УДК 164.053(045)

ОЦІНЮВАННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ТА ПОРІВНЯННЯ СТРАТЕГІЙ (РІШЕНЬ) ЗА НАЯВНОСТІ НЕВИЗНАЧЕНИХ ФАКТОРІВ

С. О. Шматок, д-р техн. наук, проф.; ***О. С. Шматок***, канд. техн. наук, доц.;
А. Б. Петренко, канд. техн. наук, доц.

Національний авіаційний університет

e-mail: pab.05@mail.ru

Особливість процесів прийняття рішень полягає в необхідності враховувати вплив невизначених факторів і розглядати всі можливі наслідки альтернатив, запропонованих для вибору. У зв'язку з цим практичне значення має розробка моделей прийняття рішень в умовах невизначеності. Обґрунтовано методику прийняття (обчислення) рішень за наявності невизначених факторів за принципом гарантованого результату.

Ключові слова: умови невизначеності, прийняття рішення, стратегії, показники ефективності.

Feature decision-making processes is the need to consider the impact of uncertain factors and consider all the possible consequences of the alternatives proposed for selection. In this regard, the practical importance is the development of models of decision making under uncertainty. In the article the method of adoption (calculation) solutions in the presence of uncertain factors on the principle of guaranteed results.

Keywords: conditions of uncertainty, decisions, strategies, performance.

Постановка проблеми

Розглядаються так звані функції корисності [1], тобто згорнутий тим чи іншим способом векторний показник ефективності. В ідеальному випадку вибір оптимальної стратегії забезпечує число $Q(U=U^*)$, яке характеризує ефективність операції. Наявність невизначених факторів ξ, відомих оперуючій стороні, тобто таких, які вона враховує у формальній математичній моделі операції, веде до залежності показника ефективності як від U, так і від ξ, тобто $Q=Q(U,\xi)$. При цьому вибрана стратегія буде функцією невизначених факторів $U=U(\xi)$ і тому показник ефективності буде вже не числом, а функцією від невизначених факторів, тобто $Q_B(\xi)=Q(U,\xi)\big|_{U=U(\xi)}$.

Таким чином, за наявності невизначених та нечітких факторів ефективність вибраних стратегій повинна оцінюватися не за одним числовим фактором, а за функцією $Q_B(\xi)$.

Аналіз досліджень і публікацій

Дослідження математичних методів прийняття рішень в умовах невизначеності на основі класифікації інформаційних ситуацій про стани середовища і за показаннями джерел інформації про стани середовища і керованого об'єкта описані в працях Льюса і Райфа, Блекуела, Гіршика, Фишборна, Беллмана, Ховарда, Заде.

Мета — визначити величину ефективності вибраної стратегії на основі принципу гарантованого результату в умовах невизначеності.

Виклад основного матеріалу дослідження

Як відомо [2], невизначені фактори поділяють на три групи:

а) фактори, обумовлені дією сил (або осіб), які є нейтральними щодо мети досліджуваної операції (вони ще мають назву «природних»);

б) фактори, обумовлені намаганням деяких сил досягти мети, яка не збігається, а інколи прямо протилежна меті досліджуваної операції. Ці фактори пов'язуються з діями противника у військових операціях, конкурента в економіці, суперника в політиці і т. ін.;

в) фактори, що відображають нечіткість розуміння мети операції оперуючої сторони.

Невизначені фактори природного типу

В оперуючої сторони відсутні відомості відносно властивостей складових $\xi_1,...,\xi_n$ вектора ξ. Здебільшого відомі лише діапазони зміни цих величин, тобто $\xi_{i\min} \le \xi_i \le \xi_{i\max}$, $i \in \overline{1,n}$.

