УДК 621.314

В.В. Голубев, к.т.н.,
Институт электродинамики
НАН Украины, г. Киев

РЕАКЦИЯ ЦЕПЕЙ НАГРУЗКИ НА ВОЗДЕЙСТВИЕ ПЕРИОДИЧЕСКОГО КУСОЧНО-СИНУСОИДАЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Предлагается вывод операторным методом обобщенных аналитических выражений для описания переходных и квазиустановившихся процессов в цепях многоэлементных двухполюсников первого порядка в результате воздействия на них периодического многоступенчатого выходного напряжения широтно-импульсного регулятора переменного тока.

Запропоновано вивід операторним методом узагальнених аналітичных виразів для опису перехідних та усталених процесів в колах багатоелементних двополюсників першого порядку в результаті впливу на них періодичної багатоступеневої вихідної напруги широтно-імпульсного регулятора змінного струму.

The derivation by a operational method of the generalized analytical expressions for the description of transitive and static processes in multielement two-terminal circuits of the first order is offered as a result of influence on them of a periodic multistage output voltage of a pulse-width regulator of an alternating current.

Анализ электромагнитных процессов в преобразователях переменного напряжения и их энергетические показатели во многом зависят от реакции (токов в ветвях и напряжений в узлах) разветвленной цепи нагрузки преобразователя на воздействие его выходного периодического кусочно-синусоидального напряжения в переходных и квазиустановившихся режимах.

С этим связаны исследования методами мгновенных значений, например, кусочно-припасовочным [1, 4], матрично-припасовочным [3] и др. Кусочно-припасовочный метод не позволяет анализировать процессы в схемах второго и боле высокого порядков, а матрично-припасовочный – имеет дело с начальными условиями в матричном виде, при котором теряется наглядность и затрудняется возможность анализа.

Предлагаются методика получения операторным методом выражений и сами обобщенные аналитические выражения, описывающие электромагнитные процессы в многоэлементных двухполюсниках первого и более высокого порядков на примере двухполюсников первого порядка.

Общие замечания

Преобразователь как источник импульсно-модулированного напряжения представлен четырехполюсником с переменной во времени структурой и фиксированным на каждом i-м интервале неизменной структуры коэффициентом передачи по напряжению $K_i=u_{2i}/u_{1i}$. Алгоритм работы каждого i-го ключевого элемента определяется частотой Ω_i, фазой α_i (время включения ключа) регулирования и суммарным за период углом β_i (длительность включенного состояния ключа) регулирования i-й ступени. На периоде напряжения сети формируются k циклически повторяющихся интервалов, содержащих q ступеней регулирования, различающихся по длительности и/или амплитуде синусной огибающей. Суммарный за период угол регулирования одной (например, i-й) или нескольких ступеней равен разности углов включения соответствующих ступеней $\alpha_{i+1}-\alpha_i=\beta_{i,i+1}=\beta_i$, или $\beta_{i,j}=\alpha_j-\alpha_i$, а сумма углов регулирования всех ступеней равна периоду питающей сети $\sum_{i=1}^{q}\beta_i=2\pi$ [4].

На рис. 1 приведены диаграммы: а) многоступенчатого выходного напряжения и в) импульсно-модулированного напряжения i-й ступени регулирования.

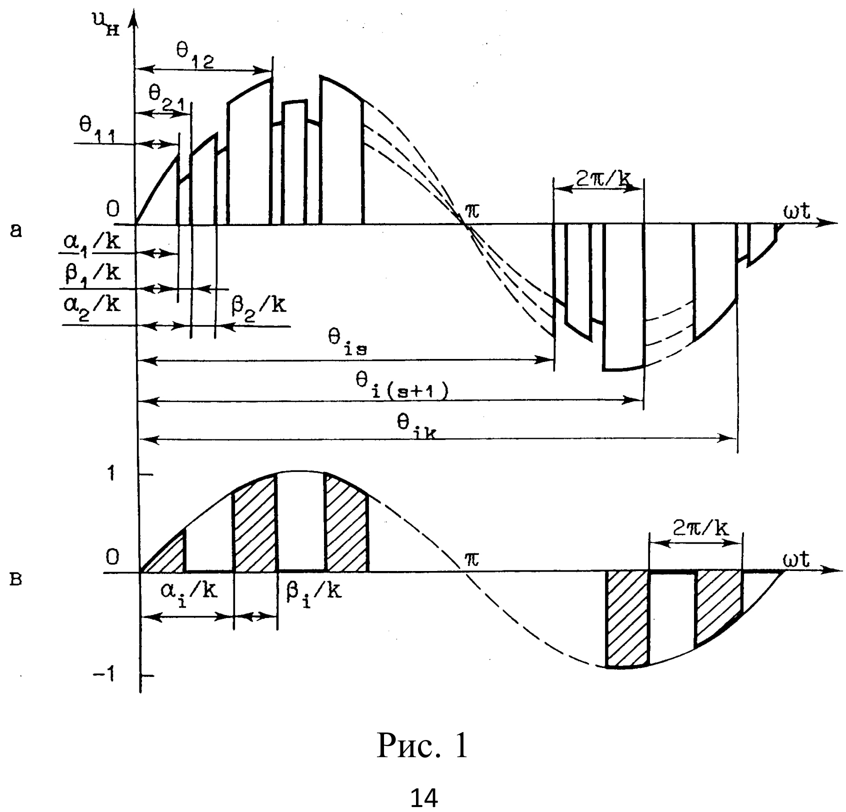


Рис. 1

Квазиустановившаяся реакция цепи нагрузки y_{is}, на импульсное периодическое воздействие на некотором i,s-м интервале неизменной структуры преобразователя равна разности переходной реакции $y_{пер,is}$ с нулевыми начальными условиями и её свободной составляющей $y_{св,is}$ [5]

$$y_{уст,is} = y_{пер,is} - y_{св,is}\,. \tag{1}$$

Найдем составляющие этого равенства.

