

УДК 536.2, 664.1

**Пустовойтенко В.П.**, д.т.н.,  
професор АМУ,  
**Василенко С.М.**, д.т.н.,  
професор УНДІ цукрової  
промисловості,  
**Сегай О.М.**, к.т.н., доцент  
АМУ,  
**Бондар В.І.**, НУХТ, м. Київ

## МОДЕЛЮВАННЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕПЛООБМІНУ В ЦИЛІНДРИЧНИХ СТРУМЕНЯХ РІДИНИ

*Розроблено математичну модель теплоперенесення в циліндричних турбулентних струменях рідини. В основу моделі покладено гіпотезу пригнічення турбулентності біля поверхні поділу рідина–пара поверхневим натягом, що враховується введенням поняття чергованості турбулентності.*

*Разработана математическая модель теплопереноса в цилиндрических турбулентных струях жидкости. В основу положена гипотеза подавления турбулентности возле поверхности раздела фаз жидкость – пар поверхностным натяжением, учитываемая введением понятия перемежаемости турбулентности.*

*The mathematical model of теплопереноса is worked out in the cylindrical turbulent streams of liquid. In basis the hypothesis of suppression of turbulence is fixed near an interphase a liquid is steam by a surface-tension, taken into account by introduction of concept of alternated of turbulence.*

Нині найбільше досліджені з погляду тепломасообміну зсувні течії: в примежових шарах, каналах, слідах тощо. У прикладних аналізах цих течій основним є метод аналогії, що ґрунтується на введенні понять турбулентних аналогів коефіцієнтів перенесення імпульсу й енергії та турбулентного аналога числа Прандтля.

Менше досліджені як теоретично, так і експериментально є струменеві безсувні течії краплинних рідин. Це пов'язано насамперед з тим, що для них зникає сенс коефіцієнта турбулентного перенесення імпульсу, а отже, і методу аналогії. Тобто більшість сучасних моделей турбулентного перенесення стає неприйнятною.

Вивчення виключно процесів теплоперенесення надзвичайно складне завдання як з теоретичного, так і з експериментального дослідження.

Розглянемо локальну вісесиметричну задачу теплоперенесення в циліндричному струмені рідини при конденсації на його поверхні пари. Скористаємося методом полів осередненої швидкості та температури, оскільки моделі цього за умови задовільної адекватності фізичній картині процесу є достатньо простими для використання при практичному інженерному моделюванні.

При стабілізованих профілях швидкості й температури диференціальне рівняння турбулентного перенесення теплоти в циліндричному струмені набуває вигляду

$$v_x \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \varepsilon_q + a \right) \frac{\partial T}{\partial r} \right], \quad (1)$$

де  $v_x$  – повздовжня швидкість рідини, м/с;  $T$  – температура, К (°С);  $r$  – поточний радіус, м;  $\varepsilon_q$  – кінематичний коефіцієнт турбулентного перенесення теплоти, м<sup>2</sup>/с;  $a$  – коефіцієнт температуропровідності, м<sup>2</sup>/с (турбулентна температуропровідність стоїть під знаком похідної, оскільки в загальному випадку вона залежить від  $r$ ).

Для стабілізованої течії при постійній густині теплового потоку можна наближено записати

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \left( \frac{dT_{cp}}{dx} \right).$$

Тоді рівняння (1) перепишемо у вигляді

$$v_x \frac{dT_{cp}}{dx} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( \varepsilon_q + a \right) \frac{\partial T}{\partial r} \right]. \quad (2)$$

Якщо ввести заміну змінної  $y = r_0 - r$ ,  $dy = -dr$ , то можна отримати

$$v_x \frac{dT_{cp}}{dx} = \frac{1}{r_0 - y} \frac{\partial}{\partial y} \left[ (r_0 - y) \left( \varepsilon_q + a \right) \frac{\partial T}{\partial y} \right], \quad (3)$$

де  $r_0$  – радіус струменя, м.