Ця умова задає область значень фактору Ω_ξ. Для всіх цих значень ξ показник ефективності операції матиме також деяку множину значень, тобто стає векторним. У цих умовах єдино можливим способом згортання показника ефективності $Q(U,\xi)$ є заміна його найменшим (для кожного U) значенням, тобто перехід до показника ефективності:

$$Q_{\min}(U)=\min_{\xi_{i\min}\le\xi_i\le\xi_{i\max},\, i\in\overline{1,n}} Q(U,\xi_1,...,\xi_n). \quad (1)$$

Умова мінімізації (прийняття рішення) (1) може виконуватися або в середині інтервалу, або на його границі. Описану технологію прийняття рішення проілюструємо прикладом задачі прицілювання артилерійської гармати.

Невизначеним фактором є ξ — дальність до об'єкта, який обстрілюється. Оперуючій стороні відомо, що невизначений фактор є випадковою величиною з відомою щільністю ймовірностей $w(\xi/z)$ типу Коші, з невизначеною модою розподілу z, тобто:

$$w(\xi/z)=\frac{a}{\pi}\left[1+a^2(\xi-z)^2\right]^{-1}. \quad (2)$$

Початковий показник ефективності операції являє собою прямокутний імпульс [2], але після усереднення за законом Коші отримуємо:

$$Q_{\text{ср}}(U,z)=\frac{1}{\pi}\Big[\operatorname{arctg}a(V^2/g\sin 2u+R-z)- -\operatorname{arctg}a(V^2/g\sin 2u-R-z)\Big], \quad (3)$$

де $z>0$ — невизначений фактор.

Припустимо, що невизначений фактор z — величина, яка має значення із діапазону $[z_{\min},z_{\max}]$. У якості показника ефективності операції визначимо величину $Q_{\min}(U)=\min\limits_{z_{\min}\le z\le z_{\max}} Q_{\text{ср}}(U,z)$. Для спрощення виконаємо лінеаризацію виразу (3) по R за припущенням, що R — мала величина порівняно з $D=\dfrac{V^2}{g}\sin 2u$ та z:

$$Q_{\text{ср}}(U,z)=Q_{\text{ср}}(U,z)\big|_{R=0}+\frac{\partial Q_{\text{ср}}(U,z)}{\partial R}\big|_{R=0}\cong$$
$$\cong\frac{2aR}{\pi\left[1+a^2\left(\dfrac{V^2}{g}\sin 2u-z\right)^2\right]}. \quad (4)$$

Відповідно до формули (4) побудуємо декілька графіків залежності показника ефективності від величини дальності до об'єкта, що обстрілюється, та яка лежить у межах відомого діапазону $[z_{\min}=1,\, z_{\max}=2{,}5]$.

Із графіків на рис. 1 видно, що перетинання кривих відповідає значенню $D^*=1{,}75$.

Відповідно до (4) для показника ефективності можна записати:

$$Q_{\min}(U)=\min_{z_{\min}\le z\le z_{\max}} Q_{\text{ср}}(U,z)=$$
$$=\begin{cases}Q_{\text{ср}}(U,z_{\max}), u\le u^*;\\ Q_{\text{ср}}(U,z_{\min}), u>u^*;\end{cases}= \quad (5)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{2aR}{\pi}\left[1+a^2(V^2/g\sin 2u-z_{\max})^2\right]^{-1}, u\le u^*;\\ \dfrac{2aR}{\pi}\left[1+a^2(V^2/g\sin 2u-z_{\min})^2\right]^{-1}, u>u^*,\end{cases}$$

де величина u^* відповідає максимуму функції $Q_{\min}(U)$ і знаходиться із умови

$$\left(V^2/g\sin 2u-z_{\max}\right)^2=\left(V^2/g\sin 2u-z_{\min}\right)^2.$$

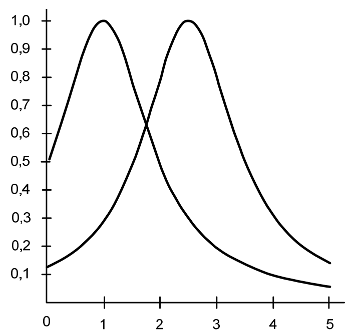

Рис. 1. Показники ефективності від величини дальності до об'єкта

Розв'яжемо це рівняння відносно першої складової, тобто $D^*=V^2/g\sin 2u^*$, що дає $D^*=V^2/g\sin 2u^*=\dfrac{z_{\max}+z_{\min}}{2}$.