Переходный режим

Переходная реакция цепи нагрузки на кусочно-синусоидальное напряжение представляет собой реакцию на синусоидальную ЭДС $e(t) = K_i U_m \sin\omega t$, существующую на всём промежутке времени $0 \le \omega t \le \infty$ и совпадающую с импульсной на i-х интервалах, с нулевыми начальными условиями.

Изображение по Лапласу реакции (тока в *j*-й ветви и напряжения на *j*-м элементе) цепей первого и второго порядка на возмущающее периодическое воздействие $E(\omega t)$ любой формы при ненулевых начальных условиях представим в следующем обобщенном виде:

для цепей ***первого порядка*** с индуктивностью или емкостью соответственно

$$\left.\begin{array}{l} Y_{jis}(p) = E(p)H_j(p) + X_1 H'_j(p) = E(p)\dfrac{\mu_{j1}p + \mu_{j0}}{p + 2\delta_j} + X_1\dfrac{\mu'_{j0}}{p + 2\delta_j} \\ \textit{или} \\ Y_{jis}(p) = E(p)H_j(p) + X_2 H''_j(p) = E(p)\dfrac{\mu_{j1}p + \mu_{j0}}{p + 2\delta_j} + X_2\dfrac{\mu''_{j0}}{p + 2\delta_j} \end{array}\right\} \tag{2}$$

и для цепей ***второго порядка***

$$\begin{gathered} Y_{jis} = E(p)H_j(p) + X_1 H'_j(p) + X_2 H''_j(p) = \\ = E(p)\frac{\mu_{j2}p^2 + \mu_{j1}p + \mu_{j0}}{p^2 + 2\delta_j p + \Omega_{j0}^2} + X_1\frac{\mu'_{j1}p + \mu'_{j0}}{p^2 + 2\delta_j p + \Omega_{j0}^2} + X_2\frac{\mu''_{j1}p + \mu''_{j0}}{p^2 + 2\delta_j p + \Omega_{j0}^2}. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $H_j(p), H'_j(p), H''_j(p)$ – операторные передаточные функции, определяемые отношением реакции *j*-й ветви двухполюсника в виде тока или напряжения на возмущающее воздействие на его входе также в виде тока или напряжения в операторной форме.

Начальные условия:

– начальный ток в дросселе $X_1 = I_{is}$ и/или напряжение на конденсаторе $X_2 = U_{is}$ в схеме с разнотипными реактивными элементами на *i,s*–м интервале регулирования;

– начальный ток $X_1 = I'_{is}$ или напряжение $X_1 = U'_{is}$ в первом по счету дросселе или конденсаторе в схеме с однотипными реактивными элементами;

– начальный ток $X_2 = I''_{is}$ или напряжение $X_2 = U''_{is}$ во втором по счету дросселе или конденсаторе в схеме с однотипными реактивными элементами.

Здесь и далее индекс *j* опускаем для упрощения. Коэффициенты $\mu_0, \mu_1, \mu_2,$ δ и Ω_0 передаточных функций токов и напряжений и расчетные схемы двух- и трехэлементных двухполюсников приведены в табл. 1 и табл. 2 в качестве примера.

Таблица 1

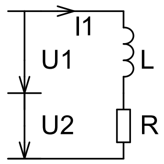
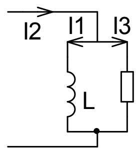
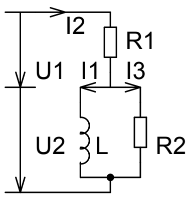
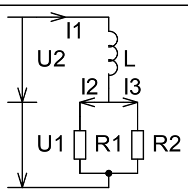
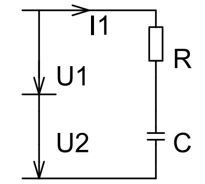
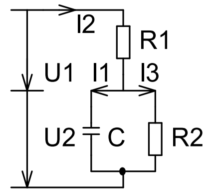
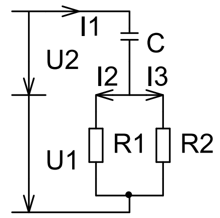
№ п/п	Схема двухполюсника	*y*	μ 1	μ 0	2δ	μ'0
1		i_1	0	$1/L$	R/L	1
		u_1	1	0		$-R$
		u_2	0	R/L		R
2		i_1	0	$1/L$	0	1
		i_2	$1/R$	$1/L$		1
		i_3	$1/R$	0		0
3		i_1	0	R/R_1L	R/L	1
		i_2	R/R_1R_2	R/R_1L		R/R_1
		i_3	R/R_1R_2	0		$-R/R_2$
		u_1	R/R_2	R/L		R
		u_2	R/R_1	0		$-R$
4		i_1	0	$1/L$	R/L	1
		i_2	0	R/R_1L		R/R_1
		i_3	0	R/R_2L		R/R_2
		u_1	0	R/L		R
		u_2	1	0		$-R$

Таблица 2

№ п/п	Схема двухполюсника	y	μ_1	μ_0	2δ	μ''_0
1		i_1	$1/R$	0	$1/RC$	$-1/R$
		u_1	1	0		-1
		u_2	0	$1/RC$		1
2		i_1	$1/R_1$	0	$1/RC$	$-1/R$
		i_2	$1/R_1$	$1/R_1R_2\text{C}$		$-1/R_1$
		i_3	0	$1/R_1R_2\text{C}$		$1/R_2$
		u_1	1	$1/R_2C$		-1
		u_2	0	$1/R_1C$		1
3		i_1	$1/R$	0	$1/RC$	$1/R$
		i_2	$1/R_1$	0		$1/R_1$
		i_3	$1/R_2$	0		$1/R_2$
		u_1	1	0		1
		u_2	0	$1/RC$		-1