Інтегруємо рівняння (3) за таких граничних умов

$$T = T_i \text{ при } y = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ при } y = r_0. \quad (4)$$

де  $T_i$  – температура рідини біля поверхні поділу *рідина-пара*.

Після першого інтегрування отримаємо

$$(r_0 - y)(\varepsilon_q + a) \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{dT_{cp}}{dx} \int_0^y v_x (r_0 - y) dy + C_1. \quad (5)$$

Оскільки профіль швидкості рідини в струмені близький до плоского, запишемо  $v_x = v_{cp} = \text{const}$ . Тоді

$$(r_0 - y)(\varepsilon_q + a) \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{dT_{cp}}{dx} v_{cp} \left( r_0 y - \frac{y^2}{2} \right) + C_1. \quad (6)$$

Сталу  $C_1$  визначаємо з другої граничної умови

$$C_1 = -\frac{dT_{cp}}{dx} v_{cp} (r_0^2 / 2). \quad (7)$$

Підставляючи вираз (7) в рівняння (6) і розв'язуючи відносно  $\frac{\partial T}{\partial y}$ , отримаємо

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{dT_{cp}}{dx} \frac{v_{cp}}{2} \left( \frac{r_0 - y}{\varepsilon_q + a} \right). \quad (8)$$

Після інтегрування рівняння (8) і перегрупування членів матимемо

$$T = -\frac{r_0 v_{cp}}{2} \frac{dT_{cp}}{dx} \int_0^y \frac{1 - (y/r_0)}{\varepsilon_q + a} dy + C_2. \quad (9)$$

Якщо виразити  $\frac{dT_{cp}}{dx}$  через густину теплового потоку на поверхні струменя  $q_i$

$$q_i = \frac{r_0 v_{cp} c_p \rho}{2} \left( \frac{dT_{cp}}{dx} \right), \quad (10)$$

то можна отримати

$$T = -\frac{q_i}{\rho c_p} \int_0^y \frac{1-(y/r_0)}{\varepsilon_q + a} dy + C_2. \quad (11)$$

Згідно з першою граничною умовою  $C_2 = T_i$ . Тоді

$$T_i - T = \frac{q_i}{\rho c_p} \int_0^y \frac{1-(y/r_0)}{\varepsilon_q + a} dy. \quad (12)$$

Якщо ввести безрозмірнісну координату

$$y^+ = y v_{cp} / a, \quad (13)$$

то рівняння (12) запишемо так

$$T_i - T = \frac{q_i}{\rho c_p v_{cp}} \int_0^{y^+} \frac{1-(y/r_0)}{\varepsilon_q / a + 1} dy^+. \quad (14)$$

Для випадку розвинутого турбулентного руху рідини в струмені, замінивши  $St = q_i / [(T_i - T_{cp}) \cdot c \cdot \rho \cdot v_{cp}]$ ,  $R^+ = r_0 \cdot v_{cp} / a$ , та припустивши, що для турбулентного струменя  $T_{cp} \approx T(y=r_0)$ , отримаємо вираз

$$St = \frac{1}{\int_0^{R^+} \frac{1-(y^+/R^+)}{\varepsilon_q^+ + 1} dy^+}, \quad (15)$$

де  $St$  – безрозмірне число конвективного перенесення теплоти (число Стентона),  $St = \alpha / (c \cdot \rho \cdot v_{cp})$ ;  $\varepsilon_q^+$  – безрозмірний кінематичний коефіцієнт турбулентного перенесення теплоти,  $\varepsilon_q^+ = \varepsilon_q / a$ .

Проте, оскільки режим течії в струмені попередньо не можна вважати розвиненим турбулентним, середньоінтегральне значення температури рідини може значно відрізнятись від температури рідини на осі струменя.