Таким чином, гармату в цих умовах необхідно прицілювати до середньої точки інтервалу $[z_{\min},z_{\max}]$, де може знаходитися об'єкт, який необхідно знищити. В дійсності область Ω_ξ може відрізнятися від прямокутника, який задано в n-вимірному просторі, що тільки що вивчався. При цьому, найменше значення $\min\limits_{\xi\in\Omega_\xi} Q(U,\xi)$ доводиться замінювати нижньою межею функції $Q(U,\xi)$, тобто $\inf\limits_{\xi\in\Omega_\xi} Q(U,\xi)$. У разі заміни початкового показника ефективності $Q(U,\xi)$, його нижньою межею реалізується принцип гарантованого результату, а оцінка ефективності $Q_r(U)$ деякої стратегії U має назву гарантованої. При цьому оперуюча сторона в умовах невизначеності прагне орієнтуватися на найгірший із можливих результатів, тобто за довільних значень невизначених факторів $(\xi_1,...,\xi_n)\in\Omega_\xi$ оцінка стратегій U за показником $Q_r(U)$ гарантує, що значення початкового показника ефективності $Q(U,\xi)$ буде не меншим, ніж $Q_r(U)$, тобто $Q(U,\xi)\big|_{\xi\in\Omega_\xi} \geq Q_r(U)$ за $U \in \Omega_U$. Таке рішення є песимістичним з певним страхуванням (але нічого невідомо про ξ).

Вектор невизначених факторів є стратегією сторони (сил), мета якої (яких) не збігається з метою оперуючої сторони. При цьому можливі такі ситуації:

1) є декілька сторін, які беруть участь в операції і прагнуть досягти «своїх», відмінних одна від іншої цілей;

2) відрізняються показники ефективності сторін за своїм виглядом;

3) сторони, що беруть участь в операції, порізному інформовані відносно мети кожної сторони, вибраних стратегій і т.п.

Розглянемо деякі типові випадки.

В операції беруть участь дві сторони: оперуюча А, мета якої полягає в максимізації показника ефективності $Q(U,\xi)$ за рахунок вибору стратегії U, та сторона В, мета якої — максимізація показника ефективності $\omega(U,\xi)$ вибором вектора ξ, який є стратегією цієї сторони. За допомогою символів це можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} &A: \max_{U\in\Omega_U} Q(U,\xi); \\ &B: \max_{\xi\in\Omega_\xi} \omega(U,\xi), \end{aligned} \tag{6}$$

де Ω_U, Ω_ξ — області допустимих стратегій U і ξ відповідно.

Припустимо, що жодна зі сторін не інформована про вибір, який зробила інша сторона. У цьому випадку можна застосувати принцип гарантованого результату. Оперуюча сторона ефективність стратегії U оцінює відповідно до показника ефективності $Q_r(U) = \inf_{U\in\Omega_U} Q(U,\xi)$, а сторона В свою стратегію оцінює за формулою $\omega_r(\xi) = \inf_{\xi\in\Omega_\xi} \omega(U,\xi)$.

Оперуюча сторона зробила деякий вибір $U = U_B$ за довільних умов (тобто за довільного вибору $(\xi_1,...,\xi_n) \in \Omega_\xi$ сторони В) і при цьому гарантує, що значення власного показника ефективності буде не менше, ніж $Q_r(U_B)$. Аналогічно також і сторона В, яка прийняла стратегію $\xi = \xi_B$, гарантована, що в разі довільного вибору сторони А $U \in \Omega_U$, показник ефективності буде мати значення, не менше ніж $\omega_r(\xi_B)$. У разі такого вибору відсутній будь-який ризик: як би не діяла будь-яка зі сторін, для кожної із них показник ефективності вибраної стратегії не впаде нижче, ніж його гарантоване значення. Таке рішення є надто песимістичним. Викладену методику прийняття рішення можна ілюструвати наступним прикладом: маємо такі показники ефективності в деякій операції:

$$\begin{aligned} &Q(U,\xi) = u(3\xi^2 - u^2); \\ &\omega(U,\xi) = u^2 + u\xi - \xi^2; \\ &u \geq 0;\ \ \xi \in [1,5]. \end{aligned} \tag{7}$$