Для представления в операторной форме ЭДС питания, воздействующей на двухполюсник, нужно совместить начало is-го импульса с началом переходного процесса и началом координат. Для этого производим две операции. Первая операция состоит в том, что начало координат и, соответственно, начало переходного процесса смещаем вправо относительно нуля синусоиды, описывающей напряжение питания, на угол $\theta_{is} = [2\pi(s-1)+\alpha_i]/k$. Этот угол обозначает координату начала is-го импульса модулированного напряжения с синусной огибающей $i_{is}(t) = K_i U_m \sin(\omega t + \theta_{is})$. В операторной форме кривая этой ЭДС описывается как

$$E_{is}(p) = K_i U_m \frac{p \sin\theta_{is} + \omega\cos\theta_{is}}{p^2 + \omega^2}. \tag{4}$$

Согласно второй операции, воспользовавшись теоремой запаздывания, сдвигаем вправо полученную кривую вместе с началом переходного процесса [2]. В результате чего получаем изображение ЭДС воздействия в виде синусоиды, существующей на интервале времени $\theta_{is} \le \omega t \le \infty \ (\theta_{is} > 0)$ в относительных единицах (о.е.)

$$\overline{E}_{is}(p) = \frac{E_{is}(p)}{U_m} = K_i \frac{p \sin\theta_{is} + \omega\cos\theta_{is}}{p^2 + \omega^2} \exp\left(-\frac{p}{\omega}\theta_{is}\right). \tag{5}$$

Для цепей первого порядка изображение реакции нагрузки (например, с индуктивностью), учитывая вышеизложенное, получим из (2) в виде

$$\overline{Y}_{is}(p) = K_i \frac{(\mu_1 p + \mu_0)(p\sin\theta_{is} + \omega\cos\theta_{is})\exp\left(-\frac{p}{\omega}\theta_{is}\right)}{\left(p^2+\omega^2\right)\left(p+2\delta\right)} + \bar{I}_{is}\frac{\mu'_0 \exp\left(-\frac{p}{\omega}\theta_{is}\right)}{p+2\delta}. \qquad (6)$$

Реакцию цепи нагрузки в переходном режиме в промежутке времени $\theta_{is} \le \omega t \le \theta_{is} + 2\pi \ (\theta_{is} > 0)$ найдем согласно теореме обращения как результат воздействия источника ЭДС в виде суммы вычетов выражения $[\overline{Y}_{is}(p)\exp(pt)]$ в полюсах этой ЭДС (5) и соответствующих передаточных функций

$$\overline{y}_{nep,is}(t) = \sum_p \mathrm{Res}\left[\overline{Y}_{is}(p)\exp(pt)\right] = \sum_{p_1=-2\delta} \mathrm{Res}\,\overline{E}_{is}(p)\,\overline{H}_j(p)\exp(pt) +$$

$$+ \sum_{\substack{p_3=j\omega \\ p_4=-j\omega}} \mathrm{Res}\,\overline{E}_{is}(p)\,\overline{H}_j(p)\exp(pt) + \sum_{p_1=-2\delta} \mathrm{Res}\,X\,\overline{H'}_j(p)\exp(pt) =$$

$$= \mathrm{Res}\left[K_i \frac{(\mu_1 p + \mu_0)(p\sin\theta_{is} + \omega\cos\theta_{is})\exp\left[\frac{p}{\omega}(\omega t - \theta_{is})\right]}{\left(p^2+\omega^2\right)\left(p+2\delta\right)}\right]_{p_1=-2\delta} +$$

$$+ \sum_{\substack{p_2=j\omega \\ p_3=-j\omega}} \mathrm{Res}\left[K_i \frac{(\mu_1 p + \mu_0)(p\sin\theta_{is} + \omega\cos\theta_{is})\exp\left(-\frac{p}{\omega}\theta_{is}\right)\exp(pt)}{\left(p^2+\omega^2\right)\left(p+2\delta\right)}\right] +$$

$$+ \sum_{p_1=-j\omega} \mathrm{Res}\left[\bar{I}_{is}\frac{\mu'_0}{p+2\delta}\exp\left(-\frac{p}{\omega}\theta_{is}\right)\exp(pt)\right]. \qquad (7)$$

Если учесть, что

$$\sum_{\substack{p_3=j\omega \\ p_4=-j\omega}} \mathrm{Res}\left[\overline{E}_{is}(p)\,\overline{H}_j(p)\exp(pt)\right] =$$

$$= \sum_{\substack{p_2=j\omega \\ p_3=-j\omega}} \mathrm{Res}\left[K_i \frac{(\mu_1 p + \mu_0)(p\sin\theta_{is} + \omega\cos\theta_{is})\exp\left(-\frac{p}{\omega}\theta_{is}\right)\exp(pt)}{\left(p^2+\omega^2\right)\left(p+2\delta\right)}\right] = K_i h \sin(\omega t - \xi), \qquad (8)$$

то из (6) получим: для цепи с индуктивностью

$$\boxed{\bar{y}_{nep,is} = K_i h \sin(\omega t - \xi) + \left[K_i \frac{\mu_1 p_1 + \mu_2}{p_1^2 + \omega^2} (p_1 \sin\theta_{is} + \omega\cos\theta_{is}) + \bar{I}_{is}\mu'_0 \right] \exp\left[\frac{p_1}{\omega}(\omega t - \theta_{is})\right]}, \quad (9)$$

и цепи с емкостью

$$\bar{y}_{nep,is} = K_i h \sin(\omega t - \xi) + \left[K_i \frac{\mu_1 p_1 + \mu_0}{p_1^2 + \omega^2} (p_1 \sin\theta_{is} + \omega\cos\theta_{is}) + \bar{U}_{is}\mu''_0 \right] \exp\left[\frac{p_1}{\omega}(\omega t - \theta_{is})\right]. \quad (10)$$

На практике могут быть полезны и другие формы записи, например, (8), для цепи с индуктивностью

$$\boxed{\bar{y}_{nep,is} = K_i h \sin(\omega t - \xi) + \left[K_i \frac{h \sin\xi}{\omega} (p_1 \sin\theta_{is} + \omega\cos\theta_{is}) + \bar{I}_{is}\mu'_0 \right] \exp\left[\frac{p_1}{\omega}(\omega t - \theta_{is})\right]} \quad (11)$$