У цьому разі середньоінтегральне значення температури рідини в струмені визначиться наступним чином

$$T_{cp} = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} 2\pi(r_0 - y) T dy. \quad (16)$$

Підставляючи значення розподілу температури (11) у рівняння (16), отримаємо вираз для числа Стентона

$$St = \frac{1}{\frac{2}{(R^+)^2} \int_0^{R^+} (R^+ - y^+) \left[ \int_0^{y^+} \frac{1 - (y^+ / R^+)}{\varepsilon_q^+ + 1} dy^+ \right] dy^+} \quad (17)$$

Очевидно, для того, щоб задача стала визначеною, потрібно задати значення кінематичного коефіцієнта турбулентного перенесення теплоти  $\varepsilon_q$ , або, значення величини  $\varepsilon_q^+$ .

Більшість традиційних моделей перенесення в турбулентних безсувних течіях ґрунтується на понятті ізотропної, або гомогенної турбулентності. С.С. Кутателадзе [1] в основу своєї моделі поклав припущення про ізотропність турбулентності по всьому об'єму струменя. Водночас більшість сучасних дослідників аналізують моделі, в яких міжфазна поверхня *краплинна рідина – газ* поводить себе як пружна стінка і, отже, пригнічує турбулентне перенесення. При цьому інтенсивність турбулентного перенесення в ядрі течії або беруть відповідною до моделі С.С. Кутателадзе, або враховують затухання турбулентності вздовж течії, наприклад, згідно з теорією ізотропної турбулентності G. K. Batchelor'a and A. A. Townsend'a [2]. Моделі цього типу відрізняються способом задання зміни коефіцієнта турбулентного перенесення біля міжфазної поверхні [3]. Однак при цьому виникає основна проблема: поєднання механізмів перенесення в цих двох областях. По-перше, не дотримується принцип суцільності середовища, а саме неперервності розподілу як температури, так і характеристик перенесення. По-друге, виникають проблеми формулювання граничних умов для області течії біля міжфазної межі, яку називають *областю пригнічення турбулентності*.

Дослідження турбулентності в турбулентному примежовому шарі на пластині, виконані Р.С.Клебановим [4], засвідчили, що в зовнішній області примежового шару турбулентність носить почерговий характер з ламінарною течією, тобто має місце так зване явище «чергованості» турбулентності (*intermittency*). Осцилографічні записи турбулентних пульсацій показують, що положення чіткої межі між турбулентною течією в примежовому шарі та вільною від турбулентності зовнішньою течією дуже коливається в часі, що уподібнює її до вільної поверхні струменя. Статистичною характеристикою течії в перехідній від ламінарного до турбулентного режиму області є так званий коефіцієнт чергованості. Він являє собою частку часу існування турбулентного режиму в даній точці перерізу течії. В більш загальному сенсі він розглядається як ймовірність того, що локальний рух є турбулентним.

При цьому коефіцієнт чергованості турбулентності по товщині примежового шару на плоскій пластині змінюється від 0 на зовнішній межі до 1 в області біля стінки (див. рис. 1).

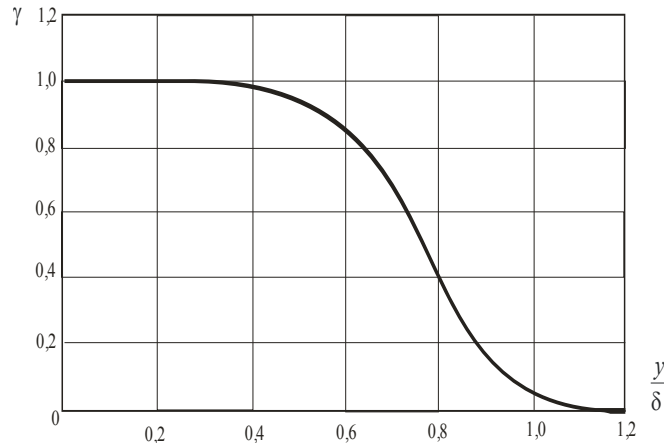


Рис. 1. Розподіл коефіцієнта чергованості по товщині турбулентного примежового шару

Можна зробити висновок, що навіть для розвинутого турбулентного руху в примежових шарах течія має чергований характер у зовнішній області примежового шару в межах  $y/\delta = 0,4 - 1,0$ . Таке ж явище має місце у вільних струменях та супутніх течіях.