Знайдемо гарантовані показники ефективності сторін. Для цього побудуємо графіки функцій $Q(U,\xi)$ і $\omega(U,\xi)$ залежно від аргументів U і ξ відповідно, за фіксованого значення ξ у першому випадку (рис. 2, *а*) та U — у другому (рис. 2, *б*).

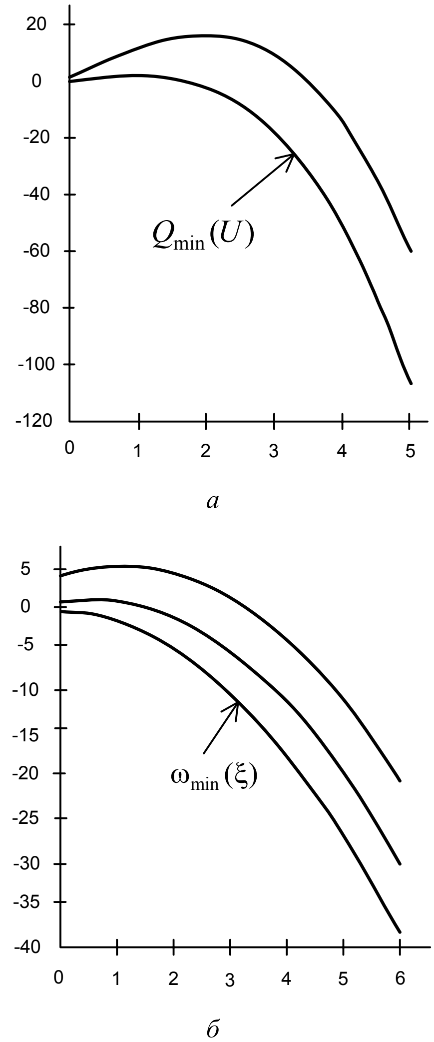

Рис. 2. Гарантовані показники ефективності сторін

Порівняння графіків на рис. 2, *а* показує, що $\inf_{\xi\in[1,5]} Q(U,\xi)$ досягається при $\xi = 1$, тобто

$$Q_r(U) = \inf_{\xi\in[1,5]} Q(U,\xi) = u(3\xi^2 - u^2)\big|_{\xi=1} = u(3-u^2);$$

$$u \geq 0.$$

Аналогічно з рис. 2, *б*:
$\omega_r(\xi) = \inf_{u\geq 0} \omega(U,\xi) = u^2 - u\xi - \xi^2 \big|_{u=0} = -\xi^2;\ \ \xi \in \overline{1,5}$.

Припустимо, що оперуючи сторона вибирає найкращу гарантовану стратегію u^* із умови: $\frac{\partial Q_r(U)}{\partial U} = 0$, що дає $u^* = 1$. При цьому гарантована ефективність цієї стратегії буде $Q_r(U)\big|_{u=u^*} = 2$.

Сторона В вибирає стратегію ξ^*, яка мінімізує її гарантований показник ефективності: $\frac{d\omega_r(\xi)}{d\xi} = -2\xi = 0$, з урахуванням діапазону зміни $\Omega_\xi = [1,5]$ маємо, що $\xi^* = 1$. При цьому $\omega_r(\xi^*) = -1$.