или

$$\bar{y}_{nep,is} = K_i h \sin(\omega t - \xi) + \left[K_i h \sin(\xi_{is} - \theta_{is}) + K_i \mu_1 \sin\theta_{is} + \bar{I}_{is}\mu'_0\right] \exp\left[-\frac{2\delta}{\omega}(\omega t - \theta_{is})\right]. \quad (12)$$

При выводе полученных выражений были использованы следующие обозначения и формулы:

$h = \sqrt{\mu_2^2\omega^2 + \mu_1^2} \Big/ \sqrt{4\delta^2 + \omega^2}$ – модуль передаточной функции данной, j-й цепи нагрузки;

ξ – угол сдвига фазы составляющей реакции той же цепи нагрузки на основной частоте относительно нуля напряжения сети (начала координат);

$$\cos\xi = (\mu_1\omega^2 - \mu_0 p_1) \Big/ \sqrt{(\mu_1^2\omega^2 + \mu_0^2)(p_1^2 + \omega^2)} = (\mu_1\omega^2 + \mu_0 2\delta) \Big/ \sqrt{(\mu_1^2\omega^2 + \mu_0^2)(4\delta^2 + \omega^2)};$$

$$\sin\xi = (\mu_1\omega p_1 + \mu_0\omega) \Big/ \sqrt{(\mu_2^2\omega^2 + \mu_1^2)(p_1^2 + \omega^2)} = (-\mu_1\omega 2\delta + \mu_0\omega) \Big/ \sqrt{(\mu_1^2\omega^2 + \mu_0^2)(4\delta^2 + \omega^2)}.$$

На основании (7) и аналогичных выкладок для цепей второго порядка можно записать формулу для переходной составляющей с нулевыми начальными условиями ***для реакции цепей любого порядка***

$$\bar{y}_{nep,is}(\omega t) = \sum_{p_k} \mathrm{Res}\left\{ K_i \frac{H(p)\exp\left[\frac{p}{\omega}(\omega t - \theta_{is})\right](p\sin\theta_{is} + \omega\cos\theta_{is})}{(p^2 + \omega^2)} \right\} +$$

$$+ \sum_{\substack{p_3 = j\omega \\ p_4 = -j\omega}} \mathrm{Res}\left\{ K_i \frac{H(p)\exp\left[\frac{p}{\omega}(\omega t - \theta_{is})\right](p\sin\theta_{is} + \omega\cos\theta_{is})}{(p^2 + \omega^2)} \right\}. \quad (13)$$

Свободная составляющая

Свободная составляющая реакции цепи нагрузки на всем промежутке времени $0 \le \omega t \le \infty$ определяется [2] суммой вычетов произведения изображений импульсной ЭДС воздействия $E_{is}(p)$ (см. рис. 1б) на интервале $0 \le \omega t \le \infty$ и передаточной функции $H(p)$, умноженного на e^{pt}, относительно полюсов передаточной функции:

$$y_{св,i}(t) = \sum_{p_1, p_2} \mathrm{Res}\left[E_{is}(p) H(p) e^{pt}\right]. \tag{14}$$

Изображение импульсной ЭДС воздействия на интервале $0 \le \omega t \le \infty$ определяется по формуле [2]

$$E_{is}(p) = \frac{E_{isT}(p)}{1 - e^{-p/T}}. \tag{15}$$

В свою очередь изображение этой ЭДС на периоде повторяемости, в данном случае на периоде сетевого напряжения $0 \le \omega t \le 2\pi$, или, что равнозначно, $\theta_{i,s} \le \omega t \le \theta_{i,(s+x)}$ определим путем прямого преобразования Лапласа в виде суммы k интегралов по количеству импульсов на периоде модулированного напряжения, формирующего i-ю ступень регулирования. Для этого введем координату начала текущего импульса $\theta_{i,(s+x)} = [2\pi(s-1) + 2\pi(x-1) + \alpha_i]/k$, где параметр суммирования $x = 1, 2, ..k$. Тогда изображение двухступенчатой импульсной ЭДС воздействия на is-х интервалах с учетом (15) получим по формуле

$$\overline{E}_{is}(p) = \frac{E_{isT}(p)}{U_m\left[1 - \exp\left(-\frac{p}{\omega} 2\pi\right)\right]} =$$

$$= \frac{1}{\left[1 - \exp\left(-\frac{p}{\omega} 2\pi\right)\right]} \sum_{x=1}^{k} \left[\int\limits_{\theta_{i,s+x}}^{\theta_{i,(s+x)} + \beta_i/k} K_i \sin \omega t \exp(-pt) dt + \int\limits_{\theta_{i,(s+x)} + \beta_i/k}^{\theta_{i,(s+x)} + \frac{2\pi}{k}} K_{i+1} \sin \omega t \exp(-pt) dt \right]. \tag{16}$$