Водночас коефіцієнт чергованості можна розглядати як міру стійкості ламінарного руху: при  $\gamma = 0$  ламінарна течія є стійкою до дії збурень, а при  $\gamma = 1$  вона є повністю нестійкою, тому внаслідок дії збурень течія стає розвинутою турбулентною.

З цього погляду коефіцієнт чергованості може стати зручною характеристикою для описання процесів перенесення в турбулентних струменях. Так, на поверхні поділу *рідина – пара*, де турбулентні пульсації повністю гасяться поверхневим натягом, ламінарний режим існує в усіх точках поверхні, тому коефіцієнт чергованості, очевидно, дорівнює 0. Зі збільшенням відстані від міжфазової поверхні в глибину струменя стабілізуючий вплив поверхневого натягу слабшає, тому коефіцієнт чергованості починає зростати, і досягає 1 в ядрі струменя за розвинутого турбулентного руху.

В основу аналізу турбулентного перенесення в струмені з використанням поняття чергованості турбулентності покладемо гіпотезу ізотропної турбулентності С.С. Кутателадзе. При цьому інтенсивність турбулентного перенесення біля міжфазової поверхні визначатиме значення коефіцієнта турбулентного перенесення у вигляді деякої функції  $F_1(y^+/R^+)$ , а в ядрі струменя – у вигляді функції  $F_2(y^+/R^+)$ .

Введемо поняття локального коефіцієнта чергованості турбулентного руху рідини в струмені у вигляді рівняння

$$\gamma = \frac{F(y^+/R^+) - F_1(y^+/R^+)}{F_2(y^+/R^+) - F_1(y^+/R^+)}, \quad (18)$$

де  $F(y^+/R^+)$  – поточне значення коефіцієнта турбулентного перенесення.

Тоді, величина, що визначає міру стійкості ламінарної течії, визначиться як

$$k = 1 - \gamma, \quad (19)$$

адже при  $\gamma = 0$  матимемо  $k = 1$  і ламінарна течія існує, та, навпаки, при  $\gamma = 1$  матимемо  $k = 0$ , і ламінарна течія поступається розвиненій турбулентній.

Для визначення значення  $\gamma$  припустимо, що величина  $k$  підлягає релаксаційній залежності, яка визначає пропорційну залежність відносної зміни значення  $k$  та зміни координати, що відраховується від міжфазової поверхні

$$\frac{dk}{d(1-y^+/R^+)} = -nk. \quad (20)$$

Інтегруючи останнє рівняння за граничної умови  $k = 1$  при  $y^+ = 0$ , отримаємо

$$k = \exp\left[n\left(-\frac{y^+}{R^+}\right)\right], \quad (21)$$

та відповідно

$$\gamma = 1 - k = 1 - \exp\left[n\left(-\frac{y^+}{R^+}\right)\right]. \quad (22)$$

Тоді, підставивши вираз (22) у рівняння (18), отримаємо

$$F(y^+/R^+) = F_1(y^+/R^+) + [F_2(y^+/R^+) - F_1(y^+/R^+)] \left\{1 - \exp\left[n\left(-\frac{y^+}{R^+}\right)\right]\right\}. \quad (23)$$

Функцію  $F_1(y^+/R^+)$  задамо, припускаючи, що біля поверхні поділу фаз течія ламінарна, тобто , або ж

$$F_1(y^+/R^+) = \varepsilon_q^+(0) = 0. \quad (24)$$

В ядрі струменя довжину шляху змішування задамо виходячи з моделі ізотропної турбулентності

$$F_2(y^+/R^+) = \varepsilon_q^+(y^+/R^+) = \varepsilon^* R^+. \quad (25)$$

Тоді рівняння зміни коефіцієнта турбулентного перенесення поперек струменя набуде вигляду

$$F(y^+/R^+) = \varepsilon^* R^+ \{1 - \exp[n(-y^+/R^+)]\}. \quad (26)$$

Адекватність запропонованого підходу підтверджує порівняння з результатами дослідження стійкості ламінарного руху Dhawan S., Narasimha R. [5]. Зміну коефіцієнта чергованості вздовж прилежового шару визначали експериментально та отримали у вигляді експоненціальної залежності

$$\gamma = 1 - \exp(-A\xi^2), \quad (27)$$

де  $A = 0,412 = \text{const}$ ,  $\xi$  – безрозмірна координата.

