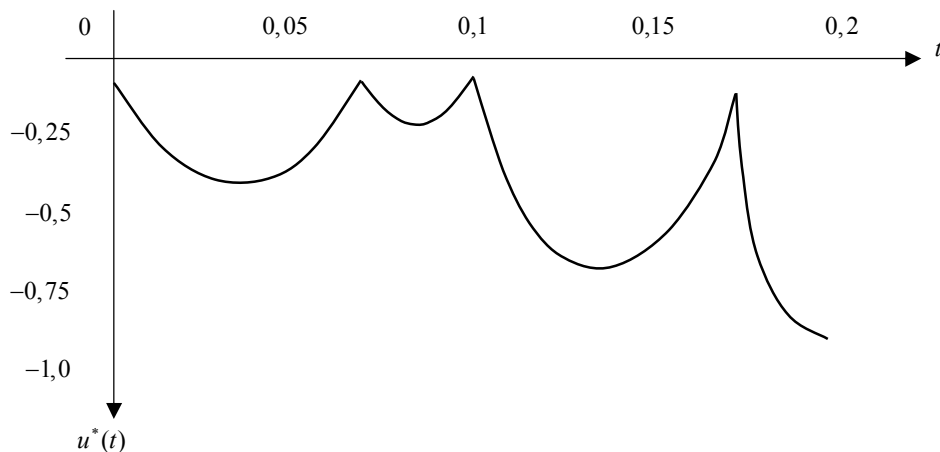


Рис. 2. Графік оптимального граничного рухомого керування

Обчислювальні експерименти також показали, що ефективність точкових і рухомих граничних керувань зростає із зменшенням коефіцієнта температуропровідності a , тобто із зменшенням цього коефіцієнта значення функціонала (8) після визначення оптимальної стратегії керування зменшувалось на більшу величину порівняно із значенням цього ж функціонала при заданій початковій стратегії керування.

Висновки

Результатом дослідження є розв’язок задачі оптимального розташування точкових граничних регуляторів та задачі визначення оптимальної траєкторії

переміщення рухомого регулятора по границі області, в якій функціонує розподілений об'єкт керування. Задача розв'язана в мінімакській постановці, тобто знайдено оптимальний регулятор за станом об'єкта, який функціонує в умовах невизначеності, причому збурення об'єкта належать заданій обмеженій області. Наведено результати обчислювальних експериментів, які ілюструють ефективність побудованих зосереджених граничних точкових та рухомих регуляторів. Отримані результати свідчать про те, що знайдені керування дійсно є оптимальними і забезпечують мінімум похибки (відхилення від заданого стану) функціонування системи та енергетичних затрат на здійснення керування при заданих умовах і відсутності будь-якої інформації про зовнішній вплив, крім області допустимих збурень. Задовільні показники якості керування спостерігаються навіть за умов виходу збурень за межі заданої області.

Література

1. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский. — Москва :Наука, 1975. — 568 с.
2. Бутковский А.Г. Подвижное управление системами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский, Ю.В. Даринский, Л.М. Пустыльников. — Автоматика и телемеханика, 1976. — № 2. — С. 15—25.
3. Бутковский А.Г. Теория подвижного управления сисстемами с распределенными параметрами / А.Г. Бутковский, Л.М. Пустыльников. — Москва :Наука, 1980. — 397 с.
4. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. — Москва :Мир, 1972. — 414 с.
5. Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, Н.Н. Уралцева, В.А. Солонников. — Москва :Наука, 1967. — 736 с.
6. Лобок О.П. Мінімаксне управління в лінійних динамічних системах із розподіленими параметрами / О.П. Лобок, Б.М. Гончаренко, Н.М. Савіцька // Журнал «Наукові праці Національного університету харчових технологій». — Том 21, № 6. — Київ : НУХТ. — 2015. — С.16—26.
7. Кириченко Н.Ф. Минимаксное управление и оценивание в динамических системах / Н.Ф. Кириченко. — Автоматика и телемеханика, 1982. — № 1. — С. 32—39.
8. Лобок А.П. Минимаксные регуляторы в системах с распределенными параметрами. Вестн. Киев. Универ. Моделирование и оптимизация сложных систем. —1983. — вып. 2. — С. 62—67.
9. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. — Москва : Наука, 1981. — 400 с.