После преобразований и суммирования полиномов получим двухступенчатую ЭДС воздействия в операторной форме

$$\overline{E}_{is}(p)=\frac{\exp\left(-\frac{p}{\omega}\theta_{is}\right)}{2\left[\operatorname{ch}\left(\frac{p}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right)-\cos\frac{2\pi}{k}\right]\left(p^{2}+\omega^{2}\right)}\times$$

$$\times\left\{\begin{array}{c}\left(K_{i+1}-K_{i}\right)\left[p\sin\left(\theta_{is}+\frac{\beta_{i}}{k}\right)+\omega\cos\left(\theta_{is}+\frac{\beta_{i}}{k}\right)\right]\exp\left(\frac{p}{\omega}\frac{2\pi-\beta_{i}}{k}\right)-\\-\left(K_{i+1}-K_{i}\right)\left[p\sin\left(\theta_{is}-\frac{2\pi-\beta_{i}}{k}\right)+\omega\cos\left(\theta_{is}-\frac{2\pi-\beta_{i}}{k}\right)\right]\exp\left(-\frac{p}{\omega}\frac{\beta_{i}}{k}\right)+\\K_{i}\left[p\sin\theta_{is}+\omega\cos\theta_{is}\right]\exp\left(\frac{p}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right)-K_{i}\left[p\sin\left(\theta_{is}-\frac{2\pi}{k}\right)+\omega\cos\left(\theta_{is}-\frac{2\pi}{k}\right)\right]-\\-K_{i+1}\left[p\sin\left(\theta_{is}+\frac{2\pi}{k}\right)+\omega\cos\left(\theta_{is}+\frac{2\pi}{k}\right)\right]+K_{i+1}\left[p\sin\theta_{is}+\omega\cos\theta_{is}\right]\exp\left(-\frac{p}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right)\end{array}\right\}. \quad (17)$$

Отсюда получим свободную составляющую реакции цепи ***произвольного порядка*** на воздействие двухступенчатой импульсной ЭДС сети в виде суммы вычетов относительно полюсов передаточной функции *H(p)* на стадии перехода во временную область по формуле

$$\bar{y}_{св.is}(t)=\sum_{p_k}\operatorname{Res}\left|\frac{H(p)\exp\left(-\frac{p}{\omega}\theta_{is}\right)\exp(pt)}{2\left[\operatorname{ch}\left(\frac{p}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right)-\cos\frac{2\pi}{k}\right]\left(p^{2}+\omega^{2}\right)}\times\right.$$

$$\times\left\{\left(K_{i+1}-K_{i}\right)\left[p\sin\left(\theta_{is}+\frac{\beta_{i}}{k}\right)+\omega\cos\left(\theta_{is}+\frac{\beta_{i}}{k}\right)\right]\exp\left(\frac{p}{\omega}\frac{2\pi-\beta_{i}}{k}\right)-\right.$$

$$-\left(K_{i+1}-K_{i}\right)\left[p\sin\left(\theta_{is}-\frac{2\pi-\beta_{i}}{k}\right)+\omega\cos\left(\theta_{is}-\frac{2\pi-\beta_{i}}{k}\right)\right]\exp\left(-\frac{p}{\omega}\frac{\beta_{i}}{k}\right)-$$

$$-K_{i+1}\left[p\sin\left(\theta_{is}+\frac{2\pi}{k}\right)+\omega\cos\left(\theta_{is}+\frac{2\pi}{k}\right)\right]+K_{i+1}\left[p\sin\theta_{is}+\omega\cos\theta_{is}\right]\exp\left(-\frac{p}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right)+$$

$$\left.\left.+K_{i}\left[p\sin\theta_{is}+\omega\cos\theta_{is}\right]\exp\left(\frac{p}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right)-K_{i}\left[p\sin\left(\theta_{is}-\frac{2\pi}{k}\right)+\omega\cos\left(\theta_{is}-\frac{2\pi}{k}\right)\right]\right\}\right|. \quad (18)$$

Квазиустановившийся режим

Подставляя (13) и (18) в (1)

$$
\begin{aligned}
&\bar{y}_{уст,is}(\omega t)=\sum_{\substack{p_3=j\omega\\ p_4=-j\omega}}\operatorname{Res}\left\{K_i\frac{H(p)\left(p\sin\theta_{is}+\omega\cos\theta_{is}\right)\exp\left(-\frac{p}{\omega}\theta_{is}\right)\exp(pt)}{\left(p^2+\omega^2\right)}\right\}+\\
&+\sum_{p_k}\operatorname{Res}\left\{\frac{H(p)\exp\left(-\frac{p}{\omega}\theta_{is}\right)\exp(pt)}{2\left[\operatorname{ch}\left(\frac{p}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right)-\cos\frac{2\pi}{k}\right]\left(p^2+\omega^2\right)}K_i\left[\begin{aligned}&\left(p\sin\theta_{is}+\omega\cos\theta_{is}\right)\exp\left(\frac{p}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right)+\\&+\left(p\sin\theta_{is}+\omega\cos\theta_{is}\right)\exp\left(-\frac{p}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right)-\\&-p\sin\left(\theta_{is}-\frac{2\pi}{k}\right)-\omega\cos\left(\theta_{is}-\frac{2\pi}{k}\right)-\\&-p\sin\left(\theta_{is}+\frac{2\pi}{k}\right)-\omega\cos\left(\theta_{is}+\frac{2\pi}{k}\right)\end{aligned}\right]\right\}-\\
&-\sum_{p_k}\operatorname{Res}\left|\begin{aligned}&\frac{H(p)\exp\left(-\frac{p}{\omega}\theta_{is}\right)\exp(pt)}{2\left[\operatorname{ch}\left(\frac{p}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right)-\cos\frac{2\pi}{k}\right]\left(p^2+\omega^2\right)}\times\\
&\times\left\{\begin{aligned}&\left(K_{i+1}-K_i\right)\left[p\sin\left(\theta_{is}+\frac{\beta_i}{k}\right)+\omega\cos\left(\theta_{is}+\frac{\beta_i}{k}\right)\right]\exp\left(\frac{p}{\omega}\frac{2\pi-\beta_i}{k}\right)-\\
&-\left(K_{i+1}-K_i\right)\left[p\sin\left(\theta_{is}-\frac{2\pi-\beta_i}{k}\right)+\omega\cos\left(\theta_{is}-\frac{2\pi-\beta_i}{k}\right)\right]\exp\left(-\frac{p}{\omega}\frac{\beta_i}{k}\right)+\\
&+K_i\left[p\sin\theta_{is}+\omega\cos\theta_{is}\right]\exp\left(\frac{p}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right)-K_i\left[p\sin\left(\theta_{is}-\frac{2\pi}{k}\right)+\omega\cos\left(\theta_{is}-\frac{2\pi}{k}\right)\right]-\\
&-K_{i+1}\left[p\sin\left(\theta_{is}+\frac{2\pi}{k}\right)+\omega\cos\left(\theta_{is}+\frac{2\pi}{k}\right)\right]+K_{i+1}\left[p\sin\theta_{is}+\omega\cos\theta_{is}\right]\exp\left(-\frac{p}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right)\end{aligned}\right\}\end{aligned}\right|
\end{aligned}
$$