Далі розглянемо випадок, коли сторони відходять від гарантованих стратегій і допускають ризиковані рішення. Припустимо, що сторона *А* вибирає свою стратегію за умови, що сторона *В* реалізує стратегію $\xi_B = 3$. Основою такого припущення може бути і те, що показник ефективності $\omega(U,\xi)$ стратегій сторони *В* зростає зі збільшенням ξ. При цьому показник ефективності стратегій сторони *А* бажано взяти функцію

$$Q_B(U) = Q(U,\xi)\big|_{\xi=\xi_B=3} =$$
$$= u(3\xi^2 - u^2)\big|_{\xi=3} = u(27 - u^2) .$$

Стратегія u^{**}, що максимізує цей показник, дорівнює $u^{**} = 3$. При цьому $Q_B(U)\big|_{u=u^{**}=3} = 54$.

Таким чином, заміна гарантованої стратегії стороною *А* з метою збільшити ефективність операції та орієнтуючись на те, що сторона *В* обере стратегію $\xi_B = 3 \neq \xi^* = 1$, може отримати показник ефективності $Q_B(u^{**}) = 54$. Ризик цього рішення для оперуючої сторони полягає в тому, що при реалізації стороною *В* своєї гарантованої стратегії $\xi = \xi^* = 1$, а не $\xi = \xi_B = 3$, як це допускає сторона *А*, то фактичним показником ефективності стратегії $u^{**} = 3$, буде не $Q_B(u^{**}) = 54$, а значно менша величина:

$$Q(u,\xi)\Bigg|_{\substack{\xi=\xi^*=1 \\ u=u^{**}=3}} = u(3\xi^2 - u^2)\Bigg|_{\substack{\xi=1 \\ u=3}} = -18 .$$

Аналогічно можна показати, що і сторона *В*, змінюючи свою гарантовану стратегію, ризикує не збільшити, а зменшити ефективність операції, яку вона проводить, та якщо сторона *А* скористається стратегією, яка не збігається з тією, що запропонувала сторона *В*. При цьому необхідно мати на увазі те, що право вибору стратегії належить особі, яка приймає рішення. В цих умовах завдання дослідника операції полягає не тільки в розробленні рекомендацій для особи, яка приймає рішення (ОПР), але й у визначенні ступеня ризику, який супроводжує можливі рішення.

Таким чином, гарантована оцінка $Q_r(U,\xi)$ стратегії U визначається не тільки виглядом початкового значення показника ефективності $Q(U,\xi)$, але й положенням, конфігурацією та розмірами області Ω_ξ, яка характеризує можливі значення складових $\xi_1,...,\xi_n$ невизначеного фактора ξ. Але зменшення області Ω_ξ незалежно від суті невизначеного фактора ξ не зменшує (тобто залишає незмінним або збільшує) показник ефективності $Q_r(U,\xi)$ обраної стратегії U. Додаткові відомості про невизначений фактор, які враховує оперуюча сторона під час вибору рішення, не погіршують (не змінюють або збільшують) ефективність досліджуваної операції.

2. Сторони, що беруть участь в операціях, порізному інформовані відносно мети кожної сторони, вибраних стратегій і т.п.

У момент вибору стратегії U оперуюча сторона А точно знає, якої стратегії $\xi = \xi_B$ дотримується сторона *В* (є повна та достовірна інформація про дії сторони *В*). У цьому випадку область Ω_ξ скорочується до однієї єдиної точки $\xi = \xi_B$. При цьому, сторона *А* свою стратегію може визначити з максимізації показника ефективності $Q(U,\xi)\big|_{\xi=\xi_B} = Q(U,\xi_B)$:

$$\max_{U\in\Omega_U} Q(U,\xi_B) \Rightarrow U^* .$$

При цьому отримуємо, що $U^* = U^*(\xi_B)$ і показник ефективності досягає свого максимального значення $Q_{\max} = Q(U,\xi)\Big|_{\xi=\xi_B;U=U^*(\xi_B)}$, причому $Q_{\max} \geq Q_r(U^*)$, де $Q(U^*)$ — гарантоване значення показника ефективності.