Очевидно є подібність експоненціальної форми рівнянь (22) та (27), що визначають стійкість ламінарного руху до дії збурень.

Значення коефіцієнта пропорційності  $n$  у рівнянні (26) наближено оцінимо з наступних міркувань.

З умов розмірності згідно з [6] товщина шару пригнічення турбулентності біля поверхні поділу *рідина – пара* пропорційна

$$\lambda \sim \sigma / (\rho v_0^2), \quad (28)$$

де  $\sigma$  – коефіцієнт поверхневого натягу рідини, Н/м;  $v_0$  – масштаб швидкості турбулентного руху, м/с.

Співвідношення (28) виражає умову стійкості поверхні рідина – пара. Капілярний тиск  $\sigma/\lambda$ , що виникає при деформації міжфазової поверхні турбулентними пульсаціями, компенсує динамічний напір пульсацій  $\rho v_0^2$ , тобто  $\lambda$  є розміром прошарку прояву капілярних сил.

Очевидно, що як масштаб швидкості турбулентного руху доцільно прийняти величину

$$v_0 = (v_x' v_y')^{0,5}, \quad (29)$$

де  $v_x' v_y'$  – пульсації швидкості рідини вздовж та поперек течії, м/с.

Проте, оскільки її значення невідоме, по аналогії з течією рідини в півці поблизу поверхні поділу *рідина-пара* можна записати

$$(v_x' v_y')^{0,5} / v_p \approx \text{const}. \quad (30)$$

Тоді наближено порядок товщини шару пригнічення турбулентності можна визначити наступним чином

$$\lambda \approx \sigma / (\rho v_{cp}^2). \quad (31)$$

Тобто, можна вважати, що на відстані від поверхні струменя  $y = \lambda$  величина коефіцієнта турбулентного перенесення теплоти відрізняється від розрахованого для ізотропної турбулентності в ядрі струменя на деяку малу величину, наприклад, на 5 %.



Застосовуючи цю умову до рівняння (26), отримаємо

$$n = - \ln 0,05 \rho v_{cp}^2 R \sigma^{-1} = 3,0 \rho v_{cp}^2 R \sigma^{-1}. \quad (32)$$

Отже, рівняння (26) набуде вигляду

$$\varepsilon_q^+(y^+/R^+) = \varepsilon^* R^+ [1 - \exp(-3,0 \rho v_{cp}^2 \sigma^{-1} y)]. \quad (33)$$

Таким чином, для замикання моделі необхідно визначити значення коефіцієнта турбулентного перенесення для ізотропної турбулентності в ядрі струменя. Оскільки запропонована модель є напівемпіричною, його визначення має стати метою спеціального експериментального дослідження.

#### *Висновок.*

Розроблено математичну модель теплоперенесення в циліндричних струменях рідини, що враховує пригнічення турбулентності поверхневим натягом.

#### *Використані джерела інформації:*

1. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. – Новосибирск: Наука, 1970. – 659 с.
2. Batchelor G.K. and Townsend A.A.. Decay of isotropik turbulence in the initial period // Proceeding of Royal Society. – 1948. – V.139A. – P. 558–593.
3. Kim S., Mills A.F., Condensation on Coherent Turbulent Jets: Part II – A Teoretical Study, Journal of Heat Transfer. – 1989. – V. 111. – P. 1075 – 1082.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М: Наука, 1974. – 711 с.
5. Dhawan S., Narasimha R. Some properties of boundary layer flow during the transition from laminar to turbulent motion // J. of Fluid Mechanics. – 1958. – V. 3. – P. 418 – 436.
6. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. – М.: Физматгиз, 1959. – 699 с.

*Рецензент: д.т.н. Серьогін О.О.*