найдем обобщенную формулу квазиустановившегося значения реакции цепи ***первого, второго и более высокого порядков*** при двухступенчатом регулировании в виде суммы вычетов

$$
\begin{gathered}
\bar{y}_{\text{уст},is}(\omega t) = K_i h \sin\left(\omega t - \xi\right) + \\
+\sum_{p_k} \operatorname{Res}\left[
\begin{array}{c}
\dfrac{H(p)\exp\left[\dfrac{p}{\omega}\left(\omega t_{is}-\theta_{is}\right)\right]}{2\left[\operatorname{ch}\left(\dfrac{p}{\omega}\dfrac{2\pi}{k}\right)-\cos\dfrac{2\pi}{k}\right]\left(p^2+\omega^2\right)}\times \\
\times\left[
\begin{array}{l}
\left(K_i-K_{i+1}\right)\left[
\begin{array}{c}
\left[p\sin\left(\theta_{is}+\dfrac{\beta_i}{k}\right)+\omega\cos\left(\theta_{is}+\dfrac{\beta_i}{k}\right)\right]\exp\left(\dfrac{p}{\omega}\dfrac{2\pi-\beta_i}{k}\right)- \\
-\left[p\sin\left(\theta_{is}-\dfrac{2\pi-\beta_i}{k}\right)+\omega\cos\left(\theta_{is}-\dfrac{2\pi-\beta_i}{k}\right)\right]\exp\left(-\dfrac{p}{\omega}\dfrac{\beta_i}{k}\right)
\end{array}
\right]+ \\
+\left(K_{i+1}-K_i\right)\left[
\begin{array}{c}
p\sin\left(\theta_{is}+\dfrac{2\pi}{k}\right)+\omega\cos\left(\theta_{is}+\dfrac{2\pi}{k}\right)- \\
-\left(p\sin\theta_{is}+\omega\cos\theta_{is}\right)\exp\left(-\dfrac{p}{\omega}\dfrac{2\pi}{k}\right)
\end{array}
\right]
\end{array}
\right]
\end{array}
\right]
\end{gathered}
\tag{19}
$$

То же самое для трехступенчатого регулирования имеет вид

$$
\begin{gathered}
\bar{y}_{\text{уст},is}(\omega t) = K_i h \sin\left(\omega t_{is} - \xi\right) + \\
+\sum_{p_k} \operatorname{Res}\left[
\begin{array}{c}
\dfrac{H(p)\exp\left[\dfrac{p}{\omega}\left(\omega t_{is}-\theta_{is}\right)\right]}{2\left[\operatorname{ch}\left(\dfrac{p}{\omega}\dfrac{2\pi}{k}\right)-\cos\dfrac{2\pi}{k}\right]\left(p^2+\omega^2\right)}\times \\
\times\left\{
\begin{array}{l}
\left(K_i-K_{i+1}\right)\left[
\begin{array}{c}
\left[p\sin\left(\theta_{is}+\dfrac{\beta_i}{k}\right)+\omega\cos\left(\theta_{is}+\dfrac{\beta_i}{k}\right)\right]\exp\left(\dfrac{p}{\omega}\dfrac{2\pi-\beta_i}{k}\right)- \\
-\left[p\sin\left(\theta_{is}-\dfrac{2\pi-\beta_i}{k}\right)+\omega\cos\left(\theta_{is}-\dfrac{2\pi-\beta_i}{k}\right)\right]\exp\left(-\dfrac{p}{\omega}\dfrac{\beta_i}{k}\right)
\end{array}
\right]+ \\
+\left(K_{i+1}-K_{i+2}\right)\left[
\begin{array}{c}
\left[
\begin{array}{c}
p\sin\left(\theta_{is}+\dfrac{\beta_i+\beta_{i+1}}{k}\right)+ \\
+\omega\cos\left(\theta_{is}+\dfrac{\beta_i+\beta_{i+1}}{k}\right)
\end{array}
\right]\exp\left(\dfrac{p}{\omega}\dfrac{2\pi-\beta_i-\beta_{i+1}}{k}\right)- \\
-\left[
\begin{array}{c}
p\sin\left(\theta_{is}-\dfrac{2\pi-\beta_i-\beta_{i+1}}{k}\right)+ \\
+\omega\cos\left(\theta_{is}-\dfrac{2\pi-\beta_i-\beta_{i+1}}{k}\right)
\end{array}
\right]\exp\left(-\dfrac{p}{\omega}\dfrac{\beta_i+\beta_{i+1}}{k}\right)
\end{array}
\right]+ \\
+\left(K_{i+2}-K_i\right)\left[
\begin{array}{c}
\left[p\sin\left(\theta_{is}+\dfrac{2\pi}{k}\right)+\omega\cos\left(\theta_{is}+\dfrac{2\pi}{k}\right)\right]- \\
-\left(p\sin\theta_{is}+\omega\cos\theta_{is}\right)\exp\left(-\dfrac{p}{\omega}\dfrac{2\pi}{k}\right)
\end{array}
\right]
\end{array}
\right\}
\end{array}
\right]
\end{gathered}
$$