Розглянемо конкретний приклад показника ефективності деякої операції:

$$Q(U,\xi) = \frac{u}{\xi}\left(3 - \frac{u^2}{\xi^2}\right);\ \ u \geq 0;\ \ \xi \in [1,5]. \qquad (8)$$

Спочатку знайдемо значення гарантованого показника ефективності оперуючої сторони *А*: $Q_r(U) = \inf_{\xi\in\Omega_\xi} Q(U,\xi)$.

Для цього побудуємо графіки залежно від величини U за фіксованих значень ξ.

Аналізуючи графіки рис. 3, бачимо, що

$$Q_r(U) = \begin{cases} Q(U,\xi)\big|_{\xi=5}, & 0 \le u \le u_0, \\ Q(U,\xi)\big|_{\xi=1}, & u \ge u_0, \end{cases} = \tag{9}$$

$$= \begin{cases} \frac{u}{5}\left(3 - \frac{u^2}{25}\right), & 0 \le u \le u_0, \\ u(3-u^2), & u \ge u_0, \end{cases}$$

де величина u_0 визначається із умови:

$$\frac{u_0}{5}\left(3 - \frac{u_0^2}{25}\right) = u_0\left(3 - u_0^2\right).$$

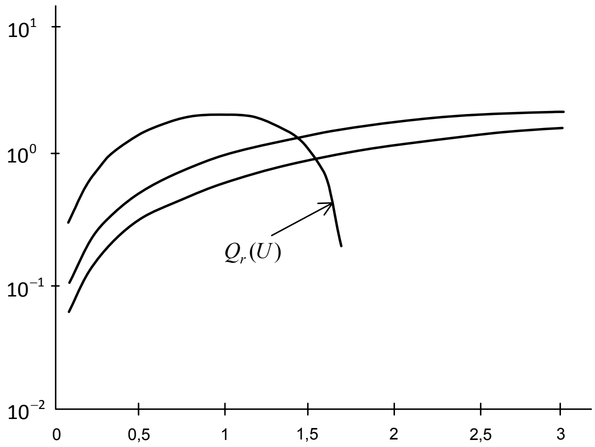

Рис. 3. $\xi \in [1,5]$ $Q_r(U)$

Із останнього рівняння знаходимо, що $u_0 = 5\sqrt{\frac{3}{31}} \approx 1{,}5$. При цьому $Q_r(u)\big|_{u=u_0} \approx 1$.

Припустимо, що сторона *B* вибрала стратегію $1 \le \xi_B \le 5$ і цей вибір точно відомий оперуючій стороні. Для вибраного значення $\xi = \xi_B$ показник ефективності стає функцією тільки однієї змінної:

$$Q(U,\xi)\big|_{\xi=\xi_B} = Q(U,\xi_B) = \frac{u}{\xi_B}\left(3 - \frac{u^2}{\xi_B^2}\right). \tag{10}$$

При цьому сторона *A* має можливість визначити свою стратегію u^* із умови:

$$\left.\frac{dQ(u,\xi_B)}{du}\right|_{u=u^*} = 0.$$

Обчислення дають результат $u^* = \xi_B$. Тоді маємо $Q_{\max} = Q(u,\xi)\big|_{u=u^*;\xi=\xi_B} = 2$ при довільному значенні ξ_B. Як видно, у цьому випадку $Q_{\max} = 2 > Q_r(u)$ для довільних стратегій $u \ge 0$.

У цьому випадку знання стратегії сторони *B* (тобто відсутність невизначеності) дозволило збільшити ефективність стратегій, які вибирає стороною А порівняно з довільною іншою, яка вибирається за гарантованим показником ефективності. Вище були розглянуті самі прості ситуації. Зокрема, допускалось, що число сторін, які беруть участь в операції та прагнуть досягти різних цілей, дорівнює двом. При цьому кожна зі сторін або повністю знає, або, навпаки, зовсім не знають про вибір іншої. Отже, інформованість оперуючої сторони може збільшувати успіх її дій за розумного використання інформації, якою вона володіє.