Продолжая этот ряд, можно записать установившуюся реакцию для любого целого числа q ступеней

$$\bar{y}_{уст,is}(\omega t) = K_i h \sin(\omega t_{is} - \xi) + \sum_{p_k} \mathrm{Res}\left[\frac{H(p)\exp\left[\frac{p}{\omega}(\omega t_{is}-\theta_{is})\right]}{2\left[\mathrm{ch}\left(\frac{p}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right)-\cos\frac{2\pi}{k}\right](p^2+\omega^2)} \times \sum_{n=1}^{q}(K_{i+n-1}-K_{i+n}) \left[\left[\begin{array}{l} p\sin\left(\theta_{is}+\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{i+j-1}\right)+ \\ +\omega\cos\left(\theta_{is}+\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{i+j-1}\right) \end{array} \right]\exp\left[\frac{p}{\omega}\left(\frac{2\pi}{k}-\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n}\beta_{i+j-1}\right)\right] - \left[\begin{array}{l} p\sin\left(\theta_{is}-\frac{2\pi}{k}+\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{i+j-1}\right)+ \\ +\omega\cos\left(\theta_{is}-\frac{2\pi}{k}+\frac{1}{k}\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{i+j-1}\right) \end{array} \right]\exp\left(-\frac{p}{\omega}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n}\beta_{i+j-1}\right) \right] \right]. \quad (20)$$

Пользуясь этой формулой в случаях многоступенчатого регулирования следует иметь в виду равенство $i+q=i$, вытекающее из цикличности процесса.

Для цепей первого порядка квазиустановившуюся реакцию на s-м интервале i-й ступени (на is-м интервале) двухступенчатого регулятора получим из (19) подстановкой значения полюса $p=p_1=-2\delta$

$$\bar{y}_{уст,is}(\omega t) = K_i h \sin(\omega t - \xi) + \frac{(\mu_1 - 2\delta\,\mu_2)\exp\left[-\frac{2\delta}{\omega}(\omega\, t_{is}-\theta_{is})\right]}{2\left[\mathrm{ch}\left(\frac{2\delta}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right)-\cos\frac{2\pi}{k}\right](4\delta^2+\omega^2)} \times$$

$$\times\left[\begin{array}{l} (K_i - K_{i+1})\left[\begin{array}{l} +\left[2\delta\sin\left(\theta_{is}-\frac{2\pi-\beta_i}{k}\right)-\omega\cos\left(\theta_{is}-\frac{2\pi-\beta_i}{k}\right)\right]\exp\left(\frac{2\delta}{\omega}\frac{\beta_i}{k}\right) \\ -\left[2\delta\sin\left(\theta_{is}+\frac{\beta_i}{k}\right)-\omega\cos\left(\theta_{is}+\frac{\beta_i}{k}\right)\right]\exp\left(-\frac{2\delta}{\omega}\frac{2\pi-\beta_i}{k}\right)+ \end{array} \right]- \\ -(K_{i+1}-K_i)\left[2\delta\sin\left(\theta_{is}+\frac{2\pi}{k}\right)-\omega\cos\left(\theta_{is}+\frac{2\pi}{k}\right)+(2\delta\sin\theta_{is}-\omega\cos\theta_{is})\exp\left(\frac{2\delta}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right)\right] \end{array} \right]. \quad (21)$$

Это выражение действительно только на интервале $\theta_{is} < \omega\, t_{is} < \theta_{i+1,s} = \theta_{is} + \beta_i$.

Учтя равенства $\frac{\mu_2 p_1 + \mu_1}{\omega^2 + p_1^2} = \frac{h\sin\xi}{\omega}$ и $\frac{h\sin\xi}{\omega}\left(p_1 \sin\vartheta + \omega\cos\vartheta\right) =$ $= h\sin(\xi - \vartheta) + \mu_2 \sin\vartheta$, из (21) получим

$$\bar{y}_{уст,is} = K_i h \sin(\omega t - \xi) + \frac{\exp\left[-\frac{2\delta}{\omega}(\omega t - \theta_{is})\right]}{2\left[\operatorname{ch}\left(\frac{2\delta}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right) - \cos\frac{2\pi}{k}\right]} \times$$

$$\times \left[\begin{array}{l} (K_i - K_{i+1}) \left[\begin{array}{l} \left[h\sin\left(\xi - \theta_{is} - \frac{\beta_i}{k}\right) + \mu_2 \sin\left(\theta_{is} + \frac{\beta_i}{k}\right)\right] \exp\left(-\frac{2\delta}{\omega}\frac{2\pi - \beta_i}{k}\right) - \\ -\left[h\sin\left(\xi - \theta_{is} + \frac{2\pi - \beta_i}{k}\right) - \mu_2 \sin\left(\theta_{is} - \frac{2\pi - \beta_i}{k}\right)\right] \exp\left(\frac{2\delta}{\omega}\frac{\beta_i}{k}\right) \end{array} \right] + \\ + (K_{i+1} - K_i) \left[\begin{array}{l} + h\sin\left(\xi - \theta_{is} - \frac{2\pi}{k}\right) + \mu_2 \sin\left(\theta_{is} + \frac{2\pi}{k}\right) - \\ - \left[h\sin(\xi - \theta_{is}) + \mu_2 \sin\theta_{is}\right] \exp\left(\frac{2\delta}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right) \end{array} \right] \end{array} \right] \qquad (22)$$

или сокращенно

$$\bar{y}_{уст,is} = K_i h \sin(\omega t - \xi) + f_{is} \exp\left[-\frac{2\delta}{\omega}(\omega t - \theta_{is})\right], \qquad (23)$$