Із цього випливає, що при даному показнику ефективності оцінювання стратегій необхідно проводити у напрямку отримання гарантованого результату при даній інформованості оперуючої сторони про умови проведення операції. Таким чином, при дослідженні операцій для обережності необхідно орієнтуватися на найгірші значення невизначених факторів. Така поведінка є розумною та закономірною. Систематичне та послідовне використання принципу гарантованого результату дозволяє побудувати чітку теорію прийняття рішень в умовах невизначеності. Частковим випадком цієї теорії є звична оптимізація (математичне програмування), яка виходить за відсутності неконтрольованих факторів.

3. Оцінка ефективності при невизначеності мети операції.

Під час дослідження операцій у таких областях, як військова справа, економіка або політика, типовими є ситуації, коли оперуюча сторона не знає точно мети своїх противників, конкурентів та партнерів (союзників), а ті, у свою чергу, не інформовані про ціль оперуючої сторони. Невідповідність реальності тих уявлень, які мають сторони, що беруть участь у операції, — це додаткова трудність при формуванні гіпотез про можливі стратегії, без яких (гіпотез) неможливо прийняти більш або менш обгрунтовані рішення. Для побудови гіпотез про поведінку всіх сторін необхідно формулювати і гіпотези про їх інформованість. Раніше зазначалось, що невизначеність цілі, яка проявляється, як правило, у наявності декілька часткових показників ефективності $Q_i(U,\xi)$, $i \in \overline{1,k}$, може бути ліквідована шляхом введення в математичну модель операції спеціальних неконтрольованих факторів. Так, при підсумовуванні часткових показників до таких факторів необхідно віднести вагові співмножники, якщо у деякому способі згортання часткових показників такі фактори у явному вигляді і не фігурують, то це не означає їх фактичну відсутність. Сама можливість застосування того або іншого способу згортання часткових показників характеризує наявність невизначеності: замість одного згортання оперуюча сторона зазвичай може вибрати і довільний інший із сукупності їй відомих способів. Може скластися уява, що введені таким чином невизначені фактори мають суттєво специфічний характер, який полягає у тому, що оперуюча сторона, керуючись тим або іншим розумінням суті досліджуваної операції, самостійно може обирати спосіб згортання векторного показника. Таким чином, виникає питання про можливість використання неконтрольованих факторів, які відображають невизначеність цілі операції, у якості керованих змінних, що дозволяє включати їх до числа обраних оперуючою стороною стратегій. Але невизначеність показника ефективності неможливо ліквідувати намаганням його збільшення, тобто досягнення цілі операції.

Висновок

Таким чином, у разі невизначеності цілі операції показник ефективності (точніше, функцію корисності) можна подати в такому вигляді: $Q = Q(U, \xi, \vec{a})$, де $\vec{a}$ — вектор невизначених факторів, які вводяться при згортанні часткових показників; U — вектор стратегій; ξ — вектор початкових значень неконтрольованих факторів, які входять до часткових показників.

На основі принципу гарантованого результату ефективність вибраної стратегії оцінюють величиною:

$$Q_r = \inf_{\vec{a}\in\Omega_a} \inf_{\xi\in\Omega_\xi} Q_B(\xi, \vec{a}) .$$

ЛІТЕРАТУРА

1. *Перегудов Ф. И.* Введение в системный анализ: учеб. пособие для вузов / Ф. И. Перегудов. — М. : Высш. шк., 1989. — 367 с.

2. *Словарь* по кибернетике: Св. 2000 ст. / под ред. В. С. Михалевича. — 2-е изд. — К. : Гл. ред. УСЭ им. М. П. Бажана, 1989. — 751 с.

3. *Гермейер Ю. Б.* Введение в теорию исследования операцій / Ю. Б. Гермейер. — М. : Наука, 1971. — 384 с.

4. *Трухаев Р. И.* Модели принятия решений в условиях неопределенности / Р. И. Трухаев. — М. : Наука, 1981. — 258 с.

Стаття надійшла до редакції 27.02.2015