где

$$f_{is} = \frac{K_i - K_{i+1}}{2\left[\operatorname{ch}\left(\frac{2\delta}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right) - \cos\frac{2\pi}{k}\right]} \times$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} h \left[\begin{array}{c} \sin\left(\xi - \theta_{is} - \frac{\beta_i}{k}\right) \exp\left(-\frac{2\delta}{\omega}\frac{2\pi - \beta_i}{k}\right) - \sin\left(\xi - \theta_{is} + \frac{2\pi - \beta_i}{k}\right) \exp\left(\frac{2\delta}{\omega}\frac{\beta_i}{k}\right) + \\ + \sin(\xi - \theta_{is}) \exp\left(\frac{2\delta}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right) - \sin\left(\xi - \theta_{is} - \frac{2\pi}{k}\right) \end{array} \right] + \\ + \mu_2 \left[\begin{array}{c} \sin\left(\theta_{is} + \frac{\beta_i}{k}\right) \exp\left(-\frac{2\delta}{\omega}\frac{2\pi - \beta_i}{k}\right) - \sin\left(\theta_{is} - \frac{2\pi - \beta_i}{k}\right) \exp\left(\frac{2\delta}{\omega}\frac{\beta_i}{k}\right) + \\ + \sin\theta_{is} \exp\left(\frac{2\delta}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right) - \sin\left(\theta_{is} + \frac{2\pi}{k}\right) \end{array} \right] \end{array} \right\}, \qquad (24)$$

f_{is} – начальное значение переходной составляющей квазиустановившейся реакции на *is*-м интервале неизменной структуры одноступенчатого регулятора.

В частном случае, при $\xi = \varphi, h = 1/z$ и $\mu_2 = 0$ (см. сх. 1, табл. 1) формулы (23) и (24) совпадают с результатом, полученным в [1,4] методом двойного припасовывания для выходного тока регулятора с активно-индуктивной нагрузкой, что подтверждает правильность последних.

Для цепей второго порядка мгновенное значение квазиустановившейся реакции получим аналогично цепям первого порядка

$$\bar{y}_{уст,is} = K_i h \sin(\omega t - \xi) + f_{1,is} \exp\left[\frac{p_1}{\omega}(\omega t - \theta_{is})\right] + f_{2,is} \exp\left[\frac{p_2}{\omega}(\omega t - \theta_{is})\right], \tag{25}$$

где

$$f_{1,is} = \frac{(K_i - K_{i+1})(\mu_2 p_1^2 + \mu_1 p_1 + \mu_0)}{2\left[\mathrm{ch}\left(\frac{p_1}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right) - \cos\frac{2\pi}{k}\right](\omega^2 + p_1^2)(p_1 - p_2)} \times$$

$$\times\left\{\left[p_1 \sin\left(\theta_{is} + \frac{\beta_i}{k}\right) + \omega\cos\left(\theta_{is} + \frac{\beta_i}{k}\right)\right]\exp\left(\frac{p_1}{\omega}\frac{2\pi - \beta_i}{k}\right) - \right.$$

$$-\left[p_1 \sin\left(\theta_{is} - \frac{2\pi - \beta_i}{k}\right) + \omega\cos\left(\theta_{is} - \frac{2\pi - \beta_i}{k}\right)\right]\exp\left(-\frac{p_1}{\omega}\frac{\beta_i}{k}\right) +$$

$$\left. + (p_1 \sin\theta_{is} + \omega\cos\theta_{is})\exp\left(-\frac{p_1}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right) - p_1 \sin\left(\theta_{is} + \frac{2\pi}{k}\right) - \omega\cos\left(\theta_{is} + \frac{2\pi}{k}\right)\right\} \tag{26}$$

и

$$f_{2,is} = \frac{(K_i - K_{i+1})(\mu_2 p_2^2 + \mu_1 p_2 + \mu_0)}{2\left[\mathrm{ch}\left(\frac{p_2}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right) - \cos\frac{2\pi}{k}\right](\omega^2 + p_2^2)(p_2 - p_1)} \times$$

$$\times\left\{\left[p_2 \sin\left(\theta_{is} + \frac{\beta_i}{k}\right) + \omega\cos\left(\theta_{is} + \frac{\beta_i}{k}\right)\right]\exp\left(\frac{p_2}{\omega}\frac{2\pi - \beta_i}{k}\right) - \right.$$

$$-\left[p_2 \sin\left(\theta_{is} - \frac{2\pi - \beta_i}{k}\right) + \omega\cos\left(\theta_{is} - \frac{2\pi - \beta_i}{k}\right)\right]\exp\left(-\frac{p_2}{\omega}\frac{\beta_i}{k}\right) +$$

$$\left. + (p_2 \sin\theta_{is} + \omega\cos\theta_{is})\exp\left(-\frac{p_2}{\omega}\frac{2\pi}{k}\right) - p_2 \sin\left(\theta_{is} + \frac{2\pi}{k}\right) - \omega\cos\left(\theta_{is} + \frac{2\pi}{k}\right)\right\}. \tag{27}$$

Выводы

1. Автором получены обобщенные формулы для реакции (токов и напряжений) цепей нагрузки первого и второго (приведены частично) порядка на любое периодическое кусочно-синусоидальное воздействие в переходном и квазиустановившемся режимах, позволяющие находить мгновенные и действующие значения этих реакций и определять энергетические характеристики импульсных преобразователей переменного напряжения.

2. Методика, подробно изложенная здесь, пригодна для исследования цепей второго и более высокого порядка, причем для

получения формул в общем виде не требуется знания корней характеристического уравнения.

Использованные источники информации:

1. Голубев В.В. Определение токов в ветвях широтно-импульсного регулятора переменного напряжения // Техн. электродинамика. – 1982. – №6. – С. 53-59.
2. Конторович М.И. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. – М.: Сов. радио, 1975. – 320 с.
3. Голубев В.В., Петрусенко С.В. Аналитическое описание электромагнитных процессов в импульсных преобразователях переменного напряжения с выходным RLC-фильтром и активной нагрузкой // Силовые полупроводниковые преобразователи и эл.-оборудование для эл.-сберегающих технологий. – Киев: ИЭД АН УССР, 1988. – С. 45-50.
4. Голубев В.В., Липковский К.А. Расчет энергетических характеристик трансформаторно-ключевых преобразователей переменного напряжения //Электричество. – 1985. – №6. – С. 31-37.
5. Теоретические основы электротехники /Под ред. П.А. Ионкина. – М.: Высш. шк., 1975. – 752 с.

Рецензент: д.т.н. Кирик В